

# REVUE D'OPTIQUE

## THÉORIQUE ET INSTRUMENTALE

### PROPAGATION DES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS UN MILIEU STRATIFIÉ PÉRIODIQUE TRANSPARENT

par Charles DUFOUR <sup>1</sup> et André HERPIN <sup>2</sup>

**SOMMAIRE.** — Après un exposé général sur l'étude de la propagation dans un milieu stratifié par les méthodes matricielles, on particularise au cas des empilements de doubles couches d'égale épaisseur optique sous incidence normale.

*Le facteur de réflexion est calculé complètement.*

*La discussion de la formule générale obtenue permet de démontrer les propriétés suivantes : la courbe des modules des facteurs de réflexion possède deux enveloppes d'équation simple ; les points de contact avec les enveloppes (très voisins des maxima et minima) peuvent être facilement déterminés ainsi que la forme générale de la courbe ; l'existence d'une phase critique est retrouvée ; la courbe des phases possède deux enveloppes et plusieurs relations très simples relient les courbes des phases et des modules du pouvoir réflecteur.*

**SUMMARY.** — After a general account on the study of propagation in a stratified space with matricial methods, we specify to the case of piles of double layers with equal optical thickness under normal incidence.

*The reflecting power has been completely calculated.*

*By discussion of the general formula thus obtained, we may demonstrate the following properties : the modula curve of reflecting powers has two envelops with simple equation ; the points of contact with the envelops (very near maxima and minima) can be easily calculated as well as the general formula of the curve ; the reality of a critical phase has been shown ; the phase curve has two envelops and we give some very simple relations between phase curves and reflecting power modula.*

Ce travail est une étude de la propagation des ondes électromagnétiques dans les empilements réguliers comportant un nombre fini de doubles couches de même épaisseur optique.

Depuis une quinzaine d'années, des résultats partiels ont été obtenus par des méthodes analytiques ou graphiques et certaines lois étaient déjà bien connues (existence d'une phase critique, nombre de maxima et minima). Cependant le

(<sup>1</sup>) Laboratoire Tubes Electroniques de la Compagnie des Compteurs, Corbeville par Orsay (Seine-et-Oise).

(<sup>2</sup>) Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay (S.-&-O.), Service de Physique Mathématique.

calcul restait toujours fastidieux et les résultats difficilement exploitables, notamment en ce qui concerne les changements de phase à la réflexion.

Nous nous sommes proposé une étude rigoureuse et complète, suivie d'une mise en forme facile à exploiter des formules établies.

Pour atteindre ce but, nous avons utilisé la méthode matricielle qui est la mieux adaptée à la description de la propagation des ondes électromagnétiques dans les milieux stratifiés. Par itération de la matrice de propagation, on obtient la formule générale donnant le pouvoir réflecteur. Cette formule peut être discutée complètement grâce à une construction géométrique simple, et conduit à des résultats qui sont directement exploitables.

Cet article est la publication détaillée de la conférence faite à la Société française de Physique le 1<sup>er</sup> février 1952 [10].

### I. Equations générales de propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu stratifié

1. Nous allons tout d'abord établir, sous forme matricielle, les équations de propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu stratifié quelconque, bien que de nombreux auteurs aient déjà traité ce sujet [1, 2, 3].

Nous rappellerons ces résultats généraux afin de faciliter l'accès de cet article au lecteur peu familiarisé avec les méthodes matricielles.

Nous ne ferons aucune hypothèse restrictive sur la nature des milieux, ni sur leur nombre et leur répartition. Nous supposerons simplement qu'ils sont stratifiés, la lumière se propageant normalement aux strates. Cette supposition, d'ailleurs conforme aux conditions expérimentales habituelles dans lesquelles on utilise les couches multiples, n'est en rien nécessaire dans cette première partie, tout à fait générale. Dans un travail récent, N. Cabrera [4] a étudié les conditions de propagation oblique dans un milieu infini et il retrouve, dans ce cas particulier, les propriétés générales découvertes par L. Brillouin [5]. Cependant une telle généralité serait superflue dans notre cas, puisque notre but est l'étude des doubles couches d'épaisseur optique égale, condition qui ne peut être réalisée que pour une seule incidence.

2. **Equations de propagation sous forme matricielle.** — Dans un milieu caractérisé par la constante diélectrique  $\epsilon$  et le coefficient de conductibilité  $\sigma$ , les équations de Maxwell s'écrivent

$$(1) \quad \begin{cases} \text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi\sigma}{c} \vec{E} + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \end{cases}$$

Prenons la direction de propagation comme axe  $Ox$ , la lumière étant polarisée suivant  $Oy$  et posons  $\omega = 2\pi\nu$ ,  $\nu$  étant la fréquence du rayonnement.

$$(2) \quad E_y = E(x)e^{i\omega t}, \quad H_z = H(x)e^{i\omega t},$$

toutes les autres composantes de champ étant nulles.  $E(x)$  et  $H(x)$  satisfont au système différentiel

$$(3) \quad \begin{cases} -\frac{dH}{dx} = i \frac{\omega}{c} \left( \epsilon - i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \right) E \\ \frac{dE}{dx} = -i \frac{\omega}{c} H. \end{cases}$$

Pour alléger les notations, nous introduirons l'indice complexe

$$(4) \quad \mathcal{N} = n - i\kappa = \sqrt{\epsilon - i \frac{4\pi\sigma}{\omega}}$$

et nous utiliserons comme unité de longueur  $\frac{c}{\omega} = \frac{\lambda_0}{2\pi}$  ( $\lambda_0$  = longueur d'onde dans le vide) en posant

$$(5) \quad \xi = \frac{\omega}{c} x = \frac{2\pi}{\lambda_0} x.$$

Le système (3) s'écrit alors

$$(6) \quad \begin{cases} i \mathcal{N}^2 E(\xi) + H'(\xi) = 0 \\ i H(\xi) + E'(\xi) = 0 \end{cases}$$

Sa solution est immédiate :

$$(7) \quad \begin{cases} E(\xi) = \widehat{A} e^{-i\mathcal{N}\xi} + \widehat{B} e^{i\mathcal{N}\xi} = A(\xi) + B(\xi) \\ H(\xi) = \mathcal{N} \widehat{A} e^{-i\mathcal{N}\xi} - \mathcal{N} \widehat{B} e^{i\mathcal{N}\xi} = \mathcal{N} A(\xi) - \mathcal{N} B(\xi) \end{cases}$$

On voit que  $A(\xi)$  correspond à la partie de l'onde se propageant dans le sens des  $\xi$  croissants,  $B(\xi)$  à la partie de l'onde se propageant en sens inverse. Si nous considérons un milieu ( $k$ ) d'indice  $\mathcal{N}_k$  s'étendant de  $\xi_k$  à  $\xi_{k+1}$ , les valeurs de  $A(\xi)$  et  $B(\xi)$  aux deux extrémités du milieu sont liées par les relations simples

$$(8) \quad A(\xi_{k+1}) = e^{-i\varphi_k} A(\xi_k), \quad B(\xi_{k+1}) = e^{i\varphi_k} B(\xi_k),$$

$\varphi_k$  étant l'angle de phase

$$(9) \quad \varphi_k = \mathcal{N}_k (\xi_{k+1} - \xi_k) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \mathcal{N}_k e_k,$$

où  $e_k$  est l'épaisseur du milieu.

Considérons maintenant  $A(\xi)$  et  $B(\xi)$  comme les deux composantes d'un vecteur  $A$ . Les deux équations (8) peuvent alors s'écrire sous forme matricielle

$$(10) \quad A_k(\xi_{k+1}) = S_k A_k(\xi_k),$$

en posant

$$(11) \quad S_k = \begin{bmatrix} e^{-i\varphi_k} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_k} \end{bmatrix}.$$

La matrice  $S_k^{-1}$  inverse de  $S_k$  est telle que

$$(10') \quad A_k(\xi_k) = S_k^{-1} A_k(\xi_{k+1}),$$

$$(11') \quad S_k^{-1} = \begin{bmatrix} e^{i\varphi_k} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi_k} \end{bmatrix}.$$

La caractéristique des ondes  $A(\xi)$  et  $B(\xi)$ , leur propagation sans déformation, est traduite par la forme diagonale de la matrice  $S_k$  : au cours de la propagation, il n'y a pas mélange des ondes  $A$  et  $B$ .

A la limite de deux milieux,  $k$  et  $k-1$  par exemple, il y a continuité des composantes tangentielles des champs, ce que l'on écrit

$$(12) \quad E_{k-1}(\xi_k) = E_k(\xi_k), \quad H_{k-1}(\xi_k) = H_k(\xi_k),$$

et que l'on peut condenser en une équation unique

$$(13) \quad Z_k(\xi_k) = Z_{k-1}(\xi_k),$$

le vecteur  $Z_k(\xi)$  ayant comme composantes le champ électrique et le champ magnétique.

Les vecteurs  $A_k(\xi)$  et  $Z_k(\xi)$  sont liés par la relation suivante, qui se déduit simplement des équations (7)

$$(14) \quad Z_k(\xi) = T_k A_k(\xi),$$

avec

$$(15) \quad T_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \mathcal{N}_k & -\mathcal{N}_k \end{bmatrix}.$$

La transformation inverse est immédiate

$$(14') \quad A_k(\xi) = T_k^{-1} Z_k(\xi),$$

avec

$$(15') \quad T_k^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\mathcal{N}_k} \\ 1 & -\frac{1}{\mathcal{N}_k} \end{bmatrix}$$

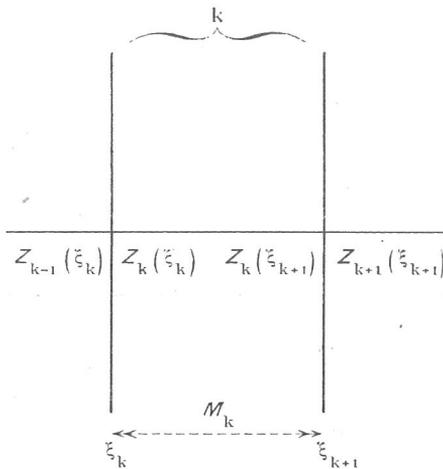


FIG. 1.

Considérons maintenant une couche, par exemple la couche  $k$  qui s'étend de  $\xi_k$  à  $\xi_{k+1}$  (fig. 1), et cherchons à relier le champ électromagnétique immédiatement à gauche de cette couche et le champ immédiatement à droite. Le premier est représentable par le vecteur

$$(16) \quad Z_{k-1}(\xi_k) = Z_k(\xi_k).$$

On écrit successivement, en utilisant les relations (15), (15') et (10) :

$$\begin{aligned}
 (17) \quad Z_{k-1}(\xi_k) &= Z_k(\xi_k) = T_k A_k(\xi_k) \\
 &= T_k S_k^{-1} A_k(\xi_{k+1}) = T_k S_k^{-1} T_k^{-1} Z_k(\xi_{k+1}) \\
 &= T_k S_k^{-1} T_k^{-1} Z_{k+1}(\xi_{k+1}) = M_k Z_{k+1}(\xi_{k+1}).
 \end{aligned}$$

La matrice  $M_k$  qui permet de passer du champ à gauche au champ à droite d'une couche ne dépend donc que des propriétés de la couche considérée seule, ce qu'on peut vérifier sur son expression obtenue par le produit indiqué sur la formule (17).

$$(18) \quad M_k = \begin{bmatrix} \cos \varphi_k & \frac{i}{\mathcal{N}_k} \sin \varphi_k \\ i \mathcal{N}_k \sin \varphi_k & \cos \varphi_k \end{bmatrix}.$$

Son déterminant est égal à l'unité, ce qui est un caractère tout à fait général des matrices décrivant une propagation, et ne dépend nullement de l'absorption éventuelle du milieu, fait bien connu dans la théorie des quadripôles électriques.

3. **Matrice de propagation d'un ensemble de couches.** — En poursuivant le raisonnement de récurrence fait plus haut, on voit sans peine que l'on peut relier le vecteur  $Z_k$  au vecteur  $Z_{k+q}$  par la formule

$$(19) \quad Z_k(\xi_k) = M_k M_{k+1} \dots M_{k+q-1} Z_{k+q}(\xi_{k+q}),$$

dans laquelle figurent les produits des matrices de propagation. Le produit direct à partir de la règle de multiplication des matrices est possible, mais on aboutit très vite à des calculs fort pénibles. Il est plus agréable et aussi plus fructueux, comme nous le verrons par la suite, de représenter chaque matrice de propagation par une combinaison linéaire de *matrices de Pauli*. En effet, dans le groupe des matrices à deux lignes et deux colonnes, celles-ci jouent le même rôle que les vecteurs unitaires orthogonaux dans le groupe des vecteurs de l'espace à trois dimensions; toute matrice à deux lignes et deux colonnes est représentable par une combinaison linéaire des matrices de Pauli; d'autre part, celles-ci possèdent des règles de multiplication particulièrement simples. Ce sont trois matrices hermitiennes (les éléments symétriques par rapport à la diagonale principale sont imaginaires conjugués) dont les carrés sont égaux à la matrice unité  $I$ :

$$(20) \quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = I.$$

De plus, elles anticommulent et leur règle de multiplication est celle des moments angulaires :

$$(21) \quad \begin{cases} \sigma_1 \sigma_2 = -\sigma_2 \sigma_1 = i \sigma_3 \\ \sigma_2 \sigma_3 = -\sigma_3 \sigma_2 = i \sigma_1 \\ \sigma_3 \sigma_1 = -\sigma_1 \sigma_3 = i \sigma_2 \end{cases}$$

On peut leur donner la forme suivante, habituelle en mécanique quantique :

$$(22) \quad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

La matrice de propagation de la couche k peut alors s'écrire

$$(23) \quad M_k = \cos \varphi_k \cdot I + \frac{i}{2} \left( \partial \chi_k + \frac{1}{\partial \chi_k} \right) \sin \varphi_k \cdot \sigma_1 + \frac{1}{2} \left( \partial \chi_k - \frac{1}{\partial \chi_k} \right) \sin \varphi_k \cdot \sigma_2.$$

La matrice de propagation d'un ensemble de N couches quelconques peut alors s'écrire sous la forme simple.

$$(24) \quad M_{(N)} = A_N I + B_N \sigma_1 + C_N \sigma_2 + D_N \sigma_3.$$

Les coefficients  $A_N, B_N, C_N, D_N$  peuvent se calculer aisément en utilisant les règles de multiplication (20) et (21). On voit, en comparant les formules (23) et

(24), que la matrice de propagation d'une seule couche diffère de la matrice de propagation générale par l'absence du terme en  $\sigma_3$ . On en déduit le théorème suivant, qui est bien connu des électriciens dans le cas des quadripôles électriques :

*En général, un ensemble de N couches ne peut pas être remplacé par une seule couche*

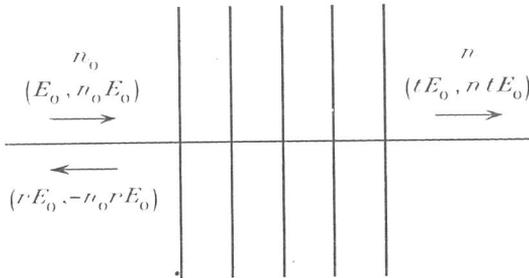


FIG. 2

*Mais il peut, au moins théoriquement, être remplacé par un ensemble de deux couches.*

Terminons ce paragraphe, quelque peu abstrait, par l'expression du pouvoir réflecteur d'un système quelconque formé de N couches. Supposons (fig. 2) que l'une des faces soit plongée dans un milieu infini d'indice  $n_0$ , l'autre dans un milieu d'indice  $n$ . Dans la direction Ox arrive une onde  $E_0, H = n_0 E_0$ . L'onde réfléchie est  $r E_0, H = -r n_0 E_0$ , le signe — provenant de la propagation en sens inverse. L'onde transmise est  $t E_0, H = n t E_0$ ,  $r$  et  $t$  étant les nombres complexes qui caractérisent les facteurs de réflexion  $R = |r|^2$  et de transmission  $T = |n t|^2$  du système de couches <sup>(3)</sup>.

En utilisant la relation générale de propagation, on voit que

$$(25) \quad \begin{bmatrix} 1 + r & 0 \\ n_0(1 - r) & 0 \end{bmatrix} = M_{(N)} \begin{bmatrix} t & 0 \\ n t & 0 \end{bmatrix}.$$

On en tire, par un calcul élémentaire

<sup>(3)</sup> Pour simplifier le langage, nous appellerons dans la suite de cet exposé  $r$  pouvoir réflecteur complexe et  $|r|^2$  pouvoir réflecteur,  $|r|^2$  étant le facteur de réflexion.

$$(26) \quad r = \frac{(n_0 - n) A_N + (n_0 + n) D_N + i(n_0 n - 1) B_N^* - i(n_0 n + 1) C_N}{(n_0 + n) A_N + (n_0 - n) D_N + i(n_0 n + 1) B_N^* - i(n_0 n - 1) C_N}$$

$$(27) \quad t = \frac{2 n_0}{(n_0 + n) A_N + (n_0 - n) D_N + i(n_0 n + 1) B_N^* - i(n_0 n - 1) C_N^*}$$

II. Étude analytique des empilements de doubles couches semblables de même épaisseur optique

1. Étude générale des doubles couches de même épaisseur optique. — Dans le chapitre précédent, nous avons étudié les systèmes stratifiés d’une façon très générale, mais à part les quelques théorèmes que nous avons rappelés, on ne peut guère faire de théorie des empilements quelconques ; on doit se contenter de calculer, par les méthodes que nous avons développées, les facteurs de réflexion et de transmission, chaque type d’empilement possédant des propriétés particulières. Parmi ces empilements, le plus simple est formé de doubles couches semblables, chaque couche ayant même épaisseur optique. Un tel empilement peut être symbolisé par

$$ABABAB\dots\dots, \quad \varphi_A = \varphi_B.$$

Nous ne nous occuperons désormais que des milieux stratifiés possédant cette structure. Nous pourrions dès maintenant appliquer les résultats généraux obtenus à des empilements de cette espèce, mais nous préférons démontrer auparavant qu’un certain nombre de propriétés de ces couches ne dépendent que de la structure des couches A et B. Un travail semblable a été fait récemment par N. Cabrera [4], mais suivant des méthodes différentes.

Nous considérons donc une double couche, chaque couche ayant même épaisseur optique, et nous désignerons par  $\varphi$  la quantité

$$(28) \quad \varphi = 2 \pi \frac{n_1 e_1}{\lambda_0} = 2 \pi \frac{n_2 e_2}{\lambda_0}.$$

Nous nous limiterons aux milieux non absorbants, de sorte que les indices  $n_1$  et  $n_2$  seront réels. On obtient, par simple multiplication, la matrice de propagation d’une double couche

$$(29) \quad M = M_1 M_2 = AI + B \sigma_1 + C \sigma_2 + D \sigma_3,$$

avec

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} A &= 1 - \frac{(n_1 + n_2)^2}{2 n_1 n_2} \sin^2 \varphi, \\ B &= iB^* = i \frac{(n_1 + n_2)(n_1 n_2 + 1)}{2 n_1 n_2} \sin \varphi \cos \varphi, \\ C &= \frac{(n_1 + n_2)(n_1 n_2 - 1)}{2 n_1 n_2} \sin \varphi \cos \varphi, \\ D &= \frac{n_1^2 - n_2^2}{2 n_1 n_2} \sin^2 \varphi. \end{aligned} \right.$$

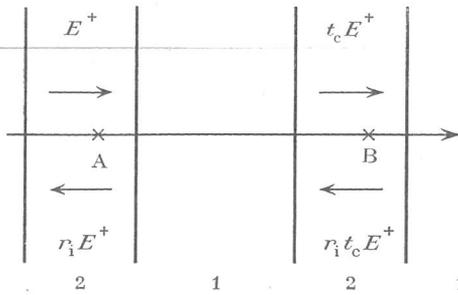


FIG. 3

Le cas quelque peu académique où l'empilement de doubles couches s'étend à l'infini dans les deux sens présente l'avantage de ne dépendre que de la double couche considérée. C'est donc sur ce cas que nous pourrions étudier ses propriétés caractéristiques. Plaçons-nous (fig. 3) au voisinage d'un interface 2-1, dans le milieu 2, et calculons le pouvoir réflecteur du système à droite de

l'interface considéré. Par analogie avec la théorie des filtres, nous l'appellerons le *pouvoir réflecteur complexe itératif*  $r_i$ .

En effet, puisque le système est infini, le pouvoir réflecteur complexe est le même en A qu'en un point homologue quelconque B, B', B'',... d'où le nom d'itératif.

Si  $E^+(A)$  est le champ se dirigeant vers la droite au point A,  $E^+(B)$  le même champ au point B, on a

$$(31) \quad E^+(B) = t_c E^+(A).$$

$t_c$  est le pouvoir de transmission caractéristique de la double couche dont l'expression est particulièrement simple. Le champ a pour expression en A et en B

$$(32) \quad \begin{aligned} E(A) &= (1 + r_i) E^+(A), \\ H(A) &= (1 - r_i) n_2 E^+(A), \\ E(B) &= (1 + r_i) E^+(B) = (1 + r_i) t_c E^+(A), \\ H(B) &= (1 - r_i) n_2 E^+(B) = (1 - r_i) t_c E^+(A). \end{aligned}$$

Ces deux champs sont liés par la relation suivante qui traduit la propagation dans la double couche

$$(33) \quad Z(A) = M Z(B) = t_c M Z(A)$$

ce qui prouve que  $\tau = 1/t_c$  doit être une racine de l'équation séculaire

$$(34) \quad \text{Det} [M + \tau I] = 0;$$

qui s'écrit, en tenant compte de ce que le déterminant de  $M$  est égal à l'unité,

$$(35) \quad \tau^2 - 2\tau A + 1 = 0$$

sa solution est

$$(36) \quad \tau = A + \sqrt{A^2 - 1}$$

(le signe — devant le radical correspondrait à la propagation en sens inverse). Nous voyons sur la première des formules (30) que  $A$  varie de 1 à  $-(n_1^2 + n_2^2)/2n_1n_2$  lorsque  $\varphi$  varie de 0 à  $\pi/2$ .  $A$  est donc en module inférieur à l'unité et  $t_c$  est complexe tant que  $\varphi$  reste inférieur à une valeur  $\varphi_c$ , appelée *phase critique*, déterminée par

$$(37) \quad \sin \varphi_c = \frac{2\sqrt{n_1 n_2}}{n_1 + n_2},$$

soit

$$(37') \quad \frac{\pi}{2} - \varphi_c = \arcsin \left| \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right| = \arcsin r,$$

en désignant par  $r$  le pouvoir réflecteur sur une interface (en valeur absolue). Si nous posons

$$(38) \quad A = \cos \theta,$$

soit

$$(39) \quad \sin \frac{\theta}{2} = \frac{n_1 + n_2}{2\sqrt{n_1 n_2}} \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - r^2}} \sin \varphi,$$

on peut mettre  $t_c$  sous la forme

$$(40) \quad t_c = e^{-i\theta}.$$

Il y a donc propagation sans affaiblissement du champ électromagnétique dans le milieu stratifié, la phase de l'onde se propageant dans un sens, variant seule d'un point à un autre. On peut d'ailleurs remarquer que la variation de phase  $\theta$  est indépendante du point de référence que nous prenons, car  $A$ , qui est la trace de la matrice de propagation, est indépendante de la direction de propagation et de l'origine choisie. Cette remarque nous permet de définir la *vitesse de phase*  $V$  dans le milieu stratifié

$$(41) \quad \frac{1}{V} = \frac{1}{c} \frac{n_1 e_1}{e_1 + e_2} \frac{\theta}{\varphi} = \frac{1}{c} \frac{n_2 e_2}{e_1 + e_2} \frac{\theta}{\varphi},$$

soit, en définissant un indice moyen,

$$(42) \quad \bar{n} = \frac{n_1 e_1 + n_2 e_2}{e_1 + e_2} = \frac{2 n_1 n_2}{n_1 + n_2},$$

$$(43) \quad \frac{1}{V} = \frac{1}{c} \frac{\theta}{\bar{n} \varphi}.$$

La figure 4 représente  $\theta$  en fonction de  $\varphi$ . Pour  $\varphi$  petit,  $\theta$  lui est proportionnel au second ordre près,

$$\theta \simeq \frac{n_1 + n_2}{\sqrt{n_1 n_2}} \varphi, \quad \text{soit} \quad \varphi \simeq \sqrt{1 - r^2} \theta.$$

Puis  $\theta$  croît plus rapidement et atteint la valeur  $\pi$  lorsque  $\varphi$  est égale à la phase critique  $\varphi_c$ . Lorsque  $\varphi$  est petit, la vitesse de phase est constante, au second ordre près, et égale à  $c \sqrt{1 - r^2} / \bar{n}$ , puis elle décroît et, pour  $\varphi = \varphi_c$ , atteint la valeur

$$V(\varphi_c) = \frac{c}{\bar{n}} \frac{2\varphi_c}{\pi}.$$

La vitesse de groupe  $U$  est définie par

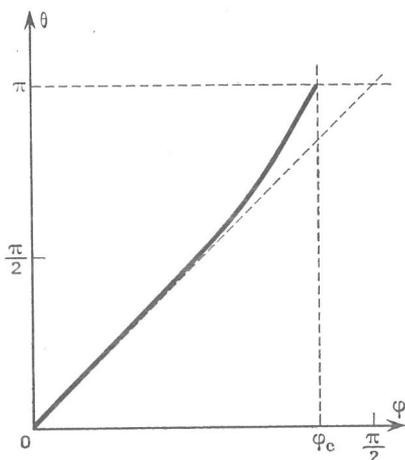


FIG. 4

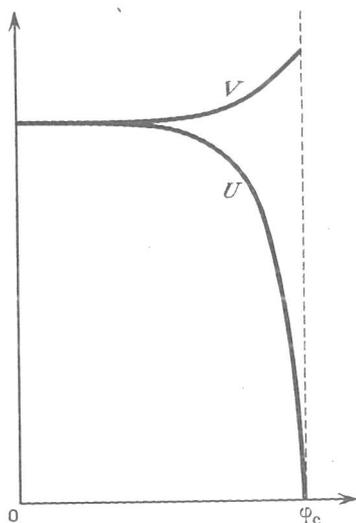


FIG. 5

$$(44) \quad \frac{1}{U} = \frac{d}{d\nu} \left( \frac{\nu}{V} \right) = \frac{\bar{n}}{2c} \frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{\bar{n}}{c\sqrt{1-r^2}} \frac{\cos\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-r^2}}.$$

Elle est égale à la vitesse de phase pour les petites valeurs de  $\varphi$  et s'annule à la phase critique. Ce comportement est caractéristique de la propagation dans les milieux périodiques: la vitesse de groupe s'annule à la limite de la bande de transmission. En effet, pour des phases supérieures à  $\varphi_c$ ,  $A$  est inférieur à  $-1$ , ce qui nous conduit à poser

$$(45) \quad A = -\operatorname{ch} \chi,$$

de sorte que

$$(46) \quad t_c = -e^{-\chi}.$$

Il n'y a plus propagation du champ dans le milieu, mais il s'établit un système d'ondes stationnaires dont l'amplitude décroît exponentiellement.

Nous avons porté sur la figure 5 la vitesse de phase  $V$  et la vitesse de groupe  $U$  en fonction de  $\varphi$ .

Les formules établies plus haut nous permettent de calculer le pouvoir réflecteur complexe itératif

$$(47) \quad r_i = \frac{n_2(B^* - C) + D - i \sin \theta}{n_2(B^* - C) - D + i \sin \theta}.$$

Remarquons que, pour  $\varphi$  supérieur à  $\varphi_c$ ,  $r_i$ , qui est réel, n'a plus aucun sens physique, puisqu'aucune onde ne peut plus se propager dans le milieu.

Nous allons terminer cette étude générale par le calcul du pouvoir réflecteur d'un système semi-infini formé par un empilement de doubles couches vers la

droite plongé dans un milieu d'indice  $n_0$ . Soit  $r$  le pouvoir réflecteur en A. Le facteur de réflexion en B est égal au pouvoir réflecteur complexe itératif  $r_i$ . On a d'une manière évidente,

- En A Onde se propageant vers la droite  $E_0, n_0 E_0$
- Onde se propageant vers la gauche  $r E_0, -n_0 r E_0$
- En B Onde se propageant vers la droite  $t E_0, t n_2 E_0$
- Onde se propageant vers la gauche  $r_i t E_0, -n_2 r_i t E_0$ .

De plus, on a  $Z(B) = M^{-1}Z(A)$ .

On en déduit, après un calcul élémentaire,

$$\frac{1+r}{1-r} = n_0 Q,$$

$Q$  est une quantité indépendante de  $n_0$  dont l'expression est

$$(48) \quad Q = \frac{(A+D)(1+r_i) + i(B^* - C)(1-r_i)n_2}{n_2(A-D)(1-r_i) + i(B^* - C)(1-r_i)}.$$

D'où le *théorème* : Si  $r(n)$  est le pouvoir réflecteur complexe d'un système semi-infini de couches doubles plongé dans un milieu d'indice  $n$ , la quantité

$$[r(n) + 1] / [r(n) - 1]$$

est proportionnelle à l'indice  $n$ .

**2. Milieu formé de  $q$  doubles couches semblables.** — Nous abordons maintenant le but final pratique de cette étude : le calcul des caractéristiques optiques d'un milieu formé de  $q$  doubles couches de même épaisseur optique, que l'on peut schématiser par

$$\begin{array}{ccccccccccc} n_0 & | & n_1 & | & n_2 & | & n_1 & | & n_2 & | & \dots\dots & | & n_1 & | & n_2 & | & n_0 \\ & & \underbrace{A \quad B} & & \underbrace{A \quad B} & & \dots\dots & & \underbrace{A \quad B} & & & & & & & & \\ & & (1) & & (2) & & & & (q) & & & & & & & & \end{array}$$

D'après les formules générales que nous avons démontrées au paragraphe I-3, la matrice de propagation de ce système est

$$(49) \quad M_q = (M)^q,$$

$M$  étant la matrice de propagation d'une seule double couche écrite au début du paragraphe précédent.

$$(50) \quad M = A I + B \sigma_1 + C \sigma_2 + D \sigma_3,$$

$A, B, C$  et  $D$  ayant les valeurs données par la formule (30). Pour calculer la matrice  $M_q$ , nous utiliserons le théorème suivant [9] :

*Théorème* : Si une matrice à deux lignes et deux colonnes, de déterminant égal à l'unité, peut s'écrire sous la forme (50), la puissance  $q$ ème de cette matrice s'écrit

$$(51) \quad M^q = F_q(A) I + G_q(A) [B \sigma_1 + C \sigma_2 + D \sigma_3],$$

$F_q$  et  $G_q$  étant deux polynômes en  $A$  satisfaisant à la même relation de récurrence

$$(52) \quad y_{q+2} - 2A y_{q+1} + y_q = 0,$$

les conditions initiales étant les suivantes :

$$(53) \quad F_0 = 1, \quad F_1 = A, \quad G_0 = 0, \quad G_1 = 1.$$

La démonstration élémentaire s'établit par récurrence. On vérifie tout d'abord que le théorème est vrai pour  $q = 1$  et  $q = 2$ . Supposons-le vrai pour  $q$  ;

$$(54) \quad M^q = F_q I + G_q [B \sigma_1 + C \sigma_2 + D \sigma_3].$$

Multiplions cette expression par  $M$

$$(55) \quad \begin{aligned} M^q M &= [F_q A + G_q (B^2 + C^2 + D^2)] I \\ &+ (G_q A + F_q) (B \sigma_1 + C \sigma_2 + D \sigma_3) \\ &+ G_q [B C (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_1) + C D (\sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_2) + B D (\sigma_3 \sigma_1 + \sigma_1 \sigma_3)]. \end{aligned}$$

Les termes de la dernière parenthèse sont nuls d'après les formules de commutation (19). Le déterminant étant égal à 1,

$$(56) \quad B^2 + C^2 + D^2 = A^2 - 1.$$

Le théorème est donc exact si

$$(57) \quad F_{q+1} = A F_q + (A^2 - 1) G_q, \quad G_{q+1} = F_q + A G_q,$$

ce qui, après élimination, nous redonne la formule de récurrence proposée. Les polynômes les plus généraux satisfaisant à cette relation sont les polynômes de Lucas dont l'importance a été montrée par M. Parodi [6] et dont les polynômes de Tchebycheff ne sont que des cas particuliers. Notons que le théorème que nous venons de démontrer est d'une importance plus générale, car on en déduit que l'on doit rencontrer les polynômes de Lucas dans tous les cas où l'on itère des équations se rattachant au groupe unitaire unimodulaire dont les matrices de Pauli sont une représentation. C'est le cas de tous les phénomènes de propagation, ainsi que l'a montré L. Brillouin [7].

Dans le cas présent, on peut mettre  $F_q$  et  $G_q$  sous la forme canonique

$$(58) \quad y_q = x^q.$$

En portant dans l'équation de récurrence, on obtient l'équation caractéristique

$$(59) \quad x^2 - 2A x + 1 = 0,$$

d'où

$$(60) \quad x = A \pm \sqrt{A^2 - 1},$$

ce qui nous conduit à poser, comme au paragraphe précédent,

$$(61) \quad A = \cos \theta,$$

$\theta$  étant réel, tant que  $\varphi$  est inférieur à la phase critique  $\varphi_c$ .

On a donc, d'une façon générale,

$$(62) \quad y_q = C_1 e^{i q \theta} + C_2 e^{-i q \theta}$$

et, en utilisant les conditions initiales (53),

$$(63) \quad F_q = \cos q\theta, \quad G_q = \frac{\sin q\theta}{\sin \theta},$$

formules démontrées par M. Parodi et utilisées par F. Abelès dans sa thèse [8].

Dans le cas où  $\varphi$  est supérieur à la phase critique, on pose

$$(64) \quad A = -\operatorname{ch} \chi$$

$$(65) \quad F_q = (-1)^{q+1} \operatorname{ch}(q\chi), \quad G_q = (-1)^q \frac{\operatorname{sh} q\chi}{\operatorname{sh} \chi}.$$

Pour  $\varphi$  inférieur à  $\varphi_c$ , on obtient, en utilisant le théorème démontré plus haut,

$$(66) \quad \begin{aligned} A_q &= \cos q\theta, \\ B_q &= \frac{(n_1 + n_2)(n_1 n_2 + 1)}{2 n_1 n_2} \sin \varphi \cos \varphi \frac{\sin q\theta}{\sin \theta}, \\ C_q &= \frac{(n_1 + n_2)(n_1 n_2 - 1)}{2 n_1 n_2} \sin \varphi \cos \varphi \frac{\sin q\theta}{\sin \theta}, \\ D_q &= \frac{n_1^2 - n_2^2}{2 n_1 n_2} \sin^2 \varphi \frac{\sin q\theta}{\sin \theta}. \end{aligned}$$

D'où la valeur du pouvoir réflecteur complexe

$$(67) \quad r_q = \frac{n_0 - n}{n_0 + n} \frac{\sin \theta \cotg q\theta + u \sin^2 \varphi + i \nu \sin \varphi \cos \varphi}{\sin \theta \cotg q\theta + u' \sin^2 \varphi + i \nu' \sin \varphi \cos \varphi}$$

avec

$$(68) \quad \begin{aligned} u &= \frac{n_1^2 - n_2^2}{2 n_1 n_2} \frac{n_0 + n}{n_0 - n}; \quad u' = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2 n_1 n_2} \frac{n_0 - n}{n_0 + n} \\ \nu &= \frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2} \frac{n_0 n - n_1 n_2}{n_0 - n}; \quad \nu' = \frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2} \frac{n_0 n + n_1 n_2}{n_0 + n}. \end{aligned}$$

Nous le mettrons sous la forme suivante, plus maniable :

$$(69) \quad r_q = \frac{n_0 - n}{n_0 + n} \frac{X_q + u \operatorname{tg} \varphi + i \nu}{X_q + u' \operatorname{tg} \varphi + i \nu'}, \quad X_q = \frac{\sin \theta \cotg q\theta}{\sin \varphi \cos \varphi}.$$

Cette forme simple qui se prête facilement aux calculs numériques ou graphiques va nous permettre de démontrer un certain nombre de propriétés des familles de courbes  $|r_q(\varphi)|$ .

### III. Etude détaillée des empilements de doubles couches semblables.

1. Représentation géométrique. — La formule (69) à laquelle nous avons abouti au paragraphe précédent permet de calculer numériquement le pouvoir réflecteur

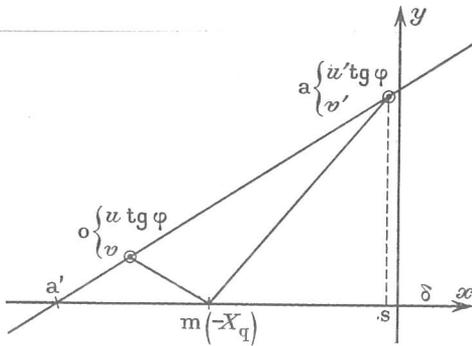


FIG. 6

de  $+\infty$  à  $-\infty$ , alors que  $u \operatorname{tg} \varphi$  et  $u' \operatorname{tg} \varphi$  restent pratiquement constants. Il en résulte que  $|r_q|$  varie très rapidement entre deux limites. Ces deux courbes limites sont capitales pour l'étude de la famille des courbes  $|r_q(\varphi)|$ .

Portons, dans le plan complexe (fig. 6), les points  $o$ ,  $a$  et  $m$  dont les arguments sont respectivement

$$(70) \quad u \operatorname{tg} \varphi + i \nu, \quad u' \operatorname{tg} \varphi + i \nu', \quad -X_q.$$

On a, d'une façon évidente,

$$(71) \quad r_q = r_0 \frac{(mo)}{(ma)}, \quad r_0 = \frac{n_0 - n}{n_0 + n},$$

donc

$$(72) \quad |r_q| = |r_0| \frac{\overline{mo}}{\overline{ma}}, \quad \arg r_q = \widehat{oma}.$$

Il est visible qu'une similitude ne change pas le rapport  $(mo)/(ma)$ . De plus, la droite  $oa$  coupe l'axe des  $x$  en un point  $a'$  tel que

$$(73) \quad \frac{\overline{aa'}}{\overline{oa'}} = \frac{\nu'}{\nu} = \text{Cte.}$$

Nous voyons d'autre part que, pour une valeur déterminée de  $\varphi$ , le lieu des extrémités des vecteurs  $r_q$  de même module est un cercle, et les points tels que  $\arg(r_q) = \text{constante}$  sont sur un cercle orthogonal au précédent passant par les points  $o$  et  $a$  (arc capable). Puisque nous avons la possibilité d'effectuer une similitude, nous pouvons toujours conserver  $o$  et  $a$  fixes par un choix convenable d'axes et d'échelle. Pour les différentes valeurs de  $\varphi$ , nous obtiendrons ainsi deux familles de cercles orthogonaux, l'une à phase, l'autre à module constants.

Nous voyons maintenant la possibilité de simplifier la représentation géométrique précédente par une inversion qui transformera une des familles de cercles en cercles concentriques, l'autre en droites concourantes.

Transformons la figure 6 par une inversion de pôle  $a$  et de puissance  $\overline{ao}^2$ ; la

d'un ensemble de  $q$  doubles couches. Cependant, pour les calculs pratiques, il est plus rapide d'utiliser certaines propriétés géométriques simples qui donnent immédiatement la position de certains points particulièrement importants. Remarquons tout d'abord que, si  $q$  est assez élevé, à une variation très petite de  $\varphi$ , donc de  $\theta$ , correspond une très grande variation de  $q\theta$  et  $X_q$  peut varier un grand nombre de fois

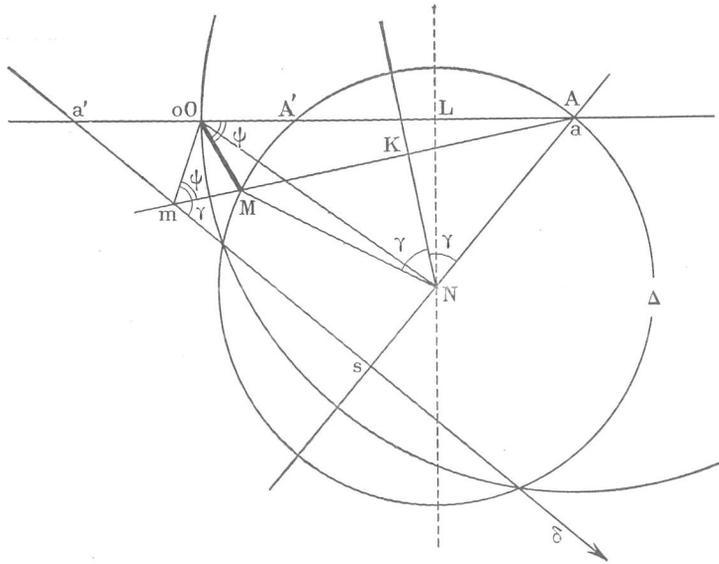


FIG. 7

droite  $\delta$ , prise comme axe des  $x$  sur la figure 6 devient, sur la figure 7, un cercle  $\Delta$  passant par  $A$ , par  $A'$  inverse de  $a'$  et par  $M$  inverse de  $m$ . L'inversion conservant les angles, il y a égalité des angles  $\psi$  marqués sur la figure 7, d'où immédiatement

$$(74) \quad \frac{mo}{ma} = \frac{OM}{OA}, \quad \text{soit} \quad OM = OA \frac{mo}{ma}.$$

Il nous suffira donc de faire précéder cette inversion d'une similitude telle que  $\overline{OA} = r_0$  pour que  $\overline{OM}$  nous donne immédiatement  $r_q$  en module et en phase

$$(75) \quad r_q = r_0 \frac{\overline{mo}}{\overline{ma}} = \overline{OM}, \quad \psi_q = \arg \overline{OM} = \widehat{oma} = \widehat{MOA}.$$

Sur la figure 6, la droite  $\delta$  pivote autour du point fixe  $a'$ . Le vecteur  $\overline{OA'}$  de la figure 7 conservera la valeur fixe  $r'_0$ . Le problème se ramène maintenant à la détermination de la position du point  $M$  en fonction de  $\varphi$ . Le cercle  $\Delta$  est déterminé par son centre  $N$ . En effet,  $AN$  est perpendiculaire à la droite  $\delta$  dont la pente est proportionnelle à  $\cotg \varphi$  (voir fig. 6). On peut donc poser

$$(76) \quad LN = h \operatorname{tg} \varphi.$$

Le calcul donne

$$(77) \quad h = \frac{n_0 n}{n_0 + n} \frac{n_1 - n_2}{n_0 n + n_1 n_2} = \frac{r}{2} \times \sqrt{\frac{(1 - r_0^2)(1 - r'^2_0)}{1 - r^2}}.$$

Sur le cercle  $\Delta$  ainsi obtenu,  $M$  est fixé par l'angle  $\widehat{ANM} = 2\gamma$ . Menons de  $N$  la droite  $NK$  médiatrice de  $AM$ .

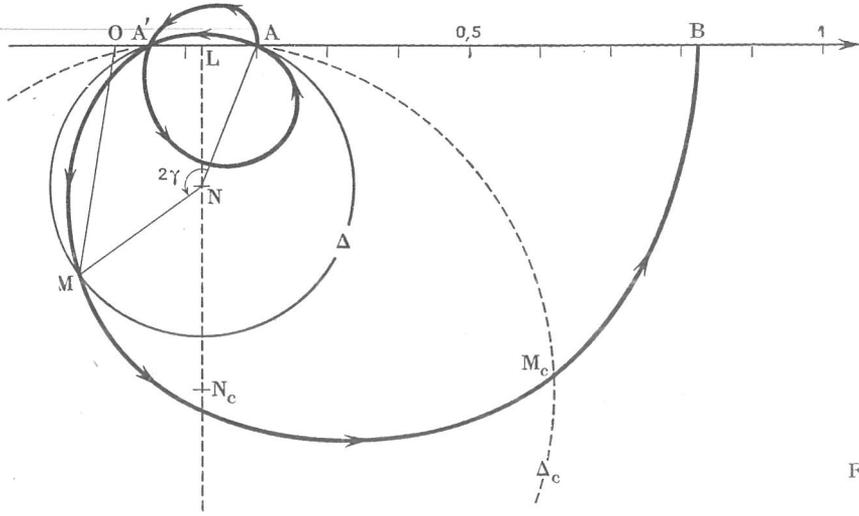


FIG. 8

On a l'égalité évidente  $\widehat{sm\alpha} = \widehat{AN\hat{K}} = \gamma$ , d'où, en tenant compte de ce que  $ms$  est la projection sur l'axe des  $x$  (fig. 6) de  $ma$  et que  $sa$  est l'ordonnée de  $a$ ,

$$(78) \quad \cotg \gamma = \frac{ms}{sa} = \frac{u' \operatorname{tg} \varphi + X_q}{\rho'} = \frac{u' \operatorname{tg} \varphi + \frac{2 \sin \theta}{\sin^2 \varphi} \cotg q\theta}{\rho'}$$

ce qui détermine  $\gamma$ . On voit que, si  $q$  est assez grand,  $\cotg \gamma$  est à peu près proportionnelle à  $\cotg q\theta$ ;  $\gamma$  augmentera de  $\pi$  chaque fois que  $q\theta$  augmentera de  $\pi$  (rigoureux, sauf dernier demi-tour).

Nous pouvons maintenant nous rendre compte de la variation de  $r_q$  lorsque  $\varphi$  varie de 0 à  $\varphi_c$ . Le point figuratif  $M$  décrit une courbe comprenant  $q$  lobes passant par les points  $A$  et  $A'$ . Lorsque  $q$  est grand, les premiers lobes sont peu différents de cercles.

La figure 8 donne, à titre d'exemple, la trajectoire de  $M$  pour  $n_0=2,30$ ,  $n_1=1,38$ ,  $n_2=2,30$ ,  $n=1,52$ ,  $q=2$ . La construction continue à être valable au delà de la phase critique (arc  $M_cB$ ) à condition de remplacer  $\sin \theta \cotg q\theta$  par la forme hyperbolique correspondante.

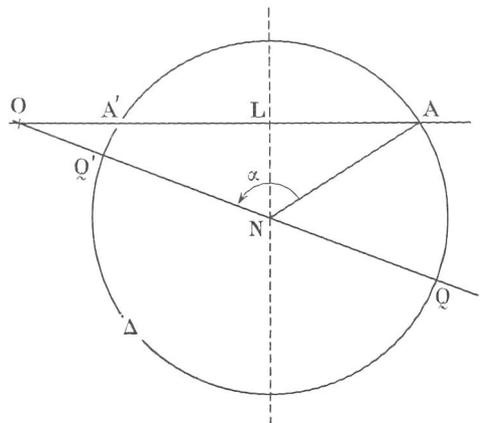


FIG. 9

**2. Enveloppes des courbes  $|r_q(\varphi)|$ .**  
 — Pour chaque valeur de  $\varphi$ ,  $|r_q|$  reste

compris entre deux valeurs extrêmes OQ et OQ', Q et Q' étant sur le diamètre ON du cercle Δ(φ) [fig. 9]. Donc, si nous traçons les courbes  $\overline{OQ} = E(\varphi)$  et  $\overline{OQ'} = E'(\varphi)$  en fonction de φ, nous voyons que les courbes  $|r_q(\varphi)|$  se placeront entre ces deux courbes et leur seront tangentes en un certain nombre de points. Si nous considérons q comme un paramètre pouvant prendre des valeurs quelconques, les courbes E(φ) et E'(φ) seront les enveloppes du faisceau de courbes  $|r_q(\varphi)|$ . Bien que q ne puisse prendre que des valeurs entières, nous garderons à E(φ) et E'(φ) le nom d'enveloppes.

La courbe E(φ) est toujours croissante et varie de r<sub>0</sub> ou de r'<sub>0</sub> à l'unité lorsque φ varie de 0 à φ<sub>0</sub>. La valeur initiale est r<sub>0</sub> ou r'<sub>0</sub> suivant que r<sub>0</sub> est supérieur ou inférieur à r'<sub>0</sub>. Dans le cas de la figure, OQ = OA = r<sub>0</sub> pour φ = 0, puisque  $|r_0| > |r'_0|$ .

La courbe E' se déduit immédiatement de E puisque

$$(79) \quad \overline{OQ} \cdot \overline{OQ'} = \overline{OA} \cdot \overline{OA'} = r_0 r'_0 = \text{Cte.}$$

On obtient l'expression analytique de ces enveloppes en écrivant

$$OQ = ON + NA.$$

et en remplaçant ON et NA par leurs valeurs  $\sqrt{OL^2 + LN^2}$  et  $\sqrt{AL^2 + LN^2}$ . On obtient

$$(80) \quad \begin{aligned} OQ &= \sqrt{\left(\frac{r_0 + r'_0}{2}\right)^2 + h^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} + \sqrt{\left(\frac{r_0 - r'_0}{2}\right)^2 + h^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} , \\ OQ' &= \sqrt{\left(\frac{r_0 + r'_0}{2}\right)^2 + h^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} - \sqrt{\left(\frac{r_0 - r'_0}{2}\right)^2 + h^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} . \end{aligned}$$

**3. Points de contact avec les enveloppes.** — Il y a contact avec les enveloppes lorsque M se trouve sur le diamètre ON. Désignons par α l'angle  $\widehat{ANO}$ . Les points de contact avec l'enveloppe inférieure sont définis par  $2\gamma = \alpha$ , les autres par  $2\gamma = \alpha + \pi$ .

Nous devons donc déterminer φ tel que

$$(81) \quad \begin{aligned} \rho' \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} &= u' \operatorname{tg} \varphi + \frac{2 \sin \theta}{\sin 2 \varphi} \operatorname{cotg} q\theta \quad \text{pour l'enveloppe inférieure,} \\ - \rho' \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} &= u' \operatorname{tg} \varphi + \frac{2 \sin \theta}{\sin 2 \varphi} \operatorname{cotg} q\theta \quad \text{pour l'enveloppe supérieure.} \end{aligned}$$

L'angle α se calcule immédiatement : on voit sur la figure que

$$(82) \quad \alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{LA}{LN} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{OL}{LN} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{r_0 - r'_0}{2h \operatorname{tg} \varphi} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{r_0 + r'_0}{2h \operatorname{tg} \varphi} .$$

Quant à la résolution des équations (81), elle se fait graphiquement en déterminant l'intersection des courbes

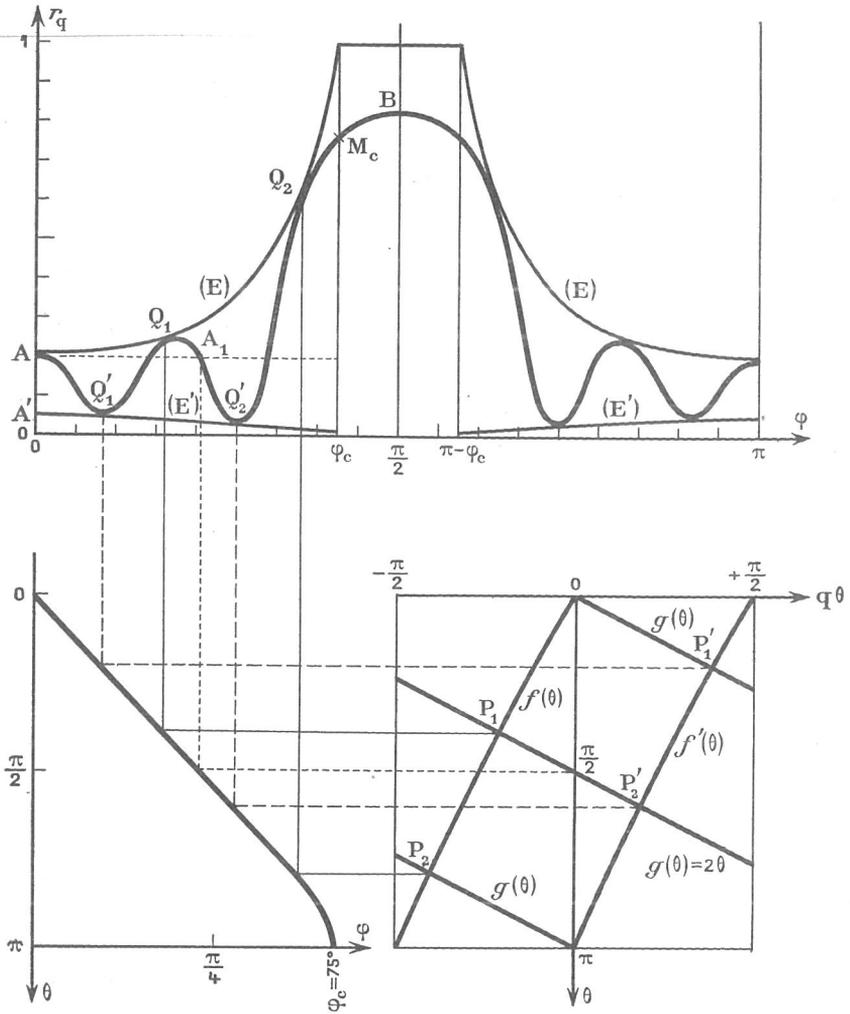


FIG. 10

$$f'(\theta) = \text{arc cotg} \left[ \frac{\sin 2\varphi}{2 \sin \theta} \left( \nu' \text{cotg} \frac{\alpha}{2} + u' \text{tg} \varphi \right) \right],$$

(83)

$$g(\theta) = \varphi\theta + 2k\pi.$$

On passe ensuite facilement de  $\theta$  à  $\varphi$ .

La même méthode donnera les points de contact avec l'enveloppe supérieure après tracé de la fonction

$$f(\theta) = \text{arc cotg} \left[ \frac{\sin 2\varphi}{2 \sin \theta} \left( -\nu' \text{tg} \frac{\alpha}{2} - u' \text{tg} \varphi \right) \right].$$

(84)

Pour les valeurs usuelles des indices, les fonctions  $f(\theta)$  et  $f'(\theta)$  sont particulièrement faciles à calculer. En effet, pour  $n_1 = 1,38$ ,  $n_2 = 2,3$ ,  $n = 1,52$ ,  $1 < n_0 < 2,3$  et tant que l'on n'est pas trop près de la phase critique,  $\sin 2\varphi/\sin \theta$  varie de 0,97 à 1,08, donc reste très voisin de 1,  $u'$  est de l'ordre de 0,1, de sorte que  $u' \operatorname{tg} \varphi$  peut être négligé devant  $\varphi' \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}$ . Comme  $\varphi'$  reste très voisin de 2, nous aurons finalement

$$(85) \quad f'(\theta) \simeq \frac{\alpha}{2} \quad \text{et} \quad f(\theta) \simeq \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2}.$$

Cela signifie aussi que, dans le même domaine de valeurs de  $\varphi$ , le point M tourne autour de N en faisant avec NA un angle  $2\gamma$  peu différent de  $2q\theta$ . Le tracé de la courbe  $r_q(\varphi)$  en est considérablement facilité.

La figure 10 représente le tracé complet de la courbe  $r_q(\varphi)$  pour  $n_0 = 2,30$ ,  $n_1 = 1,38$ ,  $n_2 = 2,30$ ,  $n = 1,52$ ,  $q = 2$ .

Deux figures auxiliaires donnant  $f(\theta)$  et  $g(\theta)$  d'une part,  $\theta(\varphi)$  d'autre part, illustrent la méthode de détermination des points de contact de  $|r_q|$  avec les enveloppes. Nous remarquerons que ces points de contact  $Q_1, Q'_1, Q'_2$  restent très voisins des maxima et minima de  $|r_q|$ , sauf le dernier point de contact  $Q_2$  avec l'enveloppe supérieure, qui correspond à la valeur de  $\varphi$  la plus voisine de la phase critique. Remarquons aussi que les intersections de  $g(\theta)$  avec l'axe des  $\theta$  (ici  $\pi/2$ ) correspondent toujours aux valeurs de  $|r_q|$  égales à  $r_0$  ( $A_1$  sur la figure).

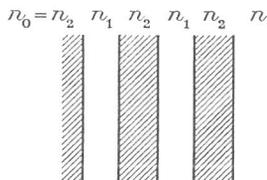


FIG. 11 a

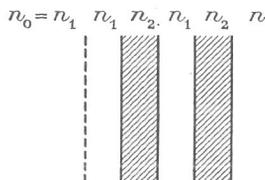
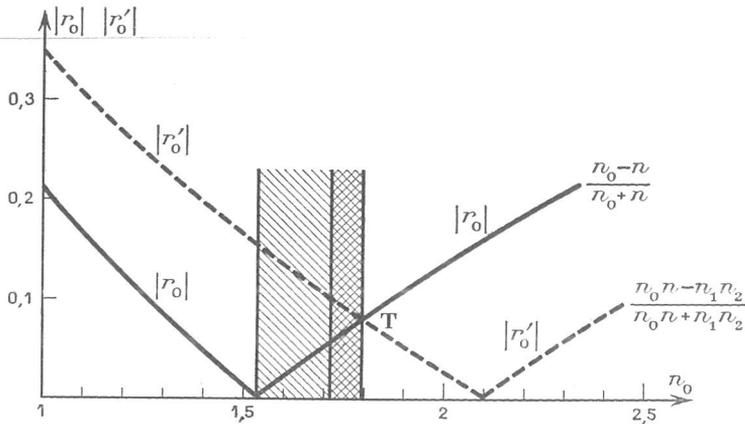


FIG. 11 b

**4. Minima et maxima de la fonction  $|r_q(\varphi)|^2 = R_q(\varphi)$ .** — Nous venons de voir que la détermination des points de contact de  $r_q$  avec ses enveloppes était plus facile que celle des maxima ou des minima qui leur sont très voisins, à une exception près. Cependant, dans les deux cas  $n = n_0$  et  $n_0 n_1 = n_1 n_2$ , les minima, qui sont nuls, correspondent aux points de contact avec l'enveloppe inférieure, ce qui est d'ailleurs géométriquement évident. Pour  $n = n_0$ ,  $f'(\theta)$  reste identiquement nul et les valeurs de  $\theta$  déterminant les minima sont immédiates :  $\theta = k\pi/q$ . L'origine  $\varphi = 0$  correspond alors à un minimum. Pour  $n_0 n = n_1 n_2$ , il nous faut tracer la courbe  $f'(\theta)$  comme pour une valeur quelconque de  $n_0 n$ ; les valeurs de  $\theta$  pour lesquelles il y a un minimum ne sont pas simples. L'origine correspond à un maximum. Lorsque  $\varphi$  varie de 0 à  $\pi$ , le point M décrit  $2q$  révolutions (cf. fig. 8). Si l'origine  $\varphi = 0$  correspond à un maximum (cas  $n_0 n = n_1 n_2$ ) nous avons dans cet intervalle  $2q$  maxima et  $2q$  minima; si au contraire l'origine est un minimum, la courbe ne

FIG. 12. —  $n_1 = 1,38$  ;  $n_2 = 2,30$  ;  $n = 1,52$ .

présentera que  $(2q - 1)$  maxima et minima. Ce résultat se comprend aisément si nous considérons les deux cas  $n_0 = n_2$  et  $n_0 = n_1$  représentés sur les figures 11a et 11b. Pour  $n_0 = n_2 = 2,30$ , la courbe  $|r_q(\varphi)|^2$  comprendra 4 maxima, autant que de couches élémentaires. Au contraire, faire  $n_0 = n_1$  revient à supprimer une surface de séparation de facteur de réflexion  $r = (n_1 - n_2)/(n_1 + n_2)$ , c'est-à-dire une couche ; la courbe  $|r_q(\varphi)|^2$  ne comportera plus alors que 3 maxima, un de moins que le nombre de couches élémentaires. Il est maintenant intéressant de connaître la valeur limite de  $n_0$  séparant le domaine pour lequel l'origine est un maximum de celui pour lequel l'origine est un minimum. Pour cela, nous avons tracé sur la figure 12 en fonction de  $n_0$  les courbes  $|r_0(n_0)|$  et  $|r'_0(n_0)|$  qui nous donnent les positions des points A et A', origines des enveloppes.

Comme la courbe  $|r_q(\varphi)|$  part toujours du point A d'ordonnée  $r_0$ , il ne peut y avoir d'ambiguïté pour  $n_0 < 1,52$ , auquel cas l'origine est toujours un minimum. De même, pour  $n_0 > 2,09$  ( $r'_0 = 0$ ), l'origine donne toujours un maximum.

On serait tenté de penser que l'apparition d'un maximum à l'origine se produit pour le point T tel que  $|r_0| = |r'_0|$ , les deux enveloppes ayant alors la même valeur pour  $\varphi = 0$ . Ce point T correspond à

$$(86) \quad \frac{n - n_0}{n + n_0} = \frac{n_0 n - n_1 n_2}{n_0 n + n_1 n_2},$$

soit

$$\sqrt{n_1 n_2} = n.$$

Cependant, l'étude graphique des points de contact de  $|r_q(\varphi)|$  avec l'enveloppe inférieure nous montre que, pour les valeurs relatives des indices choisies, l'apparition du maximum se produit entre  $n_0 = n$  et  $n_0 = \sqrt{n_1 n_2}$  (région hachurée sur la figure 12).

Cette étude peut être conduite de la manière suivante : on trace le réseau de courbes  $f'(0)$  pour différentes valeurs de  $n_0$  et on cherche les intersections avec

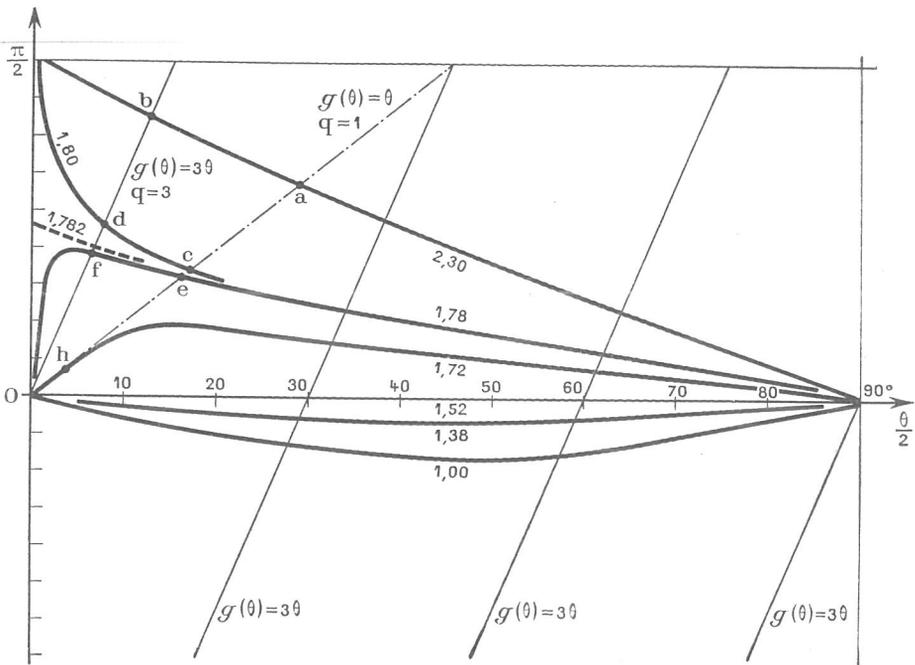


FIG. 13

$g(\varphi) = q\varphi$ . Les abscisses des intersections donnent les valeurs de  $\theta$  correspondant aux points de contact de  $|r_q(\varphi)|$  avec l'enveloppe inférieure. On opère de la même manière à l'aide du réseau  $f(\theta)$  pour l'enveloppe supérieure.

Sur la figure 13, on a tracé les courbes  $f'(\theta)$  pour les valeurs

$$n_0 = 1,00 ; 1,38 ; 1,52 ; 1,72 ; 1,78 ; \sqrt{n_1 n_2} = 1,782 ; 1,80 ; 2,30.$$

Pour  $n_0 > \sqrt{n_1 n_2}$  (ici courbes 1,80 et 2,30),  $g(\theta)$  ne coupe jamais  $f'(\theta)$  à l'origine quelle que soit la valeur de  $q$  (points a, b, c, d, fig. 13), ce qui signifie que l'origine est toujours un maximum. De même pour  $n_0 \leq n$  (ici courbes 1,52 ; 1,38 et 1,00), il n'y a pas d'ambiguïté.

Considérons maintenant  $f'(\theta)$  pour  $n < n_0 < \sqrt{n_1 n_2}$  ; nous pouvons nous trouver dans deux cas différents pour une valeur donnée de  $n_0$  suivant le nombre  $q$  de doubles couches considérées. En effet, si nous prenons pour exemple la courbe 1,78, nous voyons que la première intersection e de  $g(\theta) = q\theta$  avec  $f'(\theta)$  pour  $q = 1$  s'est déplacée en f pour  $q = 3$  et que, pour  $q$  assez grand, le point f sera venu en O. On en conclut que, pour les faibles valeurs de  $q$ , l'origine est un maximum ; pour les valeurs élevées,  $\varphi = 0$  correspond à un minimum. Le passage entre les deux cas s'effectue pour  $g(\theta)$  tangente à  $f'(\theta)$  à l'origine. C'est approximativement le cas pour une seule double couche  $q = 1$  et  $n_0 = 1,72$  sur la figure 13 (le point

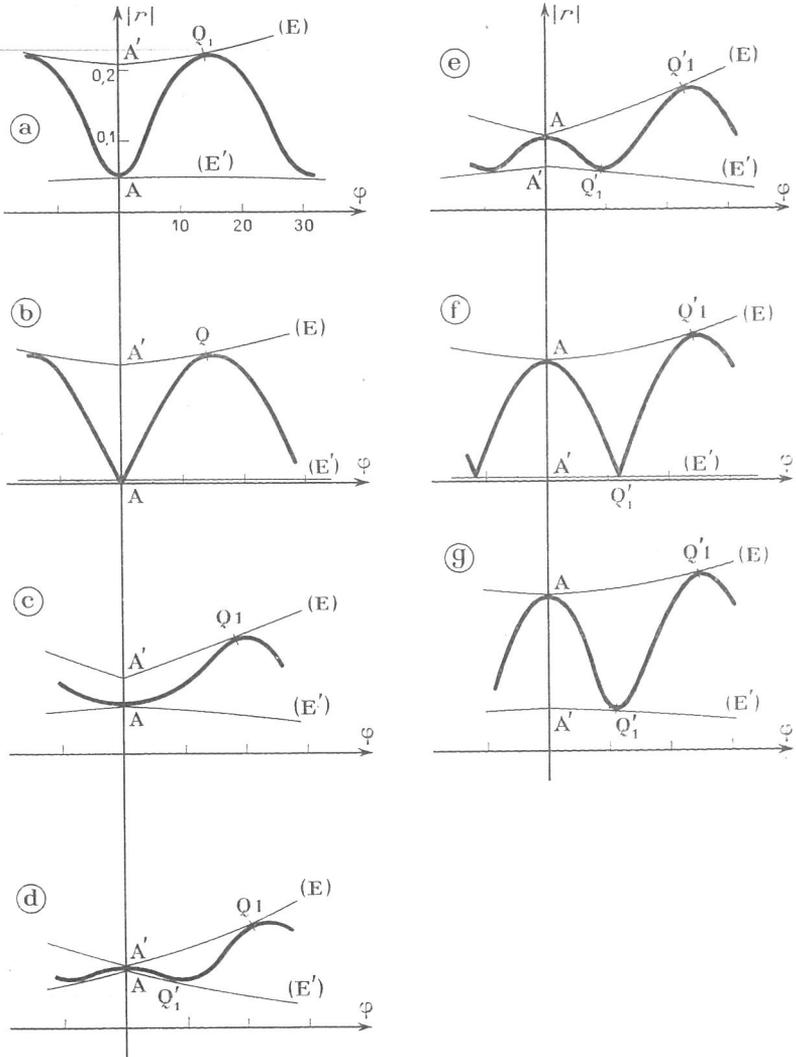


FIG. 14. — a)  $n_0 = 1$ ; b)  $n_0 = 1,52$ ; c)  $n_0 = 1,72$ ; d)  $n_0 = \sqrt{n_1 n_2} = 1,782$ ; e)  $n_0 = 1,85$ ; f)  $n_0 = 2,10$ ; g)  $n_0 = 2,30$ .

d'intersection  $h$  est très rapproché de l'origine). Les courbes 14 a, b, c, d, e, f, g, montrent bien les variations de forme de  $|r_q(\varphi)|$  quand  $n_0$  varie de 1 à 2,30.

Nous avons préféré porter  $|r_q(\varphi)|$  en ordonnées au lieu de  $R_q = |r_q|^2$  pour des raisons d'échelle. Il ne faut pas s'étonner des points anguleux sur l'axe des  $\varphi$  sur les figures b et f qui correspondent aux minima nuls; si nous avions porté la valeur algébrique de  $r_q$  au lieu de sa valeur absolue, nous aurions eu une courbe traversant l'axe des  $\varphi$  sans point anguleux (la phase subit une discontinuité de  $\pi$ ). Les figures c, d, e montrent le passage critique pour les valeurs

$$n_0 = 1,72 < \sqrt{n_1 n_2} \quad , \quad n_0 = 1,782 = \sqrt{n_1 n_2}$$

et

$$n_0 = 1,85 > \sqrt{n_1 n_2}$$

**5. Propriétés des phases**  $\psi_q = \arg r_q$ . — a) *Etude qualitative.* Si nous reprenons la construction graphique de  $r_q$  nous voyons que la phase  $\gamma_q$  oscille autour d'une valeur moyenne lorsque A et A' d'abscisses  $r_0$  et  $r'_0$  sont du même côté de O (fig. 15 et 16).

Si A et A' sont de part et d'autre de O, OM décrit par exemple (fig. 17 et 18)  $2q$  révolutions autour de O quand  $\varphi$  varie de 0 à  $2\pi$ . C'est alors la fonction  $\psi - 2q\varphi$  qui oscille autour d'une valeur fixe, ce qui revient à dire qu'on prend un nouveau plan de référence pour les phases, situé à une distance  $2q \lambda_0/4$  du plan de la face d'entrée. Ce nouveau plan est ici la face de sortie. Nous pourrions donc toujours nous ramener à un cas où la phase conserve une valeur moyenne constante par un choix convenable du plan de référence comme le montre la discussion suivante.

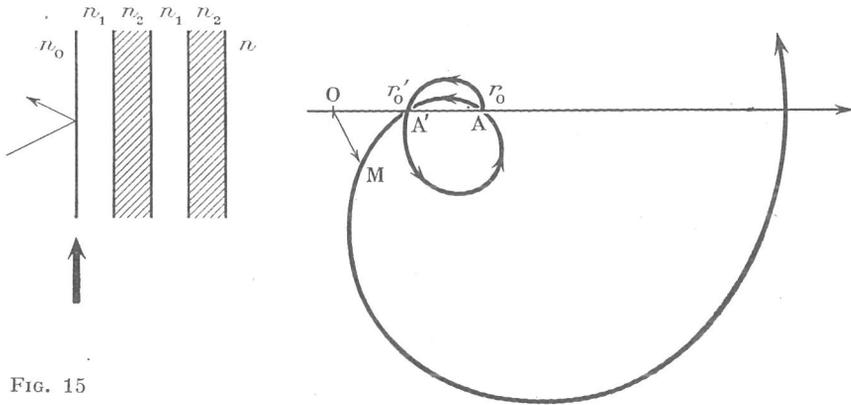


FIG. 15

$$(I) \quad r_0 = \frac{n_0 - n}{n_0 + n} \rightarrow n_0 > n,$$

$$r'_0 = \frac{n_0 n - n_1 n_2}{n_0 n + n_1 n_2} \rightarrow n_0 n > n_1 n_2 \text{ et par suite } > n_0 \sqrt{n_1 n_2}.$$

$\vec{r}_q(\varphi)$  présente  $2q$  ou  $2q - 1$  lobes suivant que  $n > \sqrt{n_1 n_2}$  ou  $n < \sqrt{n_1 n_2}$  mais, dans tous les cas, la phase oscille autour d'une valeur moyenne nulle puisque la courbe est symétrique par rapport à l'axe des  $x$  et que O est à l'extérieur de la courbe fermée. Ceci revient à dire que la face d'entrée, prise comme plan de référence dans notre calcul, impose la phase moyenne. L'interprétation physique est évidente quand  $n_0$  prend des valeurs élevées  $n_0 > n_2$ , la face d'entrée constitue en effet dans ce cas la surface de séparation de facteur de réflexion maximum. Ce cas correspond encore à une face d'entrée semi-argentée.

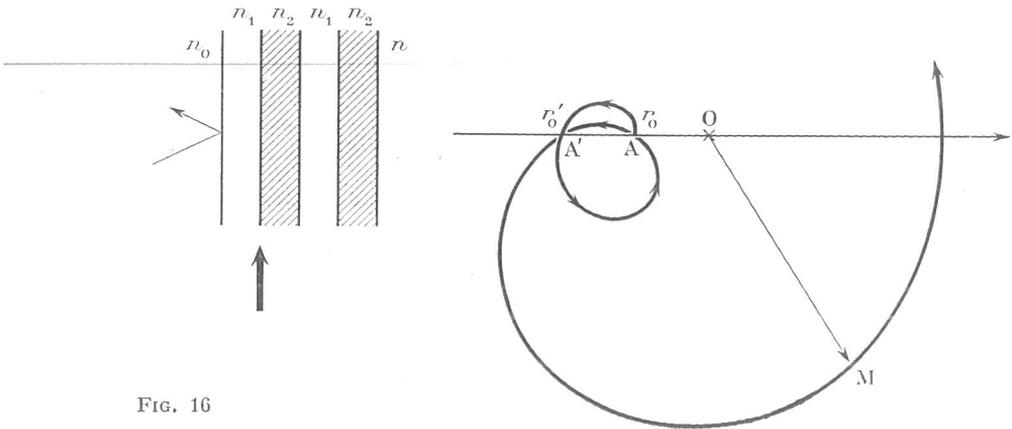


FIG. 16

(II)  $r_0 < 0 \rightarrow n_0 < n,$   
 $r'_0 < 0 \rightarrow n_0 n < n_1 n_2.$

$\vec{r}_q(\varphi)$  comporte  $2q$  ou  $2q - 1$  lobes suivant que  $|r_0|$  est inférieur ou supérieur à  $|r'_0|$  mais, de toute façon, un seul lobe fait le tour de l'origine; la phase moyenne varie donc de  $2\pi$  quand  $\varphi$  varie de  $0$  à  $2\pi$ , ce qui signifie que  $(\psi - \varphi)$  conserve une valeur moyenne constante. Le plan de référence correspondant est constitué par la face médiane de la double couche d'entrée.

Ce résultat cadre bien avec le cas particulier simple :

$q = 1, n_0 = n_1, n_2 = n$ ; il ne reste plus alors qu'une seule surface de séparation  $n_1/n_2$  et nous trouvons bien une phase moyenne constante en la prenant comme plan de référence.

(III)  $r_0 > 0 \rightarrow n_0 > n$   
 $r'_0 < 0 \rightarrow n_0 n < n_1 n_2$  } d'où  $n < \sqrt{n_1 n_2}, n_0 < n_1 n_2.$

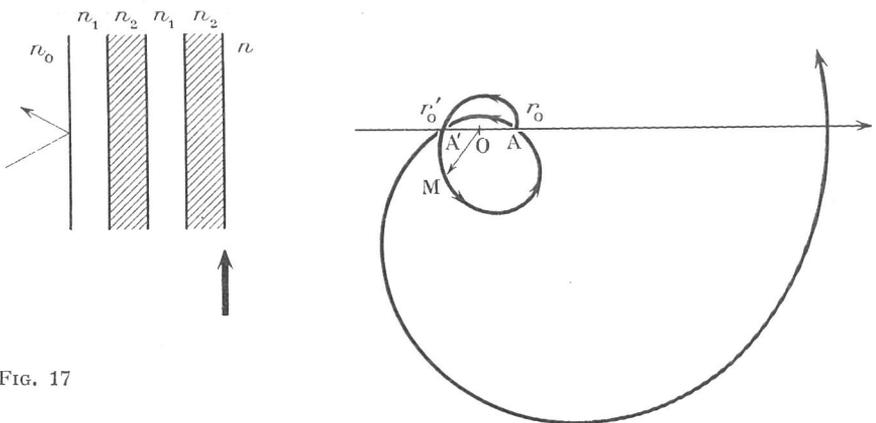


FIG. 17

$\vec{r}_q(\varphi)$  présente toujours  $2q$  lobes autour de l'origine; l'angle  $\psi_q = 2q\varphi$  conserve une valeur moyenne constante. La face de sortie impose la phase moyenne. On pourrait s'étonner de n'avoir ce résultat que pour  $n$  très petit, inférieur à  $\sqrt{n_1 n_2}$ , mais nous devons remarquer que, si  $n$  est très grand c'est-à-dire supérieur à  $n_2$ , le changement de phase à la réflexion sur la face de sortie devient le même que pour la face médiane  $n_1/n_2$  de la dernière double couche, l'alternance haut indice-bas indice n'étant plus respectée. Le plan de phase moyenne constante est alors reporté sur cette face médiane comme nous allons le retrouver dans le cas IV.

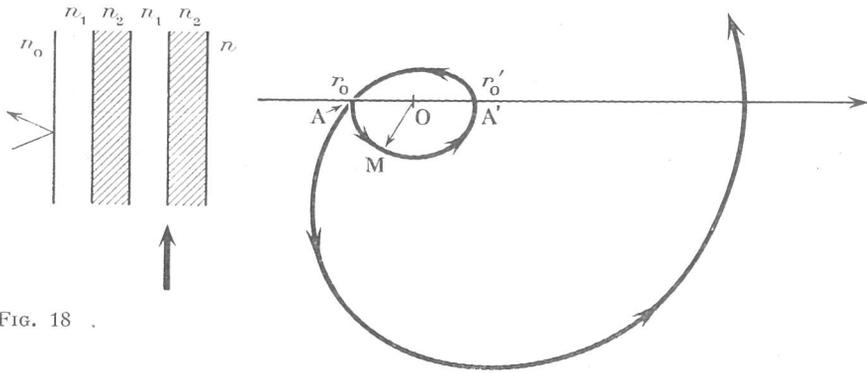


FIG. 18

(IV)

$$r_0 < 0 \rightarrow n_0 < n$$

$$r'_0 > 0 \rightarrow n_0 n > n_1 n_2$$

$\vec{r}_q(\varphi)$  comporte toujours  $2q - 1$  lobes autour de l'origine. Le plan de phase moyenne constante est la face médiane de la double couche.

On peut vérifier ce résultat en prenant  $n_0 = n_1, n_1 = n_2, q = 1$ ; on retrouve le cas limite de la simple face de séparation entre les deux milieux d'indices  $n_1$  et  $n_2$  comme nous l'avons montré en (II) pour  $r_0 < 0, r'_0 = 0$ .

b) *Etude quantitative.* Nous traiterons seulement le cas (I) où la phase oscille autour d'une valeur constante, puisque nous venons de montrer que les autres cas s'y ramènent par un changement convenable de plan de référence.

Reprenons la construction graphique de  $r_q$ ; le point M décrivant les cercles  $\Delta$ , pour chaque valeur de  $\varphi$  la phase  $\psi_q$  oscille entre deux valeurs limites  $\Psi$  et  $\Psi'$  obtenues en menant de O les tangentes OF' et OF à  $\Delta$  (fig. 19).

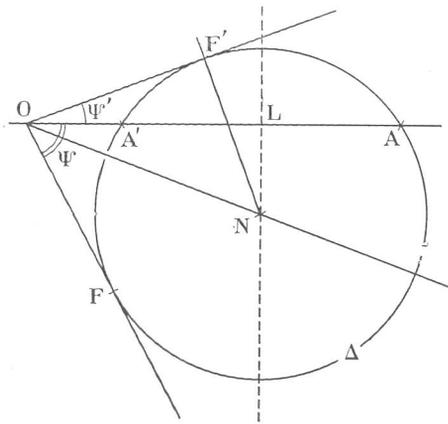


FIG. 19

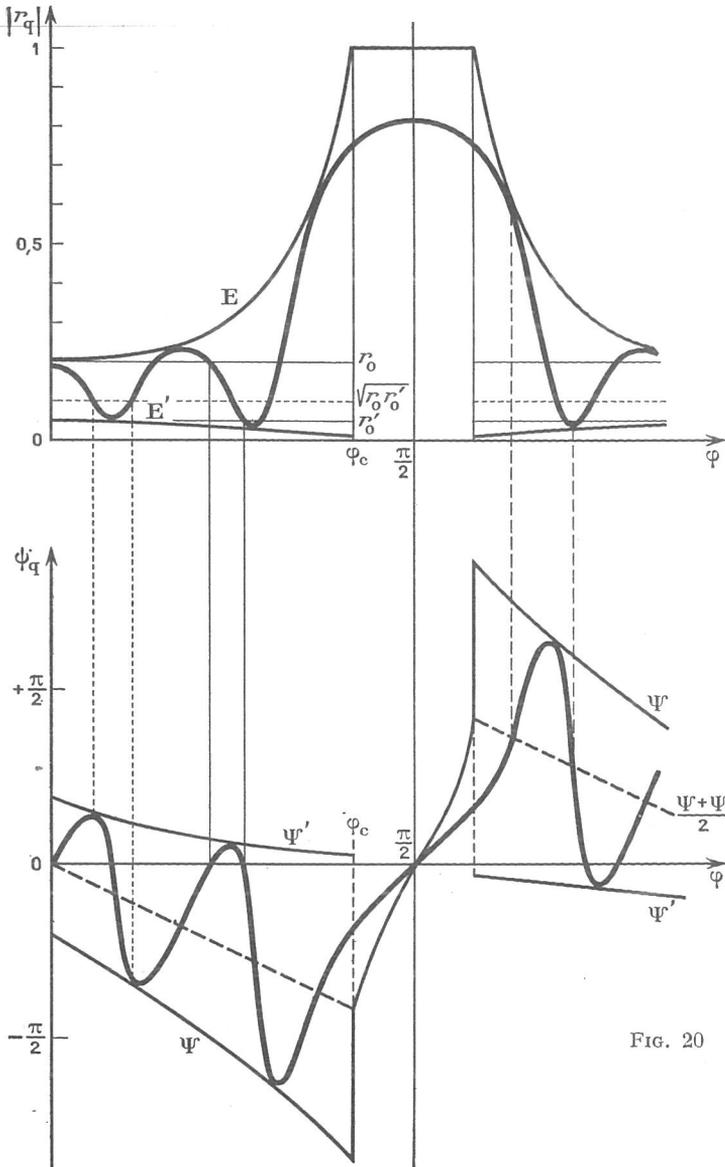


FIG. 20

Il est facile de voir que les deux courbes  $\Psi(\varphi)$  et  $\Psi'(\varphi)$  sont tangentes extérieurement à toutes les courbes  $\psi_q(\varphi)$  quel que soit  $q$ .

La branche  $\Psi'$  se termine par un point singulier pour  $\varphi = \varphi_c$ . Quant à l'enveloppe  $\Psi$ , elle se poursuit, après une discontinuité pour  $\varphi = \varphi_c$  par une courbe limite qui passe par 0 pour  $\varphi = \pi/2$  (voir fig. 20).

L'examen de la construction graphique (fig. 19) met en évidence des correspon-

dances simples entre la courbe des amplitudes  $|r_q(\varphi)|$  et celle des phases  $\psi_q(\varphi)$  :

a)  $\Psi$  et  $\Psi'$  se déduisent facilement de E et E' ; en effet

$$\frac{\Psi + \Psi'}{2} = \widehat{LON},$$

$$(87) \quad \operatorname{tg} \frac{\Psi + \Psi'}{2} = \frac{LN}{OL} = \frac{2h \operatorname{tg} \varphi}{r_0 + r'_0} = \frac{n_0(n_1 - n_2)}{n_0^2 - n_1 n_2} \operatorname{tg} \varphi,$$

$$(88) \quad \cos \frac{\Psi - \Psi'}{2} = \frac{FO'}{ON} = \frac{2\sqrt{OQ \cdot OQ'}}{OQ + OQ'} = \frac{2\sqrt{E \cdot E'}}{E + E'}$$

b) La courbe des phases  $\psi_q(\varphi)$  touche son enveloppe en un point qui correspond à F' ; or  $OF' = \sqrt{OA \cdot OA'} = \sqrt{r_0 r'_0} = \text{Cte.}$

Les contacts de  $\psi_q$  et de ses deux enveloppes se produisent donc pour les valeurs de  $\varphi$  telles que  $r_q = \sqrt{r_0 r'_0} = \sqrt{E \cdot E'}$ .

c)  $\psi_q = 0$  ou  $\pi$  chaque fois que M passe en A et en A'.

Autrement dit, toutes les fois que  $\psi_q$  passe par 0 ou  $\pi$ ,  $r_q$  prend une des valeurs  $r_0$  ou  $r'_0$ .

Cet ensemble de propriétés permet de tracer facilement la courbe des phases  $\psi_q$  connaissant celle des amplitudes  $|r_q|$ , comme l'illustre la figure 20.

### Conclusion.

Les résultats que nous venons d'exposer ont été vérifiés de différentes manières.

D'une part, nous avons constaté l'identité des courbes obtenues avec les valeurs fournies par les méthodes de construction graphique.

D'autre part, nous avons soumis à la vérification expérimentale des couches multiples BH (Cryolithe — SZn) pour  $q = 3$  et  $q = 4$ .

Des ensembles plus complexes du type

Verre — HB HB HB — 2H — BH BH BH — Verre

ont été calculés par la méthode ci-dessus complétée par la méthode de décomposition en étalon de Fabry-Perot déjà exposée par l'un d'entre nous [11]. Les résultats théoriques se sont montrés en bon accord avec l'expérience.

Manuscrit reçu le 20 mars 1953.

### RÉFÉRENCES

- [1] LORD RAYLEIGH, *Proc. Royal Soc.*, t. 86 A, 1912, p. 207.  
F. ABELÈS, *C. R. Ac. Sc.*, t. 223, 1946, p. 891 et 1112.
- [2] P. COTTON et M. PERROT, *Ann. Physique*, t. 20, 1945, p. 585.  
D. CABALLERO, *Jl. opt. Soc. Amer.*, t. 37, 1947, p. 176.  
P. ROUARD, *Ann. Physique*, t. 7, 1937, p. 291.  
A. VASICEK, *Jl. Phys.*, t. 11, 1950, p. 342.
- [3] A. HERPIN, *C. R. Ac. Sc.*, t. 226, 1947, p. 1872.  
F. SCANDONE, *Jl. Phys.*, t. 11, 1950, p. 336.  
D. CANALS FRAU, *Rev. Opt.*, t. 31, 1952, p. 161.
- [4] N. CABRERA, *C. R. Ac. Sc.*, t. 234, 1952, p. 1045 et 1146.
- [5] L. BRILLOUIN, *Wave propagation in periodic structures*, Mac Graw Hill, New-York, 1945.

- [6] M. PARODI, *Memorial Sciences Physiques*, t. 47, 1944.  
 [7] L. BRILLOUIN, *Jl Phys.*, t. 7, 1936, p. 401.  
 [8] F. ABELÈS, Thèse, Paris, 1949.  
 [9] A. HERPIN, *C. R. Ac. Sc.*, t. 225, 1947, p. 182.  
 [10] C. DUFOUR & A. HERPIN, *Jl Phys.*, t. 13, 1952, p. 88  
 [11] C. DUFOUR, *Rev. Opt.*, t. 31, 1952, p. 1.

## BIBLIOGRAPHIE

**Bulletins et mémoires de la Société française d'Ophtalmologie, 65<sup>e</sup> année**, un volume broché de xcvi-448 p. (25 × 16,5 cm), illustré de nombreuses figures, Masson, Paris, 1952.

Ce volume contient les rapports présentés aux séances des 22, 23, 24, 25 et 26 juin 1952 de la Société française d'Ophtalmologie. Parmi les très nombreux rapports, signalons en particulier ceux qui concernent l'étude statistique du champ visuel dans les affections neurochirurgicales par L. Guillaumat & A. Robin, le papillotement de l'éclairage fluorescent par R. Hermans, le test rouge-vert de Lancaster par R. Hugonnier, le strabisme par A. Fritz. Signalons aussi l'intéressante discussion du rapport de A. Dubois-Poulsen sur le Champ visuel, rapport qui constitue à lui seul un ouvrage très complet publié à part.

**Vision through the Atmosphere**, par W.E.KNOWLES MIDDLETON, physicien aux National Research Laboratories, Canada, un volume relié de xvi-250 p. (25 × 17 cm), illustré de 106 fig. et 2 pl. hors-texte. University of Toronto Press, Toronto, 1952 et (G. Cumberlege) Oxford University Press, London (68 sh.).

Nous avons maintes fois résumé les travaux originaux de l'auteur dans le domaine de l'Optique météorologique, dont il est l'un des spécialistes le plus estimé. La liste des chapitres précisera les sujets traités : Introduction ; Photométrie élémentaire ; Absorption de la lumière dans l'atmosphère ; Atténuation du contraste par l'atmosphère ; Propriétés importantes de l'œil ; Limites de visibilité en lumière naturelle ; Limites de visibilité des sources de lumière et des objets éclairés en lumière artificielle ; Couleur des objets éloignés et limites de visibilité des objets colorés ; Instruments pour la mesure des limites de visibilité ; Problèmes météorologiques spéciaux. Une nouvelle science visuelle (Conclusion). Une ample bibliographie (plus de 400 références) complète heureusement cet excellent Traité et n'oublie pas les auteurs français comme le font souvent les bibliographies américaines. La présentation matérielle est excellente ; les nombreuses tables (méthodique, alphabétique, figures) facilitent grandement la recherche d'un renseignement.

**Photographie ultrarapide et cinématographie à grande fréquence**, par M. DÉRIBÉRÉ, Ingénieur E.B.P., chef de Laboratoire à la Compagnie des Lampes, un volume broché de 128 p. (18,5 × 13,5 cm), illustré de 84 fig., Ed. L.E.P.S., Paris, 1953 (450 F).

La photographie ultrarapide et la cinématographie à grande fréquence prennent aujourd'hui une place importante dans les techniques les plus diverses. Mr Déribéré en décrit clairement dans son petit livre les diverses modalités de réalisation et en expose d'une façon simple les applications.