Доклады Академии Наук СССР
1944. Том XLIV, № 4

ГИДРОДИНАМИКА

Л. ЛАНДАУ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТАНГЕНЦИАЛЬНЫХ РАЗРЫВОВ В СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

(Представлено академиком П. Л. Капица 26 I 1944)

Как известно, уравнения гидродинамики допускают принципиально существование поверхностей разрывов двух типов: ударных волн и так называемых тангенциальных разрывов, в которых испытывает скачок касательная к поверхности компонента скорости (а также, вообще говоря, температура) при непрерывном давлении. Известно также, что в несжимаемой жидкости тангенциальные разрывы неустойчивы по отношению к бесконечно малым возмущениям и потому не могут реально осуществляться. В настоящей работе мы ставим себе цель — доказать, что при достаточно больших скачках скорости в разрыве, когда жидкость должна рассматриваться как сжимаемая, тангенциальные разрывы оказываются устойчивыми по отношению к бесконечно малым возмущениям.

Рассмотрим плоскую поверхность тангенциального разрыва (ее плоскость выбираем в качестве плоскости xy). Пусть $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ есть скорости жидкости по обе стороны разрыва, направленные касательно к его плоскости. Без ограничения общности можно считать, что одна из них равна нулю; этого всегда можно добиться соответствующим определением системы координат. Пусть, например, $\vec{v}_1 = 0$, а $\vec{v}_2$ обозначим просто как $\vec{v}$; направление $\vec{v}$ выбираем в качестве направления оси x.

Следуя обычному методу определения устойчивости по отношению к бесконечно малым возмущениям, накладываем на основное движение возмущение, в котором все величины зависят от времени и координаты x посредством множителя $e^{-i\omega t + ikx}$. Рассмотрим газ с той стороны ($z > 0$) поверхности разрыва, на которой $\vec{v}_1 = 0$. Для возмущения p_1' давления имеет место (как и при всяком малом возмущении в неподвижной жидкости) волновое уравнение

$$\Delta p_1' - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 p_1'}{\partial t^2} = 0,$$

где c_1 — скорость звука в жидкости 1. Ищем p_1' в виде

$$p_1' = \mathrm{const}\cdot e^{-i\omega t + ikx + i\varkappa_1 z} \tag{1}$$

(если $\varkappa_1$ комплексно, то оно должно быть выбрано так, чтобы мнимая часть была положительна). Волновое уравнение приводит к соотношению

$$\frac{\omega^2}{c_1^2} = k^2 + \varkappa_1^2 \tag{2}$$

между ω, k и $\varkappa_1$. Далее, для возмущения скорости v_{1z}' имеем согласно уравнению Эйлера (отбрасывая в нем члены высших порядков):

$$\frac{\partial v_{1z}'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p_1'}{\partial z}.$$

Вместе с (1) это дает

$$v_{1z}' = \frac{\varkappa_1 p_1'}{\omega \rho_1}. \tag{3}$$

Пусть $\zeta = \zeta(x, t)$ есть смещение вдоль оси z точек поверхности разрыва при возмущении. Имеем, очевидно, $\partial\zeta/\partial t = v_{1z}'|_{z=0}$. Если искать ζ в виде $\zeta = \mathrm{const}\cdot e^{-i\omega t + ikx}$, то получим $v_{1z} = -i\omega\zeta$, или, подставляя (3):

$$p_1' = -\frac{i\omega^2\rho_1\zeta}{\varkappa_1}. \tag{4}$$

В газе 2 ищем p_2' в виде $p_2' = \mathrm{const}\cdot e^{-i\omega t + ikx - i\varkappa_2 z}$, где мнимая часть $\varkappa_2$ опять положительна; соотношение между ω, k и $\varkappa_2$ не может быть найдено непосредственно из волнового уравнения, так как последнее справедливо только в неподвижной как целое среде. Если, однако, перейти от системы координат x, y, z к системе $x' = x - vt$, $y' = y$, $z' = z$, то в этой новой системе газ 2 будет покоиться и волновое уравнение применимо. Для p_2' имеем в этих координатах $p_2' = \mathrm{const}\cdot e^{-i\omega t + ikvt}\, e^{ikx' - i\varkappa_2 z'}$, и волновое уравнение дает

$$\frac{(\omega - kv)^2}{c_2^2} = k^2 + \varkappa_2^2. \tag{5}$$

Вместо (4) имеем здесь

$$p_2' = \zeta\frac{i(\omega - kv)^2\rho_2}{\varkappa_2}. \tag{6}$$

На поверхности разрыва давление должно быть непрерывным, т. е. $p_1' = p_2'$. Приравнивая (4) и (6), получаем

$$\frac{\rho_1\omega^2}{\varkappa_1} + \frac{\rho_2(\omega - kv)^2}{\varkappa_2} = 0. \tag{7}$$

Исключая $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ из уравнений (2), (5) и (7), получим следующее уравнение, определяющее «частоты» ω:

$$\frac{1}{c_1^2\rho_1^2}\,\frac{\dfrac{\omega^2}{k^2} - c_1^2}{\dfrac{\omega^4}{k^4}} = \frac{1}{c_2^2\rho_2^2}\,\frac{\left(\dfrac{\omega}{k} - v\right)^2 - c_2^2}{\left(\dfrac{\omega}{k} - v\right)^4}. \tag{8}$$

Это уравнение шестой степени имеет, при достаточно больших v, шесть действительных корней. В этом легко убедиться путем простого геометрического построения, заметив, что корни уравнения (8) представляют собой точки пересечения кривой

$$\eta = \frac{1}{c_1^2\rho_1^2}\,\frac{\xi^2 - c_1^2}{\xi^4}$$

с другой кривой такого же вида, смещенной относительно первой вдоль оси ξ на расстояние v. Таким образом, всегда существует такое значение v_k скорости v, что при $v > v_k$ все частоты ω действительны, так что основное движение устойчиво.

Значение v_k можно легко вычислить для разрывов в газе, который можно считать идеальным с независящей от температуры теплоемкостью. Для идеального газа $c^2 = \gamma\frac{p}{\rho}$; поскольку давления с обеих сторон разрыва одинаковы, то $c_1^2\rho_1 = c_2^2\rho_2$ ($\gamma = c_p/c_v$ есть отношение теплоемкостей газа; мы считаем, что с обеих сторон разрыва находится одинаковый газ или два различных газа с одинаковым значением γ). Соответственно этому переписываем уравнение (8) в виде:

$$\frac{c_1^2}{\omega^2} - \frac{c_2^2}{(\omega - kv)^2} = k^2\left(\frac{c_1^4}{\omega^4} - \frac{c_2^4}{(\omega - kv)^4}\right).$$

Сокращая на множитель $\frac{c_1^2}{\omega^2} - \frac{c_2^2}{(\omega - kv)^2}$ (и отбрасывая тем самым два заведомо действительных корня уравнения), получим

$$\frac{1}{c_1^2 c_2^2 k^2} = \frac{1}{c_1^2(\omega - kv)^2} + \frac{1}{c_2^2\omega^2}. \tag{9}$$

Это уравнение четвертой степени имеет всегда два действительных корня, а другая пара корней действительна только при v, превышающем некоторое значение v_k; при $v = v_k$ имеется кратный корень. Значение v_k можно получить, исключая ω из уравнения (9) и уравнения, получающегося дифференцированием (9) по ω. В результате получаем:

$$v_k^{2/3} = c_1^{2/3} + c_2^{2/3}. \tag{10}$$

Если температура с обеих сторон разрыва одинакова, то $c_1 = c_2 = c$ и $v_k = 2\sqrt{2}c$.

Значение v_k может быть вычислено также для случая, когда по одну сторону разрыва находится газ, а по другую — жидкость. Считая, что плотность жидкости $\rho_ж$ велика по сравнению с плотностью газа $\rho_г$, получим

$$v_k = \frac{2\rho_ж c_ж^2}{\rho_г c_г}. \tag{11}$$

Это значение, однако, весьма велико и в практических случаях никогда не достигается.

По поводу полученных результатов необходимо сделать следующее общее замечание. Здесь доказана лишь устойчивость разрыва (при достаточно большом скачке скорости в нем) по отношению к бесконечно малым возмущениям. Принципиально может, однако, оказаться, что разрыв остается неустойчивым по отношению к возмущениям конечной амплитуды (подобно тому, как это имеет, например, место для пуазейлевского течения). Это означало бы практическую неустойчивость тангенциальных разрывов и при больших скачках скорости. Об этом свидетельствуют, повидимому, эксперименты, произведенные Я. Б. Зельдовичем и Ю. Б. Харитоном, результаты которых они любезно сообщили автору. Они создавали струю водорода, движущегося со скоростями, бо́льшими, чем предусмотрено формулой (10), рассчитывая, что если соответствующий тангенциальный разрыв устойчив, то струя окажется резко отграниченной от окружающего воздуха, в отличие от обычно получающейся картины турбулентного перемешивания. Этого, однако, не наблюдалось.

Институт физических проблем
Академии Наук СССР

Поступило
26 I 1944