中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

博士学位论文

博弈控制系统及其能控性

作者姓名：张人仁
指导教师：郭雷　研究员
中国科学院数学与系统科学研究院
学位类别：理学博士
学科专业：系统理论
培养单位：中国科学院数学与系统科学研究院

2018 年 **5** 月

Game-Based Control Systems and Controllability

A dissertation submitted to

University of Chinese Academy of Sciences

in partial fulfillment of the requirement

for the degree of

Doctor of Philosophy

in Systems Theory

By

Zhang Renren

Supervisor: Professor Guo Lei

Academy of Mathematics and Systems Science

Chinese Academy of Sciences

May 2018

中国科学院大学

研究生学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文是本人在导师的指导下独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的研究成果。对论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明或致谢。

作者签名：

日　　期：

中国科学院大学

学位论文授权使用声明

本人完全了解并同意遵守中国科学院有关保存和使用学位论文的规定，即中国科学院有权保留送交学位论文的副本，允许该论文被查阅，可以按照学术研究公开原则和保护知识产权的原则公布该论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存、汇编本学位论文。

涉密及延迟公开的学位论文在解密或延迟期后适用本声明。

作者签名：	导师签名：
日　　期：	日　　期：

摘 要

在传统的控制理论框架中, 被控对象是一些满足物理定律的“装置”, 这些“装置”没有自己的利益追求, 比如汽车、飞机以及用于工业控制的设备等. 然而我们面对的许多复杂系统却并非如此, 比如由“人”组成的社会或经济系统以及快速发展的智能控制系统等. 它们的一个共同特点是系统中存在有自身利益追求的“理性个体”. 对这类系统的控制不能直接套用传统的控制理论, 同时这也超出了研究理性个体行为的博弈论的研究范围. 因此将博弈因素恰当的融入到控制理论框架中具有重要意义. 这启发我们提出一种可以研究对有理性个体参与的系统进行控制的理论框架, 它将刻画理性个体行为的博弈模型融入到控制系统中, 从而扩展了控制理论中被控对象的范围. 这使得控制论可以被更加广泛应用到许多复杂系统的调控中, 比如市场的调控、公司管理或对许越来越多的人造智能系统的控制等.

本文提出基于博弈的控制系统并研究了它的能控性. 主要内容如下:

(1) 首次给出了完整的基于博弈的控制系统框架以及纳什均衡能控性定义, 将博弈因素融入到控制理论框架中, 大大拓展了控制理论的研究与应用范围. 基于对有理性个体参与的控制系统的抽象, 我们提出基于博弈的控制系统 (Game-Based Control System, GBCS): 一个上层调控者和多个下层决策个体. 上层调控者作为宏观控制者，它首先给出自己的宏观控制策略, 然后下层决策个体通过选择自己的输入策略来优化各自的目标函数. 因此对于任何给定的宏观策略, 下层决策个体之间形成非合作博弈. 在 GBCS 中, 一个基本的问题是: 调控者能否通过选择适当的宏观策略干预下层决策个体博弈形成的纳什均衡来调控系统的宏观状态? 为了考察这个基本问题, 我们引入了纳什均衡能控性概念. 它是刻画 GBCS 的基本概念, 是进一步研究系统其它控制性质的基础.

(2) 微分博弈可以用来刻画和研究非常广泛而重要的一类系统, 对这类系统的控制构成典型的确定性博弈控制系统, 因此我们建立了这类 GBCS 的数学模型以及能控性的定义. 首先我们给出了一般非线性 GBCS 能控性的刻画, 将 GBCS 能控性问题转化为对应正倒向微分方程的部分能控性问题. 对一般线性时变 GBCS , 我们通过研究相应线性时变正倒向微分方程部分能控性问

题, 给出了 GBCS 能控的充分必要代数秩判定条件. 最后我们给出了线性定常 GBCS 能控性更加简洁的矩阵秩判定.

(3) 由于复杂系统经常会受到内外随机因素等的影响, 因此我们进一步研究了用随机微分方程描述的 GBCS 及其能控性问题. 首先我们给出了一般非线性随机 GBCS 能控性的刻画, 将 GBCS 能控性问题转化为对应正倒向随机微分方程 (FBSDE) 能控性问题. 然后对一般线性时变 GBCS, 我们给出了系统能控的充分必要代数秩判定条件. 最后给出了线性定常随机 GBCS 的能控性的更加简洁的矩阵秩判定. 对于随机 GBCS, 我们需要考虑正倒向随机微分方程, 这是该问题的难点所在.

(4) 不完全信息指某些信息未知或信息不对称, 这种现象无论是在控制系统还是博弈模型中都经常出现, 因此我们引入不完全信息 GBCS. 作为对这个方向的初步探索, 我们考虑了宏观策略未知的不完全信息 GBCS. 针对这种情况, 我们用鲁棒纳什均衡概念来刻画下层决策个体间博弈的均衡结果, 并研究了这类不完全信息 GBCS 的能控性问题.

关键词：非合作博弈，基于博弈的控制系统，纳什均衡，能控性，正倒向微分方程

Abstract

In the traditional control theoretical framework, the plants to be controlled are ”devices” that satisfy the physical laws. These ”devices” do not have their own interests, such as cars, airplanes, and industrial control equipment. However, this may well not be the situation in many complex systems we face such as social or economic system composed of ”people” and the now rapidly developing ”intelligent” systems. The common characteristic of these systems is that they involve rational agents who pursue their own interests. The control of such systems can not directly apply traditional control theory, and it is also beyond the scope of traditional game theory research. Therefore, it is of great significance to integrate game factors into the control theory. This motivates us to introduce a new theoretical framework within which the control of systems with rational individual can be adequately studied. This framework extends the scope of the controlled plants of classical control theory so that control theory can be used in the regulation of wider class of practical complex systems, such as market regulation, company management or control of more and more artificial intelligence systems.

In this paper, we introduce the GBCS framework and mainly study the corresponding controllability problem. The main contents are as follows:

(1) For the first time, the complete game-based control systems framework and the Nash equilibrium controllability definition are given. The game theory is integrated into the control theory framework, which greatly expands the research and application scope of control theory. Based on the abstraction of the control systems with rational agents, we introduce the concept of game-based control systems (GBCSs), which has a hierarchical decision-making structure: one regulator and multiple agents. The regulator is regarded as the macro-controller that makes decision first, and then the agents try to optimize their respective objective functions to reach a possible Nash equilibrium as a result of non-cooperative dynamic game. Hence, for any given strategy of the higher level regulator, the rational agents will form a

non-cooperative game at the lower level. A fundamental issue in GBCS is: Is it possible for the regulator to change the macro-states by regulating the Nash equilibrium formed by the agents at the lower level? This leads to the investigation of controllability of Nash equilibrium of GBCS, which is a basic concept to characterize the property of GBCS and is the basis for further study of other control properties.

(2) Differential games can be used to describe and study a very wide and important class of systems, and the control of such systems constitutes a typical deterministic game-based control system. Therefore, a mathematical model and the related definition of controllability of such deterministic GBCS are established. First, we study the controllability of general nonlinear GBCS and transform the controllability problem of GBCS into a partial controllability problem of a forward-backward differential equation (FBDE). Then we focus on linear systems to give some explicit necessary and sufficient algebraic conditions on the controllability of Nash equilibrium, by solving the controllability problem of the associated forward and backward dynamic equations. For the time-invariant linear GBCS, a more simpler matrix rank criterion is given.

(3) Since complex systems are often affected by many internal and external random factors, it is necessary to consider the stochastic GBCS whose dynamics are described by stochastic differential equation. First, we study the controllability of general nonlinear stochastic GBCS and transform the controllability problem of GBCS into a controllability problem of a forward-backward stochastic differential equation (FBSDE). Then we focus on linear systems to give some explicit necessary and sufficient algebraic conditions on the controllability of Nash equilibrium, by solving the controllability problem of the associated forward and backward dynamic equations. For the time-invariant linear GBCS, a more simpler matrix rank criterion is given. To study the controllability problem of stochastic GBCS, we need to solve the controllability problem of the associated FBSDE, which is a key technical issue and has rarely been explored in the literature.

(4) Incomplete information means that some information is unknown or information is asymmetric. This phenomenon often occurs in control systems and game

models, so we introduce incomplete information GBCS. As a preliminary exploration of this direction, we consider a special incomplete information GBCS: the lower level rational agents do not have information of the macro-strategy. For this system, we use the robust Nash equilibrium to characterize the equilibrium outcomes of the lower-level game and study the corresponding controllability problem.

Key Words: non-cooperative games, game-based control systems, Nash equilibrium, controllability, forward-backward differential equation

目 录

图目录

主要符号对照表

$R^{n\times m}$	$n\times m$-维实数矩阵空间
$\forall$	任意的
$\exists$	存在
$\|x\|$	向量 x 的 Euclidean 范数
$\|A\|$	矩阵 A 的 Euclidean 范数
X^T	向量和矩阵 X 的转置
$\oplus$	线性空间的直和
$det(A)$	方阵 A 的行列式
$Rank(A)$	矩阵 A 的秩
$Im(A)$	矩阵 A 的值域空间
$\Lambda(A)$	矩阵 A 的特征值集合
A_{ij}	矩阵 A 的第 i 行第 j 列元素值
$span\{x_1,\cdots,x_p\}$	向量 $x_1,\cdots,x_p$ 生成的线性空间
$\mathbf{1}_n$	元素全为 1 的 n-维列向量
I_n	n-维单位矩阵
0_n	n-维零矩阵
$0_{n\times m}$	$n\times m$-维零矩阵
$R^{n\times m}$	$n\times m$-维实数矩阵
$R^{n\times m}$	$n\times m$-维实数矩阵
$<\cdot,\cdot>$	欧氏空间的标准内积
$\nabla f(x)$	可微函数 f 在 x 处的梯度
f_x	可微函数 f 关于 x 的偏导数
a.s.	几乎处处, 或以概率 1

第 1 章 引言

1.1 研究背景

认识系统和改造系统可以说是控制论的主要任务. 系统, 作为一切事物存在的基本方式, 可以定义为由相互关联和相互作用的多个元素 (或子系统) 所组成的具有特定功能的有机整体. 随着控制理论的不断发展, 被控系统也变得越来越复杂, 从原来相对简单的机械手臂到复杂的航天器, 再到更加复杂的社会系统以及不断演化的人造系统, 如机器人、互联网络、智能电网、软件系统、指挥系统等. 如何对复杂系统进行有效的控制也自然成了控制论研究的重要问题.

复杂系统理论一直是系统科学中的一个前沿方向. 生命系统、金融系统、环境系统以及很多人造系统等都是复杂系统, 对这些系统的认识和改造具有重要意义. 调控系统的目的是为了使得系统达到一定的功能, 因此, 调控者关注的是复杂系统的宏观状态或功能. 但系统的宏观功能是由其微观组分通过相互作用实现的. 这就使得研究复杂系统微观关联与宏观功能之间的时空演化、预测与调控规律的认识成为了关键, 而这也恰好是复杂性科学的核心内涵[1]. 文献 [1] 深入讨论了这个问题, 并指出平衡可以作为“连接”微观关联与宏观功能的基本概念, 这也是我们本文研究对复杂系统的控制的一个切入点.

系统要素可以有多种方式实现平衡. 举例而言, 平衡可以是通过在给定条件下各系统要素之间的竞争或合作达到, 或是通过正负反馈达到, 也可以是通过外部统一控制达到等. 本文我们主要关注的是第一种情况, 也就是通过竞争达到的平衡. 这种情况与其他达到平衡的方式的一个本质区别是此时系统的某些组成要素拥有其自身的利益追求. 经济学中将追求自身利益最大化的个体称为理性个体, 因此这类复杂系统就是有理性个体参与的系统, 这与系统组分仅被动响应的复杂系统有本质的区别. 完全被动响应的系统符合因果律, 也即下一个的动态响应仅与当前或之前时刻的状态和输入有关. 而对于拥有自身利益的个体而言, 他们对外界输入的响应不仅与当前的状态和输入有关, 而且还与他们对将来系统的输入和其他组分响应相关. 卢卡斯批判和理性预期理论可以

很好的说明这点[2, 3]. 卢卡斯批判是新古典宏观经济学对凯恩斯主义理论批判的主要代表, 它认为传统政策分析没有充分考虑参与人的理性预期, 从而导致许多政策的失败. 如果系统的参与人是理性的, 那么将政策视为是对复杂但却被动的系统的控制是不对的. 相反, 正确的方式应该考虑到博弈的存在, 否则即使政策制定者的动机很好, 但却可能导致一场灾难. 卢卡斯也因为在理性预期宏观经济理论方面的成就获得 1995 的诺贝尔经济学奖. 另一个为人所知的例子是布雷斯悖论现象 (Braess's paradox), 这个悖论不仅仅是理论上的存在, 而是在现实中很可能出现的现象[4]. 这个悖论被提出用于解释有时在交通网络上增加一条道路不但不能增加交通流量, 反而降低了整个交通网络的服务水准的现象. 这种现象是由于使用道路的人基于最小化自己花费时间的效用函数来选择自己的策略, 交通网络的整体效能是由这些个体之间的博弈均衡来决定的. 如果出行的人是被动的响应而不是理性地选择自己行为, 则新增加的道路即使不能增加交通流量但至少不会变得更糟, 这也体现了有理想个体参与和没有理想个体参与的系统之间是有本质区别的, 在制定一些政策或措施时, 如果不考虑博弈则可能导致事与愿违. 文献 [5] 用动态定价的模型深入研究了理性消费个体策略性行为对厂商收入的影响, 表明如果厂商忽略消费者的策略性动态定价策略会给厂商的收益造成严重的损失.

因此考虑如何控制具有理性个体参与的复杂系统是具有重要意义的. 博弈论对于我们认识具有理性个体参与的复杂系统提供了理论工具. 因此将博弈论的建模方法引入到对复杂系统的控制就变得自然而重要. 但在经典的控制理论框架中, 系统的被控对象一般是通过物理规律进行建模的, 他们没有自己的目标函数或利益追求只是被动的响应, 比如对汽车、飞机、工业过程等的控制. 正如文献 [6] 所言, 目前控制理论主要还是以控制一个"装置"为重点, 当面对控制如社会与经济这类有理性个体参与的系统时, 目前的控制理论就无法套用, 同时这也超出了传统博弈论和微分博弈的研究范围. 因此我们需要扩展经典的控制论框架, 将其扩展到可以对具有博弈的系统的调控, 这也是我们本文的主要目标.

1.2 博弈论与控制论的研究历史

1.2.1 博弈论的研究历史

博弈论主要研究行动 (action) 会发生直接相互作用的多个行为个体的决策行为, 是研究具有利益冲突或合作的不同理性个体之间相互作用的系统的数学理论. 冯 · 诺依曼和摩根斯坦在 1944 年发表的《博弈论与经济行为》[7] 一书标示着博弈论的创立, 该书主要讨论零和博弈和合作博弈. 随后在五十年代纳什建立了非合作博弈并提出了纳什均衡的概念, 这推动了博弈论的快速发展. 经过不同博弈论专家的努力, 博弈论形成了以下面四种类型博弈为主的框架: 完全信息静态博弈和纳什均衡、完全信息动态博弈和子博弈精炼纳什均衡、不完全信息静态博弈和贝叶斯纳什均衡、不完全信息动态博弈和贝叶斯精炼纳什均衡. 合作博弈也得到了一些发展, 但我们提到博弈论主要还是指非合作博弈.

博弈论作为一种思维方法和建模工具被广泛的运用到各种系统的分析中. 其中最引人注目的是在经济学中的运用. 由于纳什均衡的出现, 经济学的理论研究在方法论上发生了一次温和的革命, 非合作博弈的语言、概念和技术方法已经成为这门学科的中心[8]. 同时博弈论为分析整个社会变化和社会结构提供了一个微观基础, 使得经济分析由传统简单的资源配置分析转化为对各种各样制度的分析[9, 10]. 博弈论也被用于分析或设计合同、激励机制、公司治理等重要的问题中. 由于对博弈论的深入研究和在经济学中取得的巨大成就, 纳什、泽尔腾、海萨尼等许多博弈论学者获得了诺贝尔经济学奖.

随着博弈论的思想和方法被经济学领域外的人所熟知, 其作为分析和解决冲突和合作的数学工具被广泛运用的各种领域, 比如控制科学[11–14]、管理学[15]、生态学[16–18]、化学工业[19]、计算机科学[20]、机器学习[21] 等工程领域. 同时其广泛的应用也促使了博弈理论的不断发展, 比如演化博弈论[22]、微分博弈论[23]、势博弈[24]、平均场博弈论[25]、算法博弈论[20] 等.

博弈论中最基本的概念是纳什均衡, 它是博弈中理性个体无法通过单方面改变自己策略来改善自身收益的局面, 因此可以用于理性个体的行为的预测. 一般博弈论并不考虑系统如何达到纳什均衡, 这也限制了它在实际系统中的应用. 博弈学习理论[26] 是一个试图回答这个问题的一个研究方向, 但相关理论还处于发展阶段. 其一种研究思路是如何设计有效的算法达到纳什均衡. 纳什均衡的寻找从理论上来说是一个复杂问题[20], 但对于某些类型的博弈还是可以找

到有效的算法. 这里的学习并不是对系统中未知的信息进行学习, 系统可能没有任何未知信息. 很多情况我们希望个体可以通过非常简单的算法及信息交互就可以达到纳什均衡, 这在很多分布式系统的设计中很有用. 另一种是当博弈中存在未知信息时, 如何通过学习达到纳什均衡, 此时就会涉及到辨识的问题. 前面这些思路基本上都暗含了参与个体是有限理性的, 目的是设计适当的算法使系统达到纳什均衡. 然而达到纳什均衡并不是理想个体的追求, 纳什均衡只不过是最大化自身利益的结果, 完全理性个体在未知环境中如何进行博弈依然是一个问题.

博弈论这些广泛的应用以及各个细化分支的深入研究使得它成为认识复杂系统的一种重要而又成熟的工具[27], 对于研究复杂系统中各要素的平衡性具有重要的作用.

1.2.2 控制论的研究历史

控制论作为上世纪诞生的新兴学科已经在各个领域取得了令人瞩目的成就. 其实在控制论产生前, 已经出现了许多的自动控制装置. 比如中国古代的指南车、铜壶滴漏等装置, 工业革命时瓦特发明的蒸汽机飞球调速器等. 1948 年维纳发表的著作《控制论: 或关于在动物和机器中控制和通讯的科学》基本确立了控制论这门学科. 书中将反馈的概念推广到一切控制系统, 并把控制理解为信息的交换和处理, 这种抽象使得控制论可以作为一门独立学科进行发展并可以广泛的运用到实践中.

按照控制理论发展的不同阶段可以大致分为经典控制理论、现代控制理论和智能控制理论三个阶段[28]. 上世纪 50 年代前属于经典控制理论时期. 该理论一般局限在单输入单输出的线性定常系统理论的研究, 采用频域的方法. PID 控制属于其重要的成果并被广泛运用到各自控制系统. 由于工业化和高科技的发展, 对控制提出了越来越高的要求, 从而促进了从上世纪 60 年代以来现代控制理论的诞生和发展[29]. 现代控制理论主要以状态空间的方法描述被控系统, 使得其分析和设计控制的方法更加精确. 其成果包括最优控制、自适应控制、鲁棒控制、系统辨识与滤波、随机控制等. 随着被控系统进一步复杂大型化, 也开始出现一些新的控制理论, 比如大系统控制、智能控制等. 控制理论诞生与实际应用, 也不断被实际应用推进, 针对不同类型的被控系统出现了一些分支的应用控制理论, 比如工程控制理论、生物控制论、经济控制论等. 文献中

对智能控制的研究也有一段不短的经历, 主要用于解决许多无法用传统方法处理的复杂系统的控制问题, 比如交通系统、复杂的指挥系统等, 这些系统一般具有难以建模、高度非线性、复杂任务要求等特点[28]. 智能控制的发展得益于多学科如控制理论、人工智能、模糊或粗糙数学、计算机科学、认知科学等的交叉, 但它目前处于发展阶段, 还没有一个完整的理论框架.

控制论提出了许多基本概念, 比如能控性、能观性、能镇定性、反馈解耦等, 这些概念使我们对被控系统有更加本质的认识, 同时为后续控制器的设计提供基础. 其中能控是指对系统任意的初始状态和末值状态, 都存在适当的控制输入, 使得系统的状态演化轨线始于给定的初始值并在某一有限时刻达到指定的末值状态, 它可以反应控制器对系统控制能力的大小. 能控性概念最早由卡尔曼提出的, 不久之后成为控制论中的基本概念, 它与控制论中许多问题的可解性有直接关系, 比如极点配置、系统镇定等. 因此在研究控制系统时, 能控性是一个非常重要的概念, 是进一步设计控制器的基础.

1.2.3 博弈论与控制论结合的研究

博弈论可以用于建模具有竞争行为的复杂系统并对许多现象给出深刻本质的解释, 而控制论可以让人们实现对系统的控制. 将这两个进行结合自然而意义重大. 目前文献中将控制论与博弈论结合的研究主要包括以下几个方向.

(1) 运用博弈论对复杂系统进行建模. 许多复杂系统可以很自然的使用博弈论来建模. 如常见的经济系统、管理系统、金融系统、法律系统等, 这类系统具有明显的理性个体人的参与, 他们之间相互影响并各自具有不同的利益追求. 有些系统虽然没有明显的理性个体的参与, 比如生态系统, 但从演化的角度考虑和分析, 所有个体都在隐性地追求最大化各自的适应度函数, 正所谓" 适者生存", 因此博弈论也被广泛的应用到这类系统的分析与建模.

(2) 将最优控制的方法运用到博弈论中. 比如微分博弈、平均场博弈等. 连续时间动态博弈中均衡的求解本质上是最优控制问题, 因此这种结合是自然的. 这也因为有时在设计控制器时不得不考虑面对的环境可能是对抗性的, 这也是微分博弈产生的应用源头.

(3) 用博弈论的方法来设计控制系统. 比如智能电网、智慧运输系统、分布式资源配置、网络安全性、无线传感器网络、鲁棒控制等. 这些系统通过设计适当的收益函数或惩罚机制使得系统在纳什均衡处的状态满足某种目的. 这种

基于博弈的设计方法正被越来越多的应用到复杂分布式系统的设计中, 因此分析或控制这类人工系统时也需要考虑博弈的存在.

将博弈论融入到控制系统的建模中是非常自然的, 这不但丰富了控制理论, 也使得许多经典控制思想或方法可以运用到更加广泛的系统中. 同时现实中对很多复杂系统的控制也要求我们必须考虑被控系统中存在的博弈行为, 比如政府对宏观经济的调控. 但上面几个方向均没有研究如何控制这类复杂系统, 这也是我们提出并研究基于博弈的控制系统的原因. 尽管许多系统可以通过理性个体之间的博弈达到某种整体最优, 但正如市场也可能出现失灵的情形, 我们不能完全指望通过“看不见的手”来实现期望的宏观性质, 在某些情况下进行适当的外部干预是必不可少的.

1.3 本文的研究思路及主要成果

我们将提出基于博弈的控制系统 (GBCS) 的理论框架, 引入纳什均衡能控性的概念, 并对确定性 (GBCS)、随机 (GBCS) 的能控性进行研究, 最后初步研究了在信息不完全情况下 (GBCS) 的能控性.

1.3.1 基于博弈的控制系统

“上有政策, 下有对策”现象普遍存在于各种层级决策系统中, 造成这种现象的主要原因是系统中理性个体追求自身利益最大化. 如果忽略掉这些理性个体的策略性行为, 则对系统动态的分析可能会被严重扭曲从而使得控制目标无法达到. 而目前的控制论和博弈论模型都无法很好的建模和分析这类控制系统, 正是基于这样的背景, 我们提出了基于博弈的控制系统 (GBCS), 这是一类具有一个上层调控者和多个下层决策个体的层级决策系统. 上层调控者是一个宏观控制者，它首先给出自己的宏观控制策略, 然后下层决策个体通过选择自己的输入策略来优化各自的目标函数. 因此, 对于任何给定的宏观策略, 下层决策个体之间形成非合作的博弈. 宏观调控者的目的是通过选择适当的宏观策略来干预决策个体之间的博弈，从而影响它们之间形成的纳什均衡，以此达到对系统的宏观状态进行调控. GBCS 将刻画理性个体行为的博弈模型融入到控制系统中, 扩展了经典控制论被控对象的范围, 从而使得控制论可以被广泛运用到实际复杂系统的调控中. 在 GBCS 中, 一个基本的问题是: 调控者是否可以通过选择适当的宏观策略干预下层决策个体博弈形成的纳什均衡来调控系

统的宏观状态? 为了考察这个基本问题, 我们引入了纳什均衡能控性概念. 它是刻画 GBCS 的基本概念, 是进一步研究系统其它控制性质的基础. 《关于控制理论发展的某些思考》[6] 一文已经提出了控制论的这种发展前景, 文献 [30–32] 在这个方向做出了初步的探索和讨论.

1.3.2 确定性 GBCS 的能控性

微分博弈可以对许多动态系统进行建模和分析并被广泛应用到许多领域, 例如无线传感器网络、经济系统、供应链管理等. 因此研究对这类系统的调控很有应用价值. 首先我们给出了一般非线性 GBCS 能控性的刻画, 将 GBCS 能控性问题转化为对应正倒向微分方程的部分能控性问题. 对一般线性时变 GBCS , 我们通过研究相应线性时变正倒向微分方程部分能控性问题, 给出了 GBCS 能控的充分必要代数秩判定条件. 最后我们给出了线性定常 GBCS 能控性更加简洁的矩阵秩判定, 判定中的矩阵可以通过系统相应矩阵直接计算出来. 如没有理想个体参与或理想个体对系统宏观状态无影响时, 该 GBCS 退化为一般的线性控制系统并且相应判定也退化为经典线性系统能控性判定.

1.3.3 随机 GBCS 的能控性

复杂系统经常会受到各种随机因素的影响, 比如外部环境的随机干扰、系统内部的热噪声、系统参数的随机漂移等. 同时在系统建模的时候, 由于认知能力的限制, 原系统的部分动态可能未知或不确切的了解, 系统的一些状态或参数无法得到确定的值, 这些都可能在系统的模型中引入随机的因素. 针对这类系统, 这部分我们建立了用随机微分方程描述的 GBCS 数学模型以及能控性的数学定义. 针对随机 GBCS, 我们首先给出了对一般非线性随机 GBCS 能控性的刻画, 将 GBCS 能控性问题转化为对应的正倒向随机微分方程 (FBSDE) 的部分能控性问题. 然后对于一般线性时变 GBCS 的能控性, 我们给出了系统能控的充分必要的代数秩判定条件. 最后给出了线性定常随机 GBCS 的能控性的更加简洁的矩阵秩判定. 对于随机 GBCS, 我们需要考虑正倒向随机微分方程, 即使是线性的也难以处理. 这些能控性判定在某种意义上可以退化到确定性系统的相应判定.

1.3.4 一类不完全信息确定性 GBCS 的能控性

不完全信息博弈是指博弈的参与者并不完全清楚博弈模型中的一些信息或信息不对称. 前面研究的确定性或随机的 GBCSs 均假设了信息是完全的. 不完全信息的现象无论是在控制系统还是博弈模型中都经常出现, 因此我们引入不完全信息 GBCS 的概念并对相关研究做了概述. 对下层决策个体无法获得宏观策略的不完全信息的确定性 GBCS 做了初步研究, 这种情况的出现可能是因为宏观调控者的输入策略难以观测或观测成本太高. 我们使用鲁棒纳什均衡来刻画下层决策个体之间的博弈结果并刻画了线性二次确定性 GBCS 在这种不完全信息情况下的能控性. 此时, 下层决策个体将宏观策略当成外部噪声来处理, 每个个体均使用鲁棒最优化方法来决定自己的策略. 不完全信息 GBCSs 在现实中更加普遍, 博弈论和控制论处理不完全信息的方式也很不同, 如何将它们融合到一起也是一个重要研究方向.

第 2 章 预备知识

为便于参考, 本章主要介绍后续章节所需要的基本概念和基本结论. 内容涉及正倒向随机微分方程[33, 34], 最优控制[35–37], 微分博弈[38] 等.

2.1 正倒向随机微分方程

2.1.1 基本概念

σ-代数 设 Ω 是一个空间, $\mathcal{F}$ 是 Ω 的子集构成的非空集合类. 若下列条件满足：

- 如果 $A \in \mathcal{F}$, 则 $A^c \in \mathcal{F}$;
- 如果 $A_n \in \mathcal{F}$, $n \geq 1$, 则 $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

那么, $\mathcal{F}$ 称为一个 σ-代数.

概率空间 设 $\mathcal{F}$ 为样本空间 Ω 的子集的 σ-代数, 若 P 是 $\mathcal{F}$ 上的概率测度, 即 $P\{\Omega\} = 1$, 则称 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为一个概率空间. 集合 $A \in \mathcal{F}$ 称为一个事件, $P\{A\}$ 称为事件 A 发生的概率. 如果 $P\{A\} = 1$, 则说事件 A 是几乎处处 (almost surely, 简记为 *a.s.*) 发生的.

随机变量 设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为概率空间, X 为 Ω 上的可测函数, 且 $P\{|X| < \infty\} = 1$, 那么 X 称为随机变量.

给定一个概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, 子 σ-代数簇 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ 如果满足对任意 $0 \leq s \leq t$ 有 $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, 则称其为一个 σ- 代数流. 如果 σ-代数流 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ 满足下面两个条件, 则称它满足通有条件:

1. 完备性: 任意集合 $A \in \mathcal{F}$, 如果 $P(A) = 0$, 则对任意 $t \geq 0, A \in \mathcal{F}_t$;
2. 右连续: $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} \equiv \bigcap_{s\geq t} \mathcal{F}_s$.

随机过程 给定概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 和其上的 σ-代数流 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$. 随机变量簇 $(X_t)_{t\geq 0}$ 称为随机过程. 称 $(X_t)_{t\geq 0}$ 为可测过程, 如果作为 (t, ω) 的函数, $X_t(\omega)$ 是 $\mathcal{B}(R_+) \times \mathcal{F}$ 可测; 称 $(X_t)_{t\geq 0}$ 为适应过程, 如果对一切 $t \in R_+, X_t$ 是 $\mathcal{F}_t$ 可测; 称 $(X_t)_{t\geq 0}$ 为循序可测过程, 如果对一切 $t \in R_+, X$ 限于 $[0, T] \times \Omega$ 为 $\mathcal{B}([0, T]) \times \mathcal{F}_t$ 可测.

给定大于零的有限时间 T 和概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的 σ-代数流 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$. 我们定义如下符号[34]:

- 对于 $\mathcal{F}$ 的任意子 σ-代数 $\mathcal{G}$, $L^2_{\mathcal{G}}(\Omega;R^m)$ 表示所有 $\mathcal{G}$ 可测取值为 R^m 的平方可积随机变量的集合;
- $L^2_{\mathcal{F}}(\Omega;L^2(0,T;R^n))$ 表示所有取值为 R^n 并满足 $\int_0^T E\|X(t)\|^2dt < \infty$ 的 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$-循序可测随机过程的集合, 在不引起迷惑的情况下可以简记为 $L^2_{\mathcal{F}}(0,T;R^n)$;
- $L^2_{\mathcal{F}}(\Omega;C([0,T];R^n))$ 表示所有取值为 R^n 并满足 $Esup_{t\in[0,T]}\|X(t)\|^2 < \infty$ 的 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$-循序可测连续随机过程的集合;
- $L^2_{\mathcal{F}}(0,T;W^{1,\infty}(M;N))$ 表示满足以下条件的函数 $f:[0,T]\times M\times\Omega\to N$ 集合: 对于任意固定的 $\theta\in M,(t,\omega)\to f(t,\theta;\omega)$ 是 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$-循序可测的并且 $f(t,0;\omega)\in L^2_{\mathcal{F}}(0,T;N)$, 同时存在一个常数 $L>0$ 满足对几乎所有的 $\omega\in\Omega$, 对所有 $\theta,\overline{\theta}\in M, \|f(t,\theta;\omega)-f(t,\overline{\theta};\omega)\|\leq L\|\theta-\overline{\theta}\|$ 在 $t\in[0,T]$ 上几乎处处成立;
- $L^2_{\mathcal{F}}(\Omega;W^{1,\infty}(R^n;R^m))$ 表示从 $R^n\times\Omega$ 到 R^m 的函数 g 并满足以下条件构成的集合: 对任意 $x\in R^n,\omega\to g(x;\omega)$ 是 $\mathcal{F}_T$-可测的, $x\to g(x;\omega)$ 关于 x 是一致 $Lipschitz$ 的并且 $g(0;\omega)\in L^2(\Omega;R^n)$.

在此基础上, 我们进一步定义如下空间 $M[0,T]$, 它被应用到定义倒向随机微分方程的解中:

$$M[0,T]\equiv L^2_{\mathcal{F}}(\Omega;C([0,T];R^n))\times L^2_{\mathcal{F}}(\Omega;C([0,T];R^m))\times L^2_{\mathcal{F}}(0,T;R^l).$$

在这个空间上定义如下范数:

$$\|(X,Y,Z)\|=\Big(Esup_{t\in[0,T]}\|X(t)\|^2+Esup_{t\in[0,T]}\|Y(t)\|^2+E\int_0^T\|Z(t)\|^2dt\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

很容易验 $(M[0,T],\|\cdot\|)$ 证构成一个 $Banach$ 空间.

如下随机微分方程称为正倒向随机微分方程 (Forward-Backward Stochastic Differential Equation, FBSDE):

$$\begin{cases} dX(t)=b(t,X(t),Y(t),Z(t))dt+\sigma(t,X(t),Y(t),Z(t))dW(t),\\ dY(t)=h(t,X(t),Y(t),Z(t))dt+\widehat{\sigma}(t,X(t),Y(t),Z(t))dW(t),\\ X(0)=x\in R^n,\ Y(T)=g(X(T)). \end{cases} \quad ...\ (2.1)$$

其中函数满足下面的标准假定: 记 $M = R^n \times R^m \times R^l$, 有

$$\begin{cases} b \in L^2_{\mathcal{F}}(0,T;W^{1,\infty}(M;R^n)), \sigma \in L^2_{\mathcal{F}}(0,T;W^{1,\infty}(M;R^{n\times d})), \\ h \in L^2_{\mathcal{F}}(0,T;W^{1,\infty}(M;R^m)), \widehat{\sigma} \in L^2_{\mathcal{F}}(0,T;W^{1,\infty}(M;R^{m\times d})), \\ g \in L^2_{\mathcal{F}}(\Omega;W^{1,\infty}(R^n;R^m)). \end{cases}$$

下面给出正倒向随机微分方程解的定义.

定义 2.1 [34] 过程 $(X(\cdot), Y(\cdot), Z(\cdot))$ 称为 $FBSDE$ (2.1) 的适应解, 如果下述条件对任意 $t \in [0,T]$ 上几乎处处成立:

$$\begin{cases} X(t) = x + \int_0^t b(s, X(s), Y(s), Z(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X(s), Y(s), Z(s))dW(s), \\ Y(t) = g(X(T)) - \int_0^t h(s, X(s), Y(s), Z(s))ds \\ \qquad\qquad - \int_0^t \widehat{\sigma}(s, X(s), Y(s), Z(s))dW(s). \end{cases} \qquad \ldots (2.2)$$

进一步, 我们称 $FBSDE$ (2.1) 可解的, 如果它有上述的适应解. 如果 $FBSDE$ (2.1) 没有倒向过程 $Y(\cdot)$ 和过程 $Z(\cdot)$, 则方程退化为普通的随机微分方程 (SDE); 如果 $FBSDE$ (2.1) 没有正向过程 $X(\cdot)$, 则方程退化为倒向随机微分方程 (BSDE). 本文中用到的随机积分都是指 Ito 积分.

2.1.2　主要定理

下面定理是分析 $FBSDE$ 的常用工具:

定理 2.1 [39] 不可能存在随机过程 $(a,b) \in L^2_{\mathcal{F}}(0,T;R) \times L^2_{\mathcal{F}}(0,T;R)$ 和 $x \in R$ 并满足

$$\lim_{t\to T} E\|b(t) - b(T)\|^2 = 0$$

使得

$$\zeta = x + \int_0^T a(s)ds + \int_0^T b(s)dw(s),$$

其中

$$\zeta = \int_0^T \varphi(s)dw(s),$$

$$\varphi(t) = \begin{cases} +1 & 当\ t \in [(1-2^{-2i})T, (1-2^{-2i-1})T), i = 0, 1, \cdots, \\ -1 & 其他. \end{cases}$$

上述不可能性表示定理在研究随机微分方程解的存在性有重要作用. 下面给出一些关于随机微分方程可解性的一般性结论.

定理 2.2 [37] 考虑如下 SDE

$$\begin{cases} dX(t,\omega) = b(t,X(t),\omega)dt + \sigma(t,X(t),\omega)dW(t), \\ X(0,\omega) = \xi(\omega). \end{cases} \quad \ldots (2.3)$$

如果存在一个常数 $L > 0$ 使得对于任意的 $t > 0, x, y \in R^n$ 和 $\omega \in \Omega$ 满足

$$\begin{cases} \|b(t,x,\omega) - b(t,y,\omega)\| \le L\|x-y\|; \\ \|\sigma(t,x\omega) - \sigma(t,y\omega)\| \le L\|x-y\|; \\ \|b(\cdot,0,\cdot)\| + \|\sigma(\cdot,0,\cdot)\| \in L^2_{\mathcal{F}}([0,T];R). \end{cases}$$

则对于任意 $\xi \in L^2_{\mathcal{F}_0}(\Omega;R^n)$, SDE (2.3) 存在唯一的适应解 X , 并且满足对任意 $T > 0$

$$E\, max_{0\le t\le T}\|X(t)\|^2 \le K_T(1 + E\|\xi\|^2)$$

和

$$E\,\|X(t) - X(s)\|^2 \le K_T(1 + E\|\xi\|^2)\|t-s\|,\ \forall s,t \in [0,T].$$

定理 2.3 [34] 考虑如下 $BSDE$

$$\begin{cases} dY(t) = h(t,Y(t),Z(t))dt + Z(t)dW(t), \\ Y(T) = \xi. \end{cases} \quad \ldots (2.4)$$

假设函数 $h \in L^2_{\mathcal{F}}(0,T;W^{1,\infty}(R^m \times R^{m\times d};R^m))$. 则对于任意 $\xi \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega;R^m)$, $BSDE$ (2.4) 存在唯一的适应解 $(Y(\cdot),Z(\cdot))$.

考虑下面的线性 $BSDE$

$$\begin{cases} -dx(t) = (Ax(t) + A_1z(t) + Bu(t))dt - z(t)dw(t), \\ x(T) = 0. \end{cases} \quad \ldots (2.5)$$

由定理 (2.3) 可知, 对于任意 $u(\cdot) \in L^2_{\mathcal{F}}(0,T;R^m)$, $BSDE$ (2.5) 存在唯一解 $(x(\cdot),z(\cdot)) \in L^2_{\mathcal{F}}(0,T;R^{2n})$. 因此, 我们可以定义如下集合

$$S_0 \equiv \{x^u(0) : u(\cdot) \in L^2_{\mathcal{F}}(0,T;R^m)\}.$$

定理 2.4 [39] 对于线性 $BSDE$ (2.5), 如下关系成立:

$$S_0 = Im([B, AB, A_1B, AA_1B, A_1AB, \cdots]). \quad ... (2.6)$$

2.2 最优控制

2.2.1 确定性最优控制

考虑如下确定性非线性最优控制系统, 系统动态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), t \in [0, T], \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad ... (2.7)$$

指标函数为

$$J(u(\cdot)) = K(x(T)) + \int_0^T L(t, x(t), u(t))dt, \quad ... (2.8)$$

设容许控制集合为

$$U = \{u : [0, T] \to D : u \text{ 是关于时间 t 的分段连续函数}\}. \quad ... (2.9)$$

最优控制目标就是选择适当的控制输入 $u(\cdot) \in U$ 使得指标函数达到最大值.

当容许控制 $u(\cdot) \in U$ 是不连续的时候, 方程 (2.7) 可能出现右端不连续的情形, 此时普通意义 (解关于时间处处可微) 的解可能不存在. 针对右端不连续的方程, 我们使用如下定义的 Caratheedory 解[40, 41].

定义 2.2 [40] 考虑微分方程

$$\dot{x} = g(t, x), \ x(0) = x_0, \ t \in I. \quad ... (2.10)$$

定义在非退化区间 $I \subset R$ 上的向量函数 $x(t)$, 如果它在区间 I 的任意紧子区间上绝对连续并且对几乎所有的 $t \in I, x(t)$ 满足方程 (2.10), 则称 $x(t)$ 为方程 (2.10) 的 Caratheedory 解.

定义 2.3 [40] 令 I 为 R 中任意的区间, D 为 R^n 中的任意的子集. 若函数 g 满足以下条件:

1. 对几乎所有的 $t \in I, g$ 关于 x 有定义, 且是连续的;
2. 对任意的 $x \in D, g$ 关于 t 是可测的;
3. 存在非负的勒贝格可积函数 $m : I \to R$ 使得对任意的 $t \in I, |g(t, x)| \leq m(t)$,

那么, 称函数 g 在 $I \times D$ 上满足 Caratheedory 条件.

定理 2.5 [40](Caratheedory 的解存在唯一性) 假设函数 $g(t,x)$ 在域 G 上满足 Caratheedory 条件, $(0,x_0) \in G$. 如果存在正数 a,b 使得域 G 包含柱体 $Z = \{(t,x) : 0 \le t \le a, \|x - x_0\| \le b\}$, 并且存在勒贝格可积函数 $l(x)$ 使得任意的 $(t,x),(t,y) \in Z$ 都有

$$\|g(t,x) - g(t,y)\| \le l(x)\|x - y\|,$$

则对于初值 $x_0 \in R^n$, 方程 (2.10) 在 $[0,d]$ 上存在唯一的 Caratheedory 解, 其中

$$0 < d \le a,\ \phi(d) \le b,\ \phi(t) \equiv \int_0^t m(s)ds.$$

在文章接下来的部分, 如果没有特殊的说明, 提到确定性微分方程的解我们均是指 Caratheedory 解, 所以为了简洁, 我们将把方程的 Caratheedory 解直接称为方程的解.

极大值原理是求解最优控制问题的重要工具, 它刻画了当最优解存在时最优控制满足的必要条件. 下面定理出自参考文献 [36, 定理 1.3, 第 40 页].

定理 2.6 [36](极大值原理) 假设函数 f, L, K 关于其变元都是连续的, 关于变元 x, t 是连续可微的, $f(t,x,u), f_x(t,x,u), f_t(t,x,u), L_x(t,x,u), L_t(t,x,u)$ 都是有界的.

记哈密尔顿 (Hamilton) 函数为

$$H(t,x,u,\phi) = -L(t,x,u) + \phi^T f(t,x,u).$$

若 D 是有界闭集且最优控制问题 (2.7)-(2.9) 存在最优解 $(u^*(t), x^*(t))$, 则一定存在矢量函数 $\phi(t) \in R^n$, 使得 $u^*(t), x^*(t), \phi(t)$ 一起满足:

1. $\dot{x}^*(t) = f(t, x^*(t), u^*(t)),\ x^*(0) = x_0;$
2. $\dot{\phi}(t) = -H_x^T(t, x^*(t), u^*(t), \phi(t)),\ \phi(T) = -K_x^T(x^*(T));$
3. 对 $u^*(t)$ 在 $[0,T]$ 上的一切连续时刻 t 皆有

$$H(t, x^*(t), u^*(t), \phi(t)) = \max_{u \in D} H(t, x^*(t), u, \phi(t)).$$

2.2.2 随机最优控制

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, P)$ 为概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上满足通有条件的 σ-代数流, $w(t)$ 是其上的标准布朗运动 ($w(0) = 0$), 为了记号的简洁我们只考虑一维布朗运动, 高维的情形有类似结果. 考虑如下随机性非线性控制系统:

$$\begin{cases} dx(t) = b(t, x(t), u(t))dt + \sigma(t, x(t), u(t))dw(t), t \in [0, T], \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad \text{... (2.11)}$$

指标函数为

$$J(u(\cdot)) = E\Big[h(x(T)) + \int_0^T f(t, x(t), u(t))dt\Big], \quad \text{... (2.12)}$$

设容许控制集合为

$$U[0, T] = \{u : [0, T] \times \Omega \to D : u \text{ 是 } \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0} - \text{ 适应的}\}. \quad \text{... (2.13)}$$

我们先给出如下一些通用假设[37]:

1. $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ 是由布朗运动 $w(t)$ 产生并完备化后的流;
2. 函数 b, σ, f 和 h 是可测的, 并且存在一个常数 $C > 0$ 和一个连续模函数 $\varpi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ 满足 $\varphi(t, x, u_1, \cdots, u_L, u) = b(t, x, u), \sigma(t, x, u), h(x), f(t, x, u)$, 我们有

$$\begin{cases} |\varphi(t, x, u) - \varphi(t, \bar{x}, \bar{u})| \leq C|x - \bar{x}| + \varpi(u - \bar{u}), \\ \qquad\qquad \forall t \in [0, T],\ x, \bar{x} \in R^n,\ u, \bar{u}, \\ |\varphi(t, 0, u)| \leq C, \qquad \forall t \in [0, T],\ u. \end{cases} \quad \text{... (2.14)}$$

3. 函数 b, f, σ 和 h 关于变量 x 是 C^2. 另外, 存在一个常数 $C > 0$ 和一个连续模函数 $\varpi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ 使得 $\varphi = f, \sigma, K_i, L_i$, 我们有

$$\begin{cases} |\varphi_x(t, x, u) - \varphi_x(t, \bar{x}, \bar{u})| \leq C|x - \bar{x}| + \varpi(|u - \bar{u}|), \\ |\varphi_{xx}(t, x, u) - \varphi_{xx}(t, \bar{x}, \bar{u})| \leq \varpi(|u - \bar{u}| + |x - \bar{x}|), \\ \qquad\qquad \forall t \in [0, T],\ x, \bar{x} \in R^n,\ u, \bar{u}, \end{cases} \quad \text{... (2.15)}$$

对于任何给定的 $u(\cdot) \in U[0, T]$, 方程 (2.11) 是一个参数为随机的 SDE , 由前面关于 SDE 的理论可知, 在上述假设下该方程存在唯一解 $x(\cdot)$.

首先引入如下随机伴随方程:

$$\begin{cases} dp(t) = -\Big(b_x(t,x(t),u(t))^T p(t) + \sigma_x(t,x(t),u(t))^T q(t) - f_x(t,x(t),u(t))\Big)dt \\ \qquad\qquad + q(t)dw(t) \\ p(T) = -h_x(x(T)), \end{cases} \qquad \text{... (2.16)}$$

这是一个 $BSDE$, 由定理 (2.3) 可知, 对于任意 $(x(\cdot),u(\cdot)) \in L^2_{\mathcal{F}}(0,T;R^n)\times U[0,T]$, $BSDE$ (2.16) 存在唯一解 $(p(\cdot),q(\cdot))$.

当控制输入可以影响系统的扩散项时, 最优化时就必须权衡控制本身的能量大小以及由于控制引起的系统波动大小. 因此相对于确定性最优控制, 随机最优控制需要考虑系统更高阶的展开, 用于反应控制输入造成的不确定性变化或波动变化. 这可以用如下的伴随方程来刻画:

$$\begin{cases} dP(t) = -\Big(b_x(t,x(t),u(t))^T P(t) + P(t)b_x(t,x(t),u(t)) \\ \qquad\qquad + \sigma_x(t,x(t),u(t))^T P(t)\sigma_x(t,x(t),u(t)) \\ \qquad\qquad + \sigma_x(t,x(t),u(t))^T Q(t) + Q(t)\sigma_x(t,x(t),u(t)) \\ \qquad\qquad + H_{xx}(t,x(t),u(t),p(t),q(t))\Big)dt + Q(t)dw(t) \\ P(T) = -h_{xx}(x(T)), \end{cases} \qquad \text{... (2.17)}$$

其中

$$H(t,x,u,p,q) = p^T b(t,x,u) + tr(q^T\sigma(t,x,u)) - f(t,x,u),$$

$(p(\cdot),q(\cdot))$ 是 $BSDE$ (2.16) 的解. 因此, 上述方程是一个矩阵值 $BSDE$. 方程 (2.16) 和方程 (2.17) 分别被称为一阶伴随方程和二阶伴随方程. 为了得到极大值原理, 还需要引入以下的 $\mathcal{H}$-函数:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(t,\overline{u}) =& H(t,x(t),\overline{u},p(t),q(t)) - \frac{1}{2}tr[\sigma_x(t,x(t),u(t))^T P(t)\sigma_x(t,x(t),u(t))] \\ &+ \frac{1}{2}tr[(\sigma_x(t,x(t),\overline{u}) - \sigma_x(t,x(t),u(t)))^T P(t) \\ &(\sigma_x(t,x(t),\overline{u}) - \sigma_x(t,x(t),u(t)))].\end{aligned}$$

定理 2.7 [37](随机极大值原理) 设前面通用假设 (1)-(3) 成立并且最优控制问题 (2.11)-(2.13) 存在最优控制 $(x(\cdot),u(\cdot))$, 则 $(x(\cdot),u(\cdot),p(\cdot),q(\cdot),P(\cdot),Q(\cdot))$ 满足方程 (2.11), (2.16) 和 (2.17) 并且满足下述等式:

$$\mathcal{H}(t,u(t)) = max_{\overline{u}\in D}\mathcal{H}(t,\overline{u}) \qquad \text{... (2.18)}$$

随机线性最优二次控制有较为完整的理论, 在此我们不详细给出相应结论.

2.3 微分博弈

此部分给出确定性和随机微分博弈的模型以及一些相关概念.

2.3.1 博弈论基本概念

一个标准的 N-个体非合作博弈由以下基本要素构成: 参与者 $\mathcal{N} = \{1, \cdots, N\}$、行动集合 $\{A_1, \cdots, A_N\}$、收益函数 $\{J_1, \cdots, J_N\}$ 和信息 $\{I_1, \cdots, I_N\}$. 对于每个个体 i, 它的策略集合 $\mathcal{U}_i$ 是其信息集合 I_i 到它的行动集合 A_i 的映射构成的一个集合. 收益函数 J_i 为 $\mathcal{U} \equiv \mathcal{U}_1 \times \cdots \times \mathcal{U}_N$ 到 R 上的一个函数.

在动态博弈中, 信息是一个重要的概念, 它表示在不同的时间或阶段各参与人知道什么信息, 这些信息包括系统状态、参与人收益或其他参与人的行动等, 只有明确了博弈的信息结构动态博弈才算是被完整定义. 参与人的策略就是参与人的一个完整的计划, 即在获得什么信息的情况下采取什么行动, 这正是从信息集合到行动集合的映射的意思.

定义 2.4 一个策略组 $\{u_1^*, \cdots, u_N^*\} \in \mathcal{U}$ 如果满足下面条件, 则称它为博弈的一个纳什均衡: 对于任意 $i \in \{1, \cdots, N\}$ 有

$$J_i(u_i^*, u_{-i}^*) = max_{u_i \in \mathcal{U}_i} J_i(u_i, u_{-i}^*), \qquad ... (2.19)$$

其中 $u_{-i}^* = (u_1^*, \cdots, u_{i-1}^*, u_{i+1}^* \cdots, u_N^*)$.

在博弈论中, 我们总假设参与人是理性的, 也即每个参与人都追求最大化自己的利益. 共同知识是博弈论中的一个重要而又复杂的概念, 下面我们给出它基本的描述和定义, 详细内容可以参考很多博弈论专著, 比如文献 [42].

假设用一个有限的集合 Ω 表示外生不确定性, 参与人 i 关于 $\omega \in \Omega$ 的信息表示为 Ω 上的一个划分 H_i, 用 $H_i(\omega)$ 表示划分 H_i 中包含元素 ω 的一个等价类. 其意义为如果真实状态为 ω , 参与人只知道真实状态在集合 $H_i(\omega)$ 中, 但不知道到底是集合 $H_i(\omega)$ 中哪个状态. 设集合 E 为 Ω 的一个子集, 表示为一个事件. 如果参与人知道真实状态含于 E 中, 也即 $H_i(\omega) \subset E$, 那我们称参与人 i 在状态 ω 下知道事件 E. 事件 "参与人 i 知道 E" 表示为 $K_i(E) = \{\omega \in \Omega : H_i(\omega) \in E\}$. 事件 "每个人都知道 E" 表示为 $K_{\mathcal{N}}(E)$, 就是集合

$$K_{\mathcal{N}}(E) = \{\omega \in \Omega : \cup_{i \in \mathcal{N}} H_i(\omega) \subset E\},$$

事件 “每个人都知道每个人知道 E” 为集合 $K_{\mathcal{N}}^2(E)$, 也即

$$K_{\mathcal{N}}^2(E) = \{\omega \in \Omega : \cup_{i\in\mathcal{N}} H_i(\omega) \subset K_{\mathcal{N}}(E)\},$$

因此可依次递归定义事件 $K_{\mathcal{N}}^m(E), m = 1, 2, \cdots$.

定义 2.5 如果 $\omega \in K_{\mathcal{N}}^\infty(E)$, 事件 E 是在状态 ω 下的共同知识. 如果 $E = K_{\mathcal{N}}^\infty(E)$, 我们称事件 E 为共同知识件或公开事件.

如果 E 是共同知识, 任何 “参与人 i 知道参与人 j 和 k 知道参与人 m 知道 $\cdots E$ ” 的说法都是对的, 这也是共同知识的直观含义. 共同知识用来描述” 我知道你知道” 这种无限类推.

微分博弈是一类特殊的动态博弈, 它的动态过程可以用微分方程进行描述, 接下来的部分我们给出常见的两类微分博弈: 确定性微分博弈和随机微分博弈. 我们假定系统的动态方程、参与人的收益函数是这些微分博弈的共同知识.

2.3.2 确定性微分博弈

设参与人集合为 $\mathcal{L} = \{1, \cdots, L\}$, 系统的动态由以下常微分方程描述

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u_1(t), \ldots, u_L(t)), \\ x(0) = x_0 \in R^n, \ t \in [0, T], \end{cases} \qquad \ldots (2.20)$$

参与人 i 的收益函数为

$$\begin{gathered} J_i(u_1(\cdot), u_2(\cdot), \ldots, u_L(\cdot)) = \\ K_i(x(T)) + \int_0^T L_i(x(\cdot), u_1(\cdot), u_2(\cdot), \ldots, u_L(\cdot))\, dt, \end{gathered} \qquad \ldots (2.21)$$

参与人 i 的行动空间为

$$A_i = A_i(\cdot) : [0, T] \to 2^{R^{m_i}}, \qquad \ldots (2.22)$$

参与人 i 的一个集合值函数, 其用于表示在每一时刻该参与人知道到的系统状态集合

$$I_i(t) = \{x(s) : s \in I \subset [0, t]\}, \ t \in [0, T], \qquad \ldots (2.23)$$

集合 $I_i = \{I_i(t) : t \in [0, T]\}$ 表示参与人 i 的信息结构. 因此, 参与人 i 的策略空间为

$$U_i \triangleq \{u(\cdot) : I_i \to A_i |\, u_i(\cdot)\text{关于其变量满足某种性质}\}, \qquad \ldots (2.24)$$

其中“某种性质”根据具体问题建模或实际需要进行定义, 比如分段连续等. 在对系统动态中的函数 f 和策略空间 U_i 加上一些较弱的限制, 则对于任意 $u_i \in U_i$, 微分方程 (2.20) 存在唯一解.

现在我们定义微分博弈中的不同信息结构.

定义 2.6 [38] 在上述确定性微分博弈中, 我们称参与人的信息结构为

1. 开环: 如果 $I_i(t) = \{x_0\}$;
2. 闭环: 如果 $I_i(t) = \{x(s) : 0 \le s \le t\}$;
3. 反馈: 如果 $I_i(t) = \{x(t)\}$;

微分博弈 (2.20)-(2.24) 表示了一个完整的博弈, 因此可以利用上面关于纳什均衡的定义来定义这里的均衡, 如果参与人都使用开环 (闭环、反馈) 策略, 则称相应的均衡为开环 (闭环、反馈) 纳什均衡.

2.3.3 随机微分博弈

随机微分博弈的定义与确定性微分博弈的定义类似, 只不过是系统的动态由随机微分方程来描述, 参与者的收益函数是期望收益. 因此我们只给出与确定性微分博弈有区别的地方, 其他类似可以进行定义.

给定有限时间 $T > 0$ 和概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的 σ-代数流 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge 0}$ 以及其上的标准的一维布朗运动 $w(t)$.

系统的动态由随机微分方程描述

$$\begin{cases} dx(t) = f(t, x(t), u_1(t), \dots, u_L(t))dt + \sigma(t, x(t), u_1(t), \dots, u_L(t))dw(t), \\ x(0) = x_0 \in R^n,\ t \in [0, T], \end{cases} \quad \text{... (2.25)}$$

参与人 i 的收益函数为

$$\begin{aligned} &J_i(u_1(\cdot), u_2(\cdot), \dots, u_L(\cdot)) = \\ &E\Big[K_i(x(T)) + \int_0^T L_i(x(\cdot), u_1(\cdot), u_2(\cdot), \dots, u_L(\cdot))\, dt\Big]. \end{aligned} \quad \text{... (2.26)}$$

在微分博弈中, 我们一般要求参与者的策略是平方可积的适应过程, 也即其策略空间满足

$$U_i \subset L^2_{\mathcal{F}}(0, T; R^{m_i}).$$

关于随机博弈的其他要素, 如行动空间、信息结构等, 与确定性微分博弈类似, 此处省略.

第 3 章 基于博弈的控制系统

本章给出最一般的基于博弈的控制系统基本框架并引入纳什均衡能控性的概念.

3.1 导言

“上有政策, 下有对策” 现象普遍存在于各种层级决策系统中, 造成这种现象的主要原因是系统中理性个体追求自身利益最大化, 这是对有理性个体参与的系统进行调控时出现的普遍问题. 在经典的控制理论框架中, 系统的被控对象一般是通过物理规律进行建模的, 他们没有自己的目标函数或利益追求只是被动的响应, 比如对汽车、飞机、工业过程等的控制. 然而, 在许多的实际系统中情况并非如此, 比如社会系统、经济系统和目前正快速发展的分布式” 智能” 系统. 这些系统的一个共同特征是: 他们是由许多不仅受客观物理规律驱动同时有自身的利益追求的个体所构成. 这些不同个体的利益与宏观调控者的利益之间可能存在冲突, 个体只关注自身利益, 但作为系统的宏观调控者则更加关注系统的宏观特性. 因此, 对这类系统的调控要充分考虑到系统中理性个体的利益追求. 非合作博弈论可以刻画这类被控系统而且纳什均衡可以很好的预测理性个体的行为. 因此, 对这类系统的控制本质上是纳什均衡进行调控.

基于这样的思想, 我们提出了基于博弈的控制系统 (Game-Based Control System, GBCS), 这是一类具有一个上层调控者和多个下层决策个体的层级决策系统. 上层调控者是一个宏观控制者，它首先给出自己的宏观控制策略, 然后各个下层决策个体通过选择自己的输入策略来优化各自的目标函数. 因此对于任何给定的宏观策略, 这些下层决策个体之间形成非合作的博弈. 宏观调控者的目的是通过选择适当的宏观策略来干预决策个体之间的博弈，从而影响它们之间形成的纳什均衡，以此达到对系统宏观状态的调控.

3.2 基于博弈的控制系统

类似文献 [43, 第二章] 定义抽象控制系统的方法我们给出最一般的基于博弈的控制系统的抽象模型. 对于不同的实际系统, 抽象模型中的元素根据具体系统进行具体化.

定义 3.1 一个基于博弈的控制系统 (Game-Based Control Systems, GBCS) 由下述要素构成:

1. 参与人集合 $\mathcal{N} = \{1, \cdots, N\}$;
2. 系统轨道空间 $\mathcal{X}$, 系统宏观状态空间 $\mathcal{Y}$ 和系统初始态空间 $\mathcal{X}_0$;
3. 非空策略空间 $\mathcal{U}_0$, $\mathcal{U}_1$, $\cdots$, $\mathcal{U}_N$;
4. 一个系统动态映射 T_D : $\mathcal{X}_0 \times \prod_{j=0}^{N} \mathcal{U}_j \to \mathcal{X}$;
5. 收益函数 J_1, $\cdots$, J_N. J_i : $\mathcal{X} \times \prod_{j=0}^{N} \mathcal{U}_j \to R$;
6. 一个系统轨道空间到宏观状态空间的映射 $T_R : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$.

其中 $\mathcal{U}_0$ 为宏观调控者的策略空间, $\mathcal{U}_i$ 和 J_i $(i = 1, \cdots, N)$ 分别为下层决策个体 i 的策略空间和收益函数, 决策个体希望最小化自己的收益函数. 由于每个决策个体的收益不仅与自身所选择策略有关, 而且与所有其他个体所选择的策略组合有关, 因此它们之间构成博弈. 这里我们只考虑非合作博弈.

在 GBCS 中, 宏观调控者首先决定它的宏观策略 $u_0 \in \mathcal{U}_0$, 下层决策个体得到这个策略信息后选择自己的策略来最小化自身收益函数. 这里宏观策略对于下层的决策个体而言是共同知识. 因此, 任何给定宏观调控者的策略 $u_0 \in \mathcal{U}_0$ 和系统初态 $x_0 \in \mathcal{X}_0$ 后, 下层决策个体之间形成一个非合作博弈. 假设此时博弈存在唯一纳什均衡 $u^*(u_0, x_0) = (u_1^*(u_0, x_0), \cdots, u_N^*(u_0, x_0))$, 则由上定义可知, 也存在唯一的系统轨道 $(x^*(u_0, x_0))$. 对于宏观调控者来说, 它更关注自己的调控策略如何影响系统宏观状态, 也即状态 $T_R(x^*(u_0, x_0)) \in \mathcal{Y}$. 图 3.1 给出了 GBCS 的基本框架.

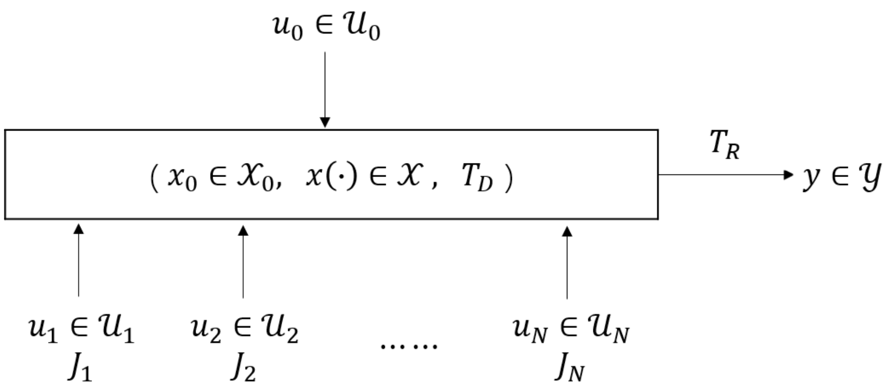

图 3.1 GBCS 的基本框架

注释 3.1 定义 3.1 只是一个抽象的 GBCS. 它即没有明确系统的动态过程是什么, 比如离散的、连续的、确定性的还是随机的; 也没有明确下面 N 个个体形成的博弈的结构, 比如静态博弈、动态博弈、个体的行动顺序以及博弈的信息结构等. 但上述定义的 GBCS 及其结构很清晰的展示了基于博弈控制的基本思想: 宏观调控者通过干预下层决策个体之间形成的博弈的纳什均衡来对系统的宏观状态进行调控. 宏观调控者的策略形式、下层决策个体的决策空间、系统的动态过程以及决策个体之间博弈的结构等都会随具体系统的不同而不同, 需要对具体问题进行具体分析从而明确上述定义中的各个要素. 由于个体的策略是信息集合到行动集合的映射, 而信息集合可以明确系统中行动者的行动顺序以及它们在行动时需要观测或收集的信息, 因此在某种程度策略集合确定了系统的动态性质以及博弈的具体结构.

下面的定义给出了策略集合如何给出信息结构或策略集合与信息结构的关系. 信息结构完全确定了博弈的结构以及参与人的行动顺序.

定义 3.2 设 K 是一非空的表示信息 I 所有可能取值的集合, $\mathcal{U}$ 是决策个体的策略空间, 我们称决策个体不知道信息 I, 如果对任意的策略 $u \in \mathcal{U}$, 映射 u 与 I 的取值无关. 信息 I 称为是决策个体 i 的私人信息, 是指决策个体 i 知道信息 I, 而其他决策个体和调控者不知道.

由注 3.1 可知, 任何策略都是信息集合到行动集合的映射, 因此上述定义是有意义的. 这里我们需要将策略与行动区分开, 具体的区别可参考 2.3.1 小节. 在某些博弈中一个策略就是一个具体行动, 但实际上这时信息集合为单点集, 因此每个映射就等价于一个行动. 私人信息和公共知识 (见定义 2.5) 是博弈论中信息的重要概念.

据我们所知, 文献 [31] 和 [32] 最早开始探索并研究这类系统, 但未形成上述的基本框架. 博弈控制系统与 Stackelberg 博弈[44] 有一些相似性, 但它们的区别是明显的. Stackelberg 博弈是领导者跟随者的双层博弈模型, 其中上层领导者 (相当于 GBCS 中的宏观调控者) 和下层跟随者 (相当于 GBCS 中的下层决策个体) 均是博弈的参与者, 也即上层领导者也有自己的收益函数. 这种模型最早提出用于处理博弈参与人之间存在信息不对称或地位不对等的情况, 主要研究均衡的存在性以及系统在均衡处的性质. 在这个模型中没有任何调控的

输入, 而在 GBCS 中, 上层宏观调控者是一个控制者而不是博弈参与者, 它的目的是调控系统的宏观状态. GBCS 更多的是一个控制系统而不是博弈, 但它考虑了博弈对系统造成的影响. 实际上 GBCS 中的下层的博弈完全可以是一个 Stackelberg 博弈. 在 GBCS 中调控者没有自己的收益函数, 一个原因是在很多控制问题中, 很难找到一个合理的收益函数来表述控制目标, 这在强化学习研究领域已多次得到了验证并且如何设计一个恰当的收益函数也是一个重要的研究方向, 详细情况可以参考文献 [45, 第 16 章, 391 页]. 作为一个控制系统, 有很多有趣的问题可以研究, 比如能控性、反馈控制、自适应控制、系统镇定等等. 这些问题在基于博弈的框架中会出现许多完全不同的现象[32]. 它们不仅具有重要的理论价值, 更多的是有很重要的使用价值, 比如如何稳定市场可以看成 GBCS 的镇定问题. 但是这些问题并不适合在 Stackelberg 博弈的框架上来研究, 同时正如卢卡斯批判所言也无法直接在经典的控制论框架上来研究. GBCS 框架与 Stackelberg 博弈框架的区别正如控制理论与最优化理论的区别. GBCS 是一个拥有异质个体、宏观状态、层次结构等特征的控制系统.

我们可以从两个角度来解读上层宏观调控者的输入. 一是普通的外部调控输入, 比如宏观政策、法律或具有层级系统中的上层命令. 这个控制是外部强加在下层决策个体构成的博弈系统上的, 下层个体只能被动地接受而无法改变这些输入. 另一种解读可以把它看成是一种具有约束力的合同或规范, 是下层决策个体为了改善完全非合作导致的困境或协调失败而通过某种途径形成的合同. 如解决囚徒困境而产生的声誉机制, 社会信用体系的建设等. 同时许多社会规范或制度也可以看成这种宏观调控, 比如交通信号规则等.

注释 3.2 我们在定义 GBCS 的时候, 规定下层决策个体之间的博弈为非合作博弈. 实际上, 在某种程度上我们可以使用 GBCS 来处理一些合作博弈, 正如上面第二种对宏观输入的解释, 即看成合同. 因此我们只关注下层为非合作博弈.

我们给出一个具体的 GBCS 例子以说明研究这类系统的必要性. 考虑一个调控者和两个决策个体甲和乙的 GBCS. 系统博弈如图 3.2 所示 (这个博弈模型来自文献 [9, 第二章, 47 页]). 决策个体甲有上下两个行动, 乙有左右两个行动, 系统调控者有 a、b 两个行动. 如果调控者选择行动 a, 则决策个体甲、乙进行图 3.2 (a) 中的博弈, 如果选 b 则进行图 3.2 (b) 中的博弈.

		乙	
		左	右
甲	上	-1, 3	2, 1
	下	0, 2	3, 4

（a）

		乙	
		左	右
甲	上	1, 3	4, 1
	下	0, 2	3, 4

（b）

图 3.2　一个调控者两个下层决策个体的 GBCS

将博弈中的甲解释为雇员, 乙解释为雇主, 而调控者为政府. 设当前系统处于图 3.2 (a) 中的博弈, 政府现在为了保护雇员, 可以提高最低工资标准, 也即在雇员选择上时收益都增加两个单位从而将双方收益变到图 3.2 (b). 因此调控者的行动 a 表示保持原样, 而行动 b 表示出台新的最低工资标准. 如果不考虑甲乙之间的博弈, 直观看, 这是一件好事, 因为雇主的处境没变但雇员的处境变好了, 因此调控者应该选择行动 b. 然而如果从 GBCS 的角度考虑这个问题, 则我们需要先找出调控者选择不同行动时下层决策个体形成的博弈的纳什均衡, 然后再来比较不同宏观策略的好坏. 容易验证图 3.2 (a) 中博弈的纳什均衡唯一为 (下, 右), 图 3.2 (b) 中博弈的纳什均衡唯一为 (上, 左). 所以此时调控者的行动 b 使得甲乙的收益都减少了, 政府的好事变坏了, 因此调控者应该选择行动 a, 也即保持原来的最低工资标准.

我们可以很容易的得到上述 GBCS 例子的六个要素, 在此不具体给出. 这个例子虽然简单但却给出了 GBCS 的基本思想, 同时也说明了有理性个体参与的系统的调控是不能忽略他们之间的博弈.

在定义 3.1 中, 我们要求宏观调控者首先给出自己的策略, 然后下层决策个体再决定自己的策略. 这并不意味在行动上一定也是宏观调控者先行动然后才是决策个体. 这个顺序更多的是决定调控者与下层决策个体之间的信息结构, 也即下层决策个体可以获得宏观调控者的决策信息. 但决策只是行为个体的一个行动计划, 即在获得什么信息的情况下采取什么相应的行动, 而不是真正的具体行动. 比如政府制定的法律, 法律规定如果人们在做了什么违法行动后会受到什么惩罚, 因此法律惩罚是后与违法行动的. 我们可以给出一个简单的例子来说明这个问题.

考虑一个调控者一个下层决策个体的 GBCS. 调控者的行动集合为 $\{1, 2\}$,

下层决策个体的行动集合为 $\{a,b\}$, 收益矩阵如图 3.3 所示. 宏观状态空间、系统初始态空间均为 $C=\{1,2\}\times\{a,b\}$, 也即所有可能的行动组合空间, 轨道空间为 $C\times C$. 由于系统动态映射与策略空间的定义有关, 所以我们放在下面定义. 宏观态映射为 $T_R(x=(x(0),x(1)))=x(1)$. 可以将这个系统看成两个阶段的过程, $T=0$ 时刻, 系统处于任意给定的初始状态 $x(0)=x_0$, 然后系统调控者和下层决策个体分别给出自己的策略, 在 $T=1$ 时刻系统达到纳什均衡状态, 从而 $x(1)$ 和宏观状态均为纳什均衡组合行动 (下面定义的动态映射可以清楚地看到这点).

调控者

		1	2
决策个体	a	3, 2	5, 1
	b	0, 3	4, 4

(a)

图 3.3　一个调控者一个下层决策个体的 GBCS

定义下层决策个体的策略空间 $\mathcal{U}_1=\{a,b\}$, 也即决策个体的信息集合是单点集. 我们定义两种不同的调控者的策略空间, 其分别为 $\mathcal{U}_0^1=\{1,2\}$ 和 $\mathcal{U}_0^2=\{(x,y): x,y\in\{1,2\}\}$. 策略 $(x,y)\in\mathcal{U}_0^2$ 表示当下层决策个体的行动为 a 时调控者使用行动 x, 当下层决策个体的行动为 b 时调控者使用行动 y, 也可以看成一个映射: $u_0(a)=x, u_0(b)=y$. 如果调控者的策略集合为 $\mathcal{U}_0^1$, 则表示调控者在这个 GBCS 中首先决定选择收益矩阵 3.3 的哪列, 然后下层决策个体再在调控者选择的那列上选择行, 此时 $T_D(x_0,(x(0),x(1)),u_0,u_1)=(x(0),(u_0,u_1))$ 并且总有 $x(0)=x_0$. 而如果调控者的策略集合为 $\mathcal{U}_0^2$, 则表示调控者给定它的一个行动计划, 它到底选择什么行动要看下层决策个体选择什么行动. 此时的行动顺序是: 调控者首先给出它的决策也即行动计划, 但并不先决定选取哪个行动, 然后下层决策个体在得到调控者的行动计划后决定自己选择 $\mathcal{U}_1$ 中的哪个行动, 再在这之后调控者才能确定它要选 $\{1,2\}$ 中的哪个行动. 此时 $T_D(x_0,(x(0),x(1)),u_0,u_1)=(x(0),(u_0(u_1),u_1))$ 并且总有 $x(0)=x_0$. 这里我们也给调控者加了收益函数, 在 GBCS 中不是必要的, 在此主要是为了比较

调控者两种不同策略集合的区别. 其中前者就是经典的 Stackelberg 博弈, 而后者为 inverse-Stackelberg 博弈[46, 47]. 容易检验对于前者调控者能获得的最大收益为 2, 此时调控者使用策略 1 而下层决策个体使用策略 a. 对于后者调控者能获得的最大收益为 4, 此时调控者使用策略 (1, 2) 而下层决策个体使用策略 b.

3.3 纳什均衡能控性概念

给定一个非空宏观状态目标集合 $\mathcal{O} \subset \mathcal{Y}$.

定义 3.3 定义 3.1 中的 *GBCS* 称为 $\mathcal{O}$-能控的 (如果在上下文中不会引起混淆可以直接称为能控的), 如果对于任何给定的系统初值 $x_0 \in \mathcal{X}_0$ 和系统宏观状态 $s_T \in \mathcal{O}$, 存在一个宏观输入策略 $u_0 \in \mathcal{U}_0$, 使得下层 N 个个体的非合作博弈存在唯一的纳什均衡 $u^*(u_0, x_0)$ (因此有唯一的系统轨道 $x^*(u_0, x_0)$) 并且满足在均衡处的系统宏观状态 $T_R(x^*(u_0, x_0)) = s_T$.

在上述定义中, 我们要求给定宏观策略后, 下层决策个体构成的博弈的纳什均衡存在且唯一, 存在性条件当然是必须的, 否则宏观调控者无法预测博弈的结果也就无从谈控制. 要求均衡的唯一性其实也是这个目的, 如果均衡不唯一, 调控者也很就难知道系统最终到底实现哪个纳什均衡, 因此也无法进行调控. 同时多重均衡问题或均衡精炼问题在博弈论中还远未解决, 均衡的多重性严重限制了博弈论对理性个体行为的预测能力. 当然如果系统存在一个合理的均衡精炼方法, 那我们可以将上面的纳什均衡改为精炼后的纳什均衡, 因此唯一性假定也是合理的. 这里的纳什均衡根据具体的博弈可能是纳什均衡、子博弈精炼纳什均衡、贝叶斯纳什均衡或精炼贝叶斯纳什均衡, 也可以是其他的对于该问题有意义的均衡.

按照上述定义, 我们可以将文献 [46, 48] 中研究激励能控性的问题转化为 GBCS 的能控性问题. 首先我们给出激励能控性的问题大致描述. 考虑类似图 3.3 一个调控者和一个下层决策个体的 GBCS, 收益矩阵记为 (A, B) (这是双人博弈收益函数的常用表示方法). 调控者的目标是使自身的利益达到最大, 假设存在唯一的策略组合 (m^*, x^*) 使得 A 达到最大值, 也即

$$(m^*, x^*) = \underset{m \in \mathcal{U}_0,\ x \in \mathcal{U}_1}{arg\ max}\, A(x, m).$$

文献 [48] 的激励能控是说存在调控者的控制策略 $u_0 \in \mathcal{U}_0^2$ 使得系统最终纳什均衡为 (m^*, x^*). 我们用 GBCS 能控性的语言来描述这个问题. 其中策略

空间分别为 $\mathcal{U}_0^2, \mathcal{U}_1$. 其他定义同图 3.3 中的 GBCS. 现定义宏观状态目标集合 $O = \{(m^*, x^*)\}$, 则容易验证 GBCS 是 O-能控的等价于原问题是激励能控的. 文献 [46] 深入研究了仿射激励能控性问题.

注释 3.3 本文只研究 GBCS 的能控性问题, 正如引言中所说 GBCS 是一个控制系统, 有很多有意思的关于控制的问题, 比如镇定系统、最优控制、系统辨识等, 这些问题留待以后再做深入研究.

在 GBCS 中, 有时只需要把宏观状态控制到集合 O 中即达到目的, 这个条件比能控性弱. 这可以用下面引入的可满足性 (Satisfiable) 的定义来刻画, 本文不会深入讨论这个概念.

定义 3.4 定义 3.1 中的 *GBCS* 称为 O-可满足的 (O-satisfiable, 如果在上下文中不会引起混淆可以直接称为可满足的), 如果对于任何给定的系统初值 $x_0 \in \mathcal{X}_0$, 存在一个宏观输入策略 $u_0 \in \mathcal{U}_0$, 使得下层 N 个个体的非合作博弈存在唯一的纳什均衡 $u^*(u_0, x_0)$ (因此有唯一的系统轨道 $x^*(u_0, x_0)$) 并且满足在均衡处的系统宏观状态 $T_R(x^*(u_0, x_0)) \in O$.

3.4 与经典控制系统的比较

到目前为止, 我们都没有对理性个体与被动响应个体给出明确的比较, 甚至都没有给被动响应个体一个明确定义, 实际上控制所关注的被动响应个体并不是除去理性个体外的其他所有系统对象, 它处理的系统一般是因果系统. 被控系统可以抽象为输入-输出 (或输入-状态-输出模型), 称系统是因果系统如果它在 T 时刻的输出 (或状态和输出) 只与 T 或 $t \leq T$ 时刻的输入 (或状态和输入) 有关.

现在我们将被动响应个体或被动响应系统理解为因果系统, 而理性个体或系统是指拥有指标函数并且其响应或行动是为了最大化或最小化指标函数的系统. 因此被动响应个体的响应规律是因果律, 理性个体的响应规律是最优化指标函数, 而控制就是利用这些响应规律调控系统以达到某种目的. 我们也可以把有多个被动个体参与的控制系统对应到图 3.1 中, 但此时每个被动个体是没有指标函数 $J_i (i = 1, \cdots, N)$. 对于这种系统可以直接将被动响应个体的动态规律融入到系统的动态中去, 从而成为一个经典的控制系统.

考虑一个调控者一个下层决策个体的 GBCS. 我们按照定义 3.1 的形式给出这个系统: 记 $\mathcal{B} = \{0,1\}$, $\mathcal{S} = \{0,1,2\}$, $\mathcal{X} = \mathcal{S}^3$, $\mathcal{Y} = \mathcal{S}$, $\mathcal{X}_0 = \mathcal{S}$, $\mathcal{U}_0 = \mathcal{B}^2$, $\mathcal{U}_1 = \mathcal{B}^{\mathcal{U}_0\times\mathcal{X}_0}$; 令函数 $f : \mathcal{S}\times\mathcal{B}^2 \to \mathcal{S}$ 为一个确定的布尔函数, $x(0) = x_0$, $x(1) = f(x_0, u_0(0), u_1(x_0, u_0)(0))$, $x(2) = f(x(1), u_0(1), u_1(x_0, u_0)(1))$, $T_D(x_0, u_0, u_1) = (x(0), x(1), x(2))$, $J_1 = K(x(2))$ 并且 $K(0) < K(1) < K(2)$, $T_R(x) = x(2)$. 布尔函数 f 可以用图 3.4 来表示. 其中圆圈中表示当前状态, 箭头上的有序对的第一个分量表示调控者的行动, 后一个为下层决策个体的行动, 星号表示 $\mathcal{B}$ 中的元素均可. 下层决策个体目的是最小化收益函数.

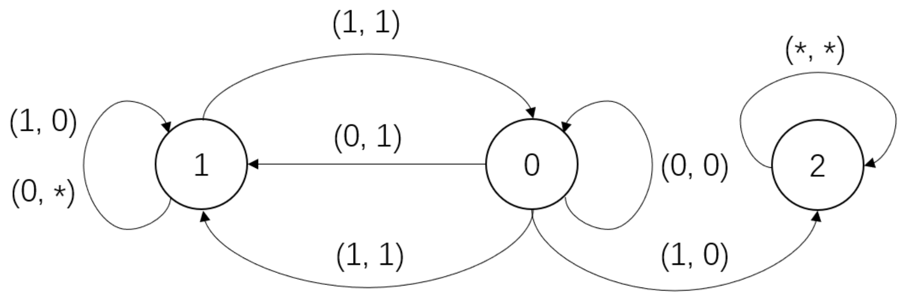

图 3.4　系统转移函数

很容易看出这个系统动态分三个时刻: $t = 0,1,2$, 系统在 $t = k$ 时处于状态 $x(k)$, 受到调控者和决策个体在 $t = k$ 时刻的行动输入 (x,y) 后, 系统进入 $t = k+1$ 时刻并且状态转变为 $x(k+1) = f(x(k), x, y)$. 假设系统初始状态为 $x_0 = 0$, 当宏观调控策略为 $u_0 = (0,0)$, 容易计算下层决策个体有唯一最优行动序列: $(0,0)$; 当宏观调控策略为 $u_0 = (0,1)$, 下层决策个体有唯一最优行动序列: $(1,1)$. 由此可以看出下层决策个体的响应是不满足因果律的, 因为在 $t=0$ 时刻, 无论宏观调控者使用的是策略 $u_0 = (0,0)$ 还是策略 $u_0 = (0,1)$, 在 $t=0$ 及以前时刻系统的输入和状态都是相同的, 但下层决策个体在 $t=0$ 的输入却不同, 前者为 0 后者为 1.

其实这是很容易理解的, 因为由下层决策个体的目标函数可知, 它是想将系统的状态控制到 0 , 因此宏观调控者在未来的输入会影响到下层决策个体当前的输入. 理性个体为了最优化自己的目标函数会关注系统将来的可能输入, 这与因果系统是不同的. 对于最优控制, 比较常用的是动态规划求解, 其方法是倒向求解, 从最后时刻向前推导. 在博弈论中也有逆向求解的相应方法. 这些求解方法最终会形成一个倒向方程, 倒向方程中后面时刻的状态决定前面时刻的状态. 直观分析, 每个理性个体在求解自己最优反应时会形成一个倒向方

程, 而统本身的动态是符合因果律的经典前向方程, 因此整个 GBCS 的动态最终可能会由正倒向方程来描述, 在后面章节中对具体的 GBCS 的求解可以清楚的看到这一点. 当然上面只是直观分析并且假设了完全信息的情况, 对于具体的 GBCS 需要进行具体分析.

3.5 例子

这一小节我们给出几个具有实用价值的 GBCS 例子, 同时也用以说明前面关于 GBCS 定义中各要素的具体含义.

例 3.1 考虑对 Markov 链控制的问题, 已有文献研表明 Markov 链可以很好的模拟一些生物过程并且其稳定分布是反应系统特性的重要指标. 在存在对抗性的生化反应中可以引入“理性” 个体的参与来建模这种对抗. 如果考虑外部干预来调控这些反应, 则可以看成一个对博弈系统的调控, 也即是一个 GBCS.

我们给出系统动态为 Markov 链的 GBCS, 其定义如下:

- $S=\{s_1,\cdots,s_s\}$ 是有限个有限博弈的集合并且 $|S|=s$;
- I 是 N 个个体的集合 (博弈参与者);
- $A^F=A_i\times\cdots\times A_N$, 其中 $A_i=\{a^i_1,\cdots,a^i_{m_i}\}$ 是第 i 个个体的行动集合并且 $|A_i|=m_i$;
- A^L 是调控者的有限行动集合并且 $|A^L|=m$;
- $P:\ S\times A^F\times A^L\times S\to[0,\ 1]$ 是概率转移矩阵; 当行动组合为 (a^F,a^L) 时, 系统从状态转 p 移到状态 q 的概率为 $P(p,a^F,a^L,q)$;
- $R=r_1,\cdots,r_N$, 其中 $r_i:S\times A^F\times A^L\to R$ 是第 i 个个体的收益函数.

记 $A=A^F\times A^L$. 我们考虑无限阶折扣收益函数, 也即

$$\sum_{k=1}^{\infty}\beta_i^k Er_i^{(k)}. \qquad ... (3.1)$$

其中 $\beta\,(0\le\beta<1)$ 是折扣因子, $r_i^{(k)}$ 为第 i 个个体在时刻 k 收到的收益值.

这里我们假设宏观调控者和下层个体均使用平稳的状态反馈控制. 任何给定调控者的策略, 则系统成为下层个体构成的随机博弈, 由随机博弈的理论可知, 下层个体的博弈必定存在一个平稳策略构成的纳什均衡. 在个体均使用这个均衡策略时, 系统是一个 Markov 链, 因此可以研究其稳定分布. 调控者的目的是将系统在均衡处的稳定分布调控到任意想要的分布. 对于这个 GBCS, 我

们可以一一给出定义 3.1 中的各种要素的具体形式. 将例子中的定义转化为定义 3.1 的形式如下:

1. 参与人集合 $\mathcal{N} = I = \{1, \cdots, N\}$;
2. 系统轨道空间 $\mathcal{X} = \{x(\cdot) : x(k) \in \Delta(S), k = 0, 1, \cdots\}$, 系统宏观状态空间 $\mathcal{Y} = \Delta(S) \cup \{\infty\}$ 和系统初始态空间 $\mathcal{X}_0 = \Delta(S)$;
3. 非空策略空间 $\mathcal{U}_0 = \Delta(A^L)^S$, $\mathcal{U}_i = \{u_i(\cdot) \in \Delta(A_i)^S, i = 1, \cdots, N$;
4. 一个系统动态映射 $T_D : \mathcal{X}_0 \times \prod_{j=0}^{N} \mathcal{U}_j \to \mathcal{X}$, 在这个例子中, 给定调控者和个体的决策后, 系统变成一个 Markov 链, 对于给定的状态的初始分布, 系统状态按照 Markov 链的状态转移矩阵进行演化, 因此可以得到系统的动态映射. 由于意义直观清晰但形式稍有点复杂, 所以在此省略;
5. 收益函数 $J_1 = r_1, \cdots, J_N = r_N$ (容易验证这个收益函数符合定义 3.1 中的形式);
6. 系统轨道空间到宏观状态空间的映射 $T_R : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, 此处对于任意系统轨道 $x(\cdot) \in \mathcal{X}$ 将 $T_R(x)$ 定义为极限分布, 如果极限分布不存在则定义为 ∞.

可以验证上述的重新定义的 GBCS 唯一确定了与例子一样的系统. 宏观状态目标集合为 $O = \Delta(S) \subset \mathcal{Y}$. 这就将例子完全的转化为一个特殊的 GBCS 的能控性问题.

在文献 [49] 中研究了类似 Markov 链极限分布能控性问题, 它可以对许多实际系统进行建模和分析, 比如机器人的空间分布控制、多个体环境监测控制、自主机器人编队等. 该文献没有考虑可能存在外部攻击者的情况, 如果要让系统稳定安全的运行, 我们有必要考虑这种情况. 此时可以使用上述例子给出的只有一个理性决策个体的 GBCS 来进行建模系统, 这个个体代表了可能存在的外部攻击者.

下面我们给出一个连续演化的 GBCS, 这是一个已经存在的模型, 但文献中并没有从 GBCS 的角度来研究这个问题. 它是关于 *HIV* 治疗的一个模型.

例 3.2 HIV (Human Immunodeficiency Virus) 的治疗一种在被很多人研究. 尽管 HIV 可以通过使用结合三种或更多种的抗逆转录药物的抗逆转录疗法来压制病毒的繁殖, 但它却不能够完全清除 HIV. 这使得人一旦感染了 HIV 对它的治疗就几乎是终身的长期治疗[50, 51]. 但是由于 HIV 可以很快的变异, 所以治疗的时间越长越会产生对药物抗性就. 同样人体的免疫系统也可以通过变异来压

制病毒, 这样就形成了病毒与免疫系统之间的一个博弈. 在文献 [50] 中, 作者提出了一个二人微分博弈来建模病毒与免疫系统的博弈过程. 参与者之一为在药物干预下的人体免疫系统, 另一个是 HIV. 人们通过这个模型可能寻找到一种药物治疗的方案使得人体中 HIV 长期稳定在一个满意的水平, 这样既不会对身体造成严重的伤害又可以长期压制病毒. 如果我们将药物治疗作为系统的一个高层输入, 则药物的作用就是干预 HIV 与免疫系统之间的博弈来调节系统状态, 这显然构成一个 GBCS. 研究这个系统的能控性就可以得到药物到底能多大程度的抑制病毒, 这对于治疗方案的需求有重要指导作用, 不考虑博弈的药物治疗的能控性问题已经有文献在研究[52, 53].

下面我们给出这个系统的具体模型. 系统的动态过程为[50]

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u_1(t), u_2(t), u(t), t), \qquad \text{... (3.2)}$$

其中 $u_1(t)$ 和 $u_2(t)$ 分别是免疫系统和 HIV 的输入策略, $u(t)$ 药物治疗的输入方案 (比如固定了几种抗逆转录药物, 则该输入为这些药物的不同组合以及剂量). 免疫系统和病毒的收益函数为

$$J_i(u_1, u_2, u) = \int_{t_0}^{t_f} L_i(x(t), u_1(t), u_2(t), u(t), t)dt. \qquad \text{... (3.3)}$$

关于系统中变量和具体细节可以参考文献 [50]. 治疗方案 $u(\cdot)$ 的目的是将系统的状态控制到想要的值或集合. 药物治疗一般是分疗程, 也即时间是有限的, 这里为 t_f. 因此, 这里研究的能控性可以刻画在一个疗程结束后系统可以达到哪些状态. 我们这里与文献 [50] 一样考虑开环控制.

同样我们也可以将上述 GBCS 的几个要素明确地表示出来. 具体如下:

1. 参与人集合 $\mathcal{N} = \{1, 2\}$;
2. 系统轨道空间 $\mathcal{X} = \{[0, t_f]$ 上的所有连续可微的函数$\}$, 系统宏观状态空间 $\mathcal{Y} = R^n$ 和系统初始态空间 $\mathcal{X}_0 = R^n$;
3. 非空策略空间 $\mathcal{U}_0 = \{u_0 : [0, T] \to D \subset R^m \mid u(\cdot)$ 关于时间 t 分段连续$\}$, $\mathcal{U}_i = \{u_i : [0, T] \to D \subset R^{m_i} \mid u(\cdot)$ 关于时间 t 分段连续$\}$, $i = 1, 2$;
4. 系统动态映射 T_D : $\mathcal{X}_0 \times \prod_{j=0}^{N} \mathcal{U}_j \to \mathcal{X}$, 即为系统初始态和控制输入到微分方程 3.2 解的映射;
5. 收益函数 J_1, J_2. J_i : $\mathcal{X} \times \prod_{j=0}^{N} \mathcal{U}_j \to R$, 即 3.3 中定义的收益函数, 很显然满足定义;

6. 系统轨道空间到宏观状态空间的映射 $T_R : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}, T_R(x(\cdot)) = x(t_f)$. 宏观状态目标集合为 R^n.

例 3.3 智能电网 (Smart Grid) 是一个自动化的电力传输网络, 它建立在集成的、高速双向通信网络的基础上, 通过快速感知和测量用户和电网节点的用电量, 实现电网的可靠、经济、高效地运行. 需求管理 (Demand Response Management, DRM) 是智能电网中的一个重要组成, 它通过实时定价实现电力市场中供给与需求的平衡, 同时可以降低用户的用电费用和电力公司的发电成本.

文献 [54–59] 通过博弈的方法来构建 DRM 实现相应的功能. DRM 中有 $N \geq 1$ 个用户和 $M \geq 1$ 个电力公司, 它们是博弈的所有参与者. 这些参与者进行如下的 Stackelberg 博弈: 给定有限的时间段 $[0, T]$, 在博弈一开始, 各个电力公司各自同时设定它们在这段时间的电力单价, 然后终端用户在得知这些价格后决定自己在这个时间段上从哪个电力公司购买多少电量. 在 DRM 中存在一些外部控制输入, 比如市场调控者的最高价格政策[55], 这些输入可以看成调控政策并为用户和电力公司所知, 它可以影响 DRM 的最终均衡.

下面我们具体来考虑这个系统的模型. 设调控政策为 $u(t), t \in [0, T]$, 电力公司 k 在时间 $[0, T]$ 上的设定价格为 $p_k(t), t \in [0, T]$, 用户 n 的收益函数为 $J_{user,n}(d_n(\cdot), T)$, 其中 $d_n(\cdot) = (d_{n,1}(\cdot), \cdots, d_{n,K}(\cdot))^T$, 通过优化 $J_{user,n}(d_n(\cdot), T)$ 得出从电力公司 k 处购买的电量为 $d_{n,k}(t) (t \in [0, T])$. 电力公司 n 通过优化它收益函数 $J_{gen,k}$ 来决定价格. 由于不同电力公司的价格设定会相互影响用户在电力公司购买的电量, 同时电力公司的价格设定是同时的而没有进行交流或协定, 因此电力公司之间进行价格选择的非合作博弈, 而用户只单纯的根据设定的价格进行优化. 设电力公司 k 的发电量 $s(t) \in R$ 满足如下微分方程

$$\dot{s}_i(t) = \overline{f}_i(s_i(t), p_i(t), d_{1,i}(t), \cdots, d_{N,i}(t), u_i(t), u(t)), \qquad \text{... (3.4)}$$

其中 $u_i(t)$ 是电力公司 i 的输入. 电力公司 i 的总收益为卖出电量的总收益减去发电成本, 由于有高层的调控, 有时还需要再加上调控因素, 比如补贴或税收等, 因此收益函数可以表示为

$$J_{gen,k} = \int_0^T \left(min\{s_i(t), \sum_{j=1}^{N} d_{j,i}(t)\} p_i(t) - C_i(u_i(t)) + K_i(u(t), s_i(t), u_i(t), p_i(t)) \right) dt. \qquad \text{... (3.5)}$$

由于用户之间不存在博弈而只是简单的优化, 因此它们的电力需求只是各个电力公司价格的函数, 设 $d_{k,n}(t) = r_{k,n}(p_1(\cdot), \cdot, p_K(\cdot))$. 将它们带入上述的动态方程 (3.4) 中可简化为

$$\dot{s}_i(t) = f_i(s_i(t), p_1(t), \cdots, p_N(t), u_i(t), u(t)), \qquad \text{... (3.6)}$$

其中 $f_i(\cdot) = \overline{f}_i(s_i, p_i, r_{1,i}(\cdot), \cdots, r_{N,i}(\cdot), u_i, u)$.

在这个模型中我们主要关注高层调控者的作用. 作为高层调控者, 它更关注系统的一些宏观状态, 比如总发电量、用户和电力公司的参与激励、清洁能源占比、发电产生有害物质的排放量等. 设这些宏观状态的动态过程为

$$\dot{x}(t) = f(x(t), s^F(t), p^F(t), u^F(t), u(t)), \qquad \text{... (3.7)}$$

其中 $s^F(t) = (s_1(t), \cdots, s_N(t))^T$, $p^F(t) = (p_1(t), \cdots, p_K(t))^T$ 和 $u^F(t) = (u_1^T(t), \cdots, u_N^T(t))^T$. 例如, 假设 $x(t)$ 的第一个分量 $x_1(t)$ 代表从 0 时刻到 t 时刻的发电总量, 则它满足

$$\dot{x}_1(t) = \sum_{j=1}^{N} s_j(t).$$

很显然由式 (3.5) 到 (3.7) 定义的系统是一个 GBCS, 研究它的能控性等价于研究高层调控者对这些宏观状态的调控能力, 这可以为宏观调控政策的制定提供参考和依据.

其他有关 GBCS 的例子, 比如目前研究比较多的智能交通运输、带领导节点的无人机编队、覆盖控制等例子, 我们不在此一一列举. 在接下来的几章我们将会就具体的 GBCS 的能控性进行深入研究, 并给出能控性的一些判定. 本文我们主要集中在连续时间的动态系统.

第 4 章　确定性 GBCS

4.1　导言

微分博弈起源于 20 世纪 50 年代美军开展的战机追逃问题的研究, 将最优控制的方法运用到连续时间动态博弈的求解中. 随后更多的人投入到微分博弈研究领域, 由于微分博弈种类的拓展和求解方法的多样与完善, 它被广泛应用到许多领域, 例如无线传感器网络、经济系统、供应链管理、环境科学等.

有时候这类微分博弈系统的纳什均衡结果并不令人满意甚至是很糟糕的结果, 此时需要外部或上层调控者进行干预以使系统宏观状态满足一定的要求. 很多这类系统中宏观调控者和下层决策个体都有自己的状态以及各自不同的演化规律, 下层理性决策个体有自身的利益追求. 宏观调控者的目的是调控宏观状态也即它自己的状态, 但由于不同个体的输入会影响到其他个体的状态演化. 因此宏观调控者在调控宏观状态时必须要考虑到下层博弈的影响, 这是一个典型的 GBCS. 本章我们考虑这类 GBCS, 给出它的数学模型并研究其能控性问题.

4.2　确定性 GBCS 数学模型

考虑下述有一个调控者和 L 个下层决策者的层级控制系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), x_1(t), \ldots, x_L(t), u_1(t), \ldots, u_L(t), u(t)), \\ \dot{x}_i(t) = f_i(t, x(t), x_1(t), \ldots, x_L(t), u_1(t), \ldots, u_L(t), u(t)), \\ x(0) = x_0,\ x_i(0) = x_{i,0},\ i = 1, 2, \ldots, L,\ t \in [0, T], \end{cases} \quad \text{... (4.1)}$$

其中 $x(t) \in R^n$ 表示系统的宏观状态, $x_i(t) \in R^{n_i}$ 和 $u_i(t) \in D_i \subset R^{m_i}$ 分别是下层决策个体 $i(i = 1, 2, \ldots L)$ 的状态和决策输入, $u(t) \in D \subset R^m$ 代表宏观调控者的策略输入.

为了符号表示的方便, 我们使用下列简写: $x^F(t) = (x_1(t)^T, \cdots, x_L(t)^T)^T$, 这是所有下层个体的状态构成的, 代表系统的微观状态, $X(t) = (x^T(t), x_1(t)^T, \cdots, x_L(t)^T)^T$ 表示包括系统宏观和微观的所有状态构成的系统整体状态.

这里我们考虑有限时间调控问题, 这在现实中是有很多实例的. 比如中国的五年计划、市场的一个短期调控、药物治疗的一个疗程等, 这些都是考虑有限时间的调控. 设调控时长为 $T > 0$, 每个下层决策个体由于有不同的利益追求, 我们用不同的收益函数来代表他们各自的利益. 决策个体 i 的收益函数为:

$$\begin{aligned} &J_i(u_1(\cdot), u_2(\cdot), \ldots, u_L(\cdot)) = \\ &K_i(x^F(T)) + \int_0^T L_i(X(\cdot), u_1(\cdot), u_2(\cdot), \ldots, u_L(\cdot))\, dt, \end{aligned} \qquad \text{... (4.2)}$$

其中函数 $K_i(\cdot)$ 和 $L_i(\cdots)$ $(i = 1, \cdots, L)$ 是关于各自变量的连续函数.

从上述收益函数可以看出, 决策个体 i 的收益会受到整个系统的状态 (包括宏观状态和其他个体的状态) 的影响, 这体现在函数 $L_i(\cdots)$ 依赖于系统整体状态 $X(t)$; 但微观个体 i 只关注他们同一层次个体的最终状态, 而不关心宏观状态, 因此终端收益只与微观状态有关. 这是一个比较符合现实情况的假设.

从第 3 章中最一般的 GBCS 模型可知, 系统的决策先后顺序为: 宏观调控者首先给出它在整个时间段 $[0, T]$ 上的输入策略 $u(\cdot)$, 然后是下层决策个体进行博弈. 也即整个系统可能出现的博弈集合是由宏观调控者的输入参数化的, 宏观调控者通过输入来决定下层决策个体要进行哪个博弈. 作为 GBCS 的初步研究, 我们这里考虑下层个体进行同一层次的非合作微分博弈. 如果要进一步的研究, 可以在这些下层个体中再引入拓扑或层次结构. 这里我们考虑开环策略, 也即下层决策个体的输入只与时间和系统初值有关, 详细定义参见第 2 章, 并假定系统动态和个体收益函数为共同知识.

给定宏观调控者的一个输入策略 $u(\cdot)$, 系统成为 L 人微分博弈, 如果博弈存在一个唯一的开环纳什均衡 $(u_1^*, u_2^*, \ldots, u_L^*)$, 则系统的动态过程为

$$\begin{cases} \dfrac{dx^*(t)}{dt} = f(t, X^*(t), u_1^*(t), \cdots, u_L^*(t), u(t)), \\ \dfrac{dx_i(t)}{dt} = f_i(t, X^*(t), u_1^*(t), \cdots, u_L^*(t), u(t)), \\ x^*(0) = x_0,\ x_i(0) = x_{i,0},\ i = 1, 2, \cdots, L, \end{cases} \qquad \text{... (4.3)}$$

从上述分析可以看出, 系统的动态过程被宏观调控者的控制输入决定从而决定系统状态的演化. 因此, 宏观调控者是通过对下层个体参与的博弈进行干预从而间接地对系统宏观状态进行调控.

对于宏观调控者来说, 它更加关注一段时间的调控后系统的宏观状态是否达到了目标值. 我们可以认为宏观调控者使用系统宏观状态末值来评价纳什均

衡的好坏, 达到目标的均衡才是好的. 这激发我们引入如下的纳什均衡的能控性概念.

定义 4.1 由 (4.1) 和 (4.2) 定义的 GBCS 称为是能控的, 如果对于任何给定的系统初值 $x(0) = x_0 \in R^n$, $x_i(0) = x_{i,0} \in R^{n_i}, i = 1, 2, \ldots, L$ 和系统宏观状态的末值 $x(T) = x_T \in R^n$, 存在一个宏观输入策略 $u(t)(t \in [0, T])$, 使得下层 L 个个体的微分博弈存在唯一的纳什均衡并且系统 (4.3) 的解 $x^*(t)$ 满足 $x^*(T) = x_T$.

在这个定义中初始状态是系统的整体状态, 而要求的末值状态仅为系统的宏观状态. 这是因为系统的微观状态可能从任何初始值开始, 不同的微观初始态导致不同的宏观状态的演化. 因此, 如果宏观调控者想将宏观状体调到指定的目标值, 它必须考虑所有可能的系统整体初始状态.

4.3　一般非线性 GBCS 能控性判定

我们假设宏观调控者和下层决策个体 i 的允许控制集分别为:

$$
\begin{aligned}
&u(\cdot) \in U \triangleq \{u : [0, T] \to D \subset R^m \mid u(\cdot) \text{ 关于时间 t 分段连续}\} \\
&u_i(\cdot) \in U_i \triangleq \{u : [0, T] \to D_i \subset R^{m_i} | u_i(\cdot) \text{关于时间 t 分段连续}\},
\end{aligned}
\qquad \text{... (4.4)}
$$

微分方程 (4.1) 可以重写为如下形式:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dX(t)}{dt} = \widetilde{f}(t, X(t), u_1(t), u_2(t), \ldots, u_L(t), u(t)), \\
X(0) = X_0,
\end{cases}
\qquad \text{... (4.5)}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
&X(t) = [x^T(t), x_1^T(t), \cdots, x_L^T(t)]^T, \\
&\widetilde{f}(t, X(t), u_1(t), u_2(t), \ldots, u_L(t), u(t)) = \\
&\qquad \begin{bmatrix}
f(t, x(t), x_1(t), \ldots, x_L(t), u_1(t), \cdots, u_L(t), u(t)) \\
f_1(t, x(t), x_1(t), \ldots, x_L(t), u_1(t), \cdots, u_L(t), u(t)) \\
\vdots \\
f_L(t, x(t), x_1(t), \ldots, x_L(t), u_1(t), \cdots, u_L(t), u(t))
\end{bmatrix}.
\end{aligned}
\qquad \text{... (4.6)}
$$

对于一般非线性 GBCS, 我们需要引入一些合理的假设.

(A1) 所有函数 $\widetilde{f}$, K_i, L_i 都是连续函数; $\widetilde{f}(t, X, u_1, u_2, \cdots, u_L, u)$ 关于 X 是连续可微的; $\widetilde{f}_X$ 是连续函数; 并且 $K_i(x^F)$ 和 $L_i(t, X, u_1, u_2, \cdots, u_L, u)$ 分别关于 x^F 和 X 是连续可微的.

在上述假设成立的条件下, 对于任意给定的 $u(\cdot) \in U$, $u_i(\cdot) \in U_i, i = 1, 2, \cdots, L$ 和系统状态初始值, 方程 (4.5) 在 $[0, T]$ 上存在唯一解.

引进下面的 L 个哈密尔顿 (Hamiltonian) 量:

$$H_i(t, X, u_1, \cdots, u_L, u, q_i) \triangleq$$
$$< q_i, \widetilde{f}(t, X, u_1, \cdots, u_L, u) > -L_i(t, X, u_1, \cdots, u_L),$$

其中 $i = 1, 2, \cdots, L$.

如文献 [60, 380 页, (A2)] 类似的假设, 我们给出如下假设.

(A2) 对任意 $(t, X) \in [0, T] \times R^N$, $u(\cdot) \in U$ 和任意向量 $q_1, \cdots, q_L \in R^N$, 存在唯一的 $(u_1^*, \cdots, u_L^*) \in D_1 \times \cdots \times D_L$ 满足

$$u_i^* = \underset{u_i \in D_i}{arg\ min}\ H_i(t, X, u_1^*, \cdots, u_{i-1}^*, u_i, u_{i+1}^*, \cdots, u_L^*, u, q_i)$$

其中 $i = 1, 2, \cdots, L$, 对应的映射为

$$(t, X, q_1, \cdots, q_L, u(\cdot)) \to$$
$$(u_1^*(t, X, q_1, \cdots, q_L, u(\cdot)), \cdots, u_L^*(t, X, q_1, \cdots, q_L, u(\cdot))).$$

对于仿射非线性系统, 有一些简单的条件可以使得假设成立 (A1) 和 (A2)[60].

如果假设 (A2) 成立并且对于 $u(t), t \in [0, T]$, $X(0) = X_0$ 下层决策个体构成的微分博弈纳什均衡 $(u_1^*(\cdot), \cdots, u_L^*(\cdot))$ 存在, 则使用极大值原理我们可以得到:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \widetilde{f}(t, X(t), u_1^*(t), \ldots, u_L^*(t), u(t)), \\ \dot{q}_i(t) = -(\widetilde{f}_X)^T(t, X(t), u_1^*(t), \ldots, u_L^*(t), u(t))q_i(t) + \\ \qquad (L_i)_X(t, X(t), u_1^*(t), \ldots, u_L^*(t), u(t)), \\ X(0) = X_0,\ q_i(T) = (\widetilde{K}_i)_X(X(T)),\ i = 1, \cdots, L, \end{cases} \quad \text{... (4.7)}$$

其中 $\widetilde{K}_i(X) = K_i(x^F)$.

由于方程 (4.7) 中的均衡控制输入 $u_i^*, i = 1, \cdots, L$ 是关于 $t, X, q_1, \cdots, q_L, u(\cdot)$ 的函数, 我们可以将式 (4.7) 中的函数重写为如下形式:

$$F(t, X(t), q_1(t), \ldots, q_L(t), u(t)) \triangleq \widetilde{f}(t, X(t), u_1^*(t), \ldots, u_L^*(t), u(t)),$$
$$F_X^T(t, X(t), q_1(t), \ldots, q_L(t), u(t)) \triangleq (\widetilde{f}_X)^T(t, X(t), u_1^*(t), \ldots, u_L^*(t), u(t)),$$
$$Q_i(t, X(t), q_1(t), \ldots, q_L(t), u(t)) \triangleq (L_i)_X(t, X(t), u_1^*(t), \ldots, u_L^*(t), u(t)),$$
$$Q_{iT}(X) \triangleq (\widetilde{K}_i)_X(X), i = 1, \cdots, L.$$

(A3) 对任意宏观输入策略 $u(\cdot) \in U$ 和系统初始值 X_0, 由式 (4.1) 和 (4.2) 定义的微分博弈存在纳什均衡.

需要注意在我们上面的模型中, 宏观调控者的输入 $u(\cdot) \in U$ 是分段连续的开环控制, 也即它是关于时间 t 的分段连续函数. 因此, 使用研究时变非线性系统最优控制存在的类似方法, 比如参考文献 [61, 62], 我们可以研究上述微分博弈纳什均衡的存在性问题. 尤其当决策个体的收益函数是凸函数时, 使用结论 [60, Theorem A.9], 在某些情况下可以得到纳什均衡存在等价为正倒向微分方程 (4.7) 解的存在. 此时, 我们可以在下面关于非线性 GBCS 能控性的定理中去掉假设 (A3). 一般我们可以使用动态规划的方法来研究纳什均衡的存在性, 其把均衡的存在性问题转化为 Hamilton-Jacobi-Isaacs 方程粘滞解的存在性问题[63, 64].

正如我们前面提到的, 我们只关心 GBCS 宏观状态 $x(t)$ 的能控性, 它只是方程 (4.6) 中状态 $X(t)$ 的前 n 个分量. 当我们使用极大值原理来求解下层个体形成的微分博弈的纳什均衡时, 我们会得到一个以系统状态 $x(t)$ 为正向过程 $\{p_i(t) : i = 1, \cdots, L\}$ 为倒向过程的正倒向微分方程. 这个方程不仅与纳什均衡的存在性有关, 还刻画了当系统处于均衡时系统状态的演化过程. 因此它对我们研究宏观调控者的能控性有紧密关系, 这激发我们引入如下关于正倒向随机微分方程部分能控性的定义.

定义 4.2 耦合的正倒向微分方程 (4.7) 称为部分能控的, 如果对任何初始值 X_0 和任意的末值 $x_T \in R^n$, 存在控制输入 $u(t)$, 使得方程 (4.7) 存在唯一解 $x(\cdot)$ 并满足 $x(T) = x_T$.

下面给出一般非线性 GBCS 能控性的刻画.

定理 4.1 如果 (4.1) 和 (4.2) 定义的 GBCS 满足假设 (A1), (A2) 和 (A3), 则该 GBCS 是能控的当且仅当下述正倒向微分方程是部分能控的:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = F(t, X(t), q_1(t), \ldots, q_L(t), u(t)), \\ \dot{q}_i(t) = Q_i(t, X(t), q_1(t), \ldots, q_L(t), u(t)) \\ \qquad\qquad - F_X^T(t, X(t), q_1(t), \ldots, q_L(t), u(t)) q_i(t), \\ X(0) = X_0,\ q_i(T) = Q_{iT}(X(T)),\ i = 1, \cdots, L. \end{cases} \quad \text{... (4.8)}$$

对于一般非线性的 GBCS, 由于上述正倒向微分方程是高度耦合和非线性的, 我们很难得到显示的关于能控性的判定条件. 但我们将对 GBCS 的能控性转化为关于正倒向微分方程的部分能控性问题, 这对进一步的研究提供了基础, 下面关于线性 GBCS 就是运用了相应的结果.

4.4 线性 GBCS 能控性判定

考虑下述有一个上层宏观调控者和 L 个下层决策个体的线性二次非合作微分博弈:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} =A(t)x(t) + \displaystyle\sum_{i=1}^{L} A_i(t)x_i(t) + \sum_{i=1}^{L} D_i(t)u_i(t) + B(t)u(t), \\ \dfrac{dx_i(t)}{dt} =E_i(t)x(t) + \displaystyle\sum_{j=1}^{L} F_{ij}(t)x_i(t) + \sum_{j=1}^{L} B_{ij}(t)u_j(t) + B_i(t)u(t), \\ x(0) =x_0,\ x_i(0) = x_{i,0}\ (i = 1, 2, \ldots, L). \end{cases} \quad \text{... (4.9)}$$

个体 $i(i = 1, 2, \ldots, L)$ 通过选择输入策略 $u_i(\cdot)$ 最小化的收益函数为:

$$\begin{aligned} J_i(u_1(\cdot), u_2(\cdot), \ldots, u_L(\cdot)) = & \frac{1}{2} x^F(T)^T Q_{iT} x^F(T) \\ & + \frac{1}{2}\int_0^T [X^T(t)Q_i(t)X(t) + u_i^T(t)R_i(t)u_i(t)]\, dt, \end{aligned} \quad \text{... (4.10)}$$

其中, 对任意 $t \in [0, T]$, $R_i(t) > 0$, $Q_i(t)$ 和 Q_{iT} 对称, 矩阵 $A(t)$, $B(t)$, $A_i(t)$, $B_i(t)$, $C_i(t)$, $E_i(t)$, $F_i(t)$, $Q_i(t)$, $R_i(t)$, $i = 1, 2, \cdots, L$ 的所有元素是关于时间的分段光滑函数, 向量 x, x_i, u, u_i 的维数分别为 n, n_i, m, m_i.

这是对应于一般非线性 GBCS (4.1) 和 (4.2) 的线性 GBCS. 模型中下层决策个体的收益函数不直接依赖于其他决策个体的输入. 在许多的使用微分博弈来建模的控制系统中比较常见. 每个个体的收益函数直接受自己控制影响, 但可以通过影响系统状态间接的影响其他个体的收益, 比如文献 [65] 中的多个体防碰撞系统.

4.4.1 主要定理

从定理 4.1 可知, GBCS 的能控性等价于正倒向微分方程 (4.8) 的部分能控性. 为了将线性 GBCS 对应的正倒向微分方程写成更紧凑的形式, 我们引入如

下的一些记号:

$$\overline{A}(t)=\begin{bmatrix}\widetilde{A}(t) & \widetilde{B}_1(t)R_1^{-1}(t)\widetilde{B}_1^T(t) & \dots & \widetilde{B}_L(t)R_L^{-1}(t)\widetilde{B}_L^T(t)\\ Q_1(t) & -\widetilde{A}^T(t) & \dots & 0_{N\times N}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ Q_L(t) & 0_{N\times N} & \dots & -\widetilde{A}^T(t)\end{bmatrix},$$

$$\overline{B}(t)=\begin{bmatrix}\widetilde{B}(t)\\ 0_{N\times m}\\ \vdots\\ 0_{N\times m}\end{bmatrix},\ N=n+\sum_{i=1}^{L}n_i, \qquad \text{... (4.11)}$$

其中

$$\widetilde{A}(t)=\begin{bmatrix}A(t) & A_1(t) & \dots & A_L(t)\\ E_1(t) & F_{11}(t) & \dots & F_{1L}(t)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ E_L(t) & F_{L1}(t) & \dots & F_{LL}(t)(t)\end{bmatrix},$$

$$\widetilde{Q}_{iT}=\begin{bmatrix}0_{n\times n} & 0_{n\times(N-n)}\\ 0_{(N-n)\times n} & Q_{iT}\end{bmatrix} \qquad \text{... (4.12)}$$

$$\widetilde{B}(t)=\begin{bmatrix}B(t)\\ B_1(t)\\ \vdots\\ B_L(t)\end{bmatrix},\ \widetilde{B}_i(t)=\begin{bmatrix}D_i(t)\\ B_{1i}(t)\\ \vdots\\ B_{Li}(t)\end{bmatrix}.$$

线性 GBCS 对应的正倒向微分方程 (4.8) 也是线性的, 其可以写成如下形式:

$$\dot{\overline{X}}(t)=\overline{A}(t)\overline{X}+\overline{B}u(t),$$

其中 $\overline{X}(t)=(X^T(t),q_1^T(t),\cdots,q_L^T(t))^T$. 因此, 上面定义中的矩阵 $\overline{A}(t)$ 恰好是系统 (4.8) 的系统矩阵, 而矩阵 $\overline{B}(t)$ 为控制矩阵.

下面给出线性 GBCS 的一些基本假设.

(A1) 当 GBCS (4.9)-(4.10) 宏观调控输入为零, 也即 $u(t)=0, t\in[0,T]$, 对任意的系统初始值 $x_0, x_{i,0}(i=1,2,\dots,L)$, 下层 L 个决策个体构成的线性二次微

分博弈 (4.9)-(4.10) 存在一个开环的纳什均衡.

这个假设是指, 当没有宏观策略进行调控时, 下层个体构成的微分博弈是存在均衡的, 这是一个很合理的假设. 因为宏观调控者是通过调控下面决策个体形成的纳什均衡来对系统状态进行调控的. 如果下层纳什均衡都不存在, 则对于宏观调控者而言很难预测下层个体的行为, 也就无从谈调控.

(A2) 下述 *Riccati* 微分方程组在 $[0,T]$ 上存在对称解 K_j, $j=1,2,\cdots,L$:

$$\begin{cases} \dot{K}_j(t) = -\widetilde{A}^T K_j - K_j\widetilde{A} - Q_j + K_j\widetilde{S}_j K_j, \\ K_j(T) = \widetilde{Q}_{jT}, \end{cases} \quad \text{... (4.13)}$$

其中 $\widetilde{S}_j = \widetilde{B}_j R_j^{-1}\widetilde{B}_j^T$.

注释 4.1 从文献 [66, Page 269, Note 2] 可知, 如果假设 (A1) 成立, 则上述 *Riccati* 微分方程组在 $(0,T]$ 而不是 $[0,T]$ 上存在对称解. 上述 *Riccati* 微分方程组存在解的假设在线性二次最优控制中属于一般假设, 当矩阵 $Q_i(t)$, Q_{iT}, $(i=1,2,\cdots,L)$ 为正定矩阵时, 假设 (A2) 自动成立.

定义系统转移矩阵 $\Phi(t)$ 为:

$$\begin{cases} \dfrac{d\Phi(t)}{dt} = -\Phi(t)\overline{A}(t), \\ \Phi(0) = I_{(L+1)N}, \end{cases} \quad \text{... (4.14)}$$

系统能控性 *Gramian* 矩阵 W 为:

$$W(T) = \int_0^T \Phi(t)\overline{B}(t)\overline{B}^T(t)\Phi^T(t)\,dt. \quad \text{... (4.15)}$$

定理 4.2 设线性 GBCS (4.9)-(4.10) 满足假设 (A1) 和 (A2). 则该 GBCS 是能控的当且仅当下面的矩阵是满秩的:

$$\left[\begin{bmatrix} 0_{N\times(LN)} \\ I_{NL} \end{bmatrix}, \Phi(T)Q_T\begin{bmatrix} 0_{n\times(N-n)} \\ I_{N-n} \end{bmatrix}, W(T)\right], \quad \text{... (4.16)}$$

其中

$$Q_T = \begin{bmatrix} I_N \\ \widetilde{Q}_{1T} \\ \vdots \\ \widetilde{Q}_{LT} \end{bmatrix} \in R^{(L+1)N\times N}. \quad \text{... (4.17)}$$

考虑如下不含微观状态的特殊 GBCS:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + \displaystyle\sum_{i=1}^{L} B_i(t)u_i(t) + B(t)u(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad \text{... (4.18)}$$

个体 $i(i = 1, 2, \ldots, L)$ 通过选择输入策略 $u_i(\cdot)$ 最小化的收益函数为:

$$J_i(u_1(\cdot), u_2(\cdot), \ldots, u_L(\cdot)) = \int_0^T [x^T(t)Q_i(t)x(t) + u_i^T(t)R_i(t)u_i(t)]\, dt, \quad \text{... (4.19)}$$

上述判定性定理可以简化为下述推论[67].

推论 4.1 设 GBCS (4.18)-(4.19) 满足假设 (A1) 和 (A2), 则该 GBCS 是能控的当且仅当下面的矩阵是满秩的:

$$\left[\begin{bmatrix} 0_{N\times(LN)} \\ I_{NL} \end{bmatrix}, W(T)\right]. \quad \text{... (4.20)}$$

证明: GBCS (4.18)-(4.19) 是 GBCS (4.9)-(4.10) 的特殊情况, 即 $n_i = 0, Q_{iT} = 0, i = 1, \cdots, L$, 和 $N = n$. 因此在简化的 GBCS 中没有下述矩阵

$$\Phi(T)Q_T \begin{bmatrix} 0_{n\times(N-n)} \\ I_{N-n} \end{bmatrix}.$$

所以, 矩阵 (4.16) 满足等价于矩阵 (4.20) 满秩.

注释 4.2 如果 GBCS (4.18)-(4.19) 中的矩阵 $B_i = 0, i = 1, \cdots, L$, 此时系统动态不受下层个体输入的影响, 直观上该系统退化为经典的线性控制系统. 很容易验证上述秩判定条件也自动退化为经典线性控制理论中线性控制系统能控性的条件.

对于线下定常系统我们可以得出更加简洁的判定, 而无需计算系统转移矩阵. 此时矩阵 $A(t), B(t), A_i(t), B_i(t), C_i(t), E_i(t), F_i(t), Q_i(t), F_i(t)(i = 1, 2, \ldots, L)$ 均与时间 t 无关, 将它们分别记为 $A, B, A_i, B_i, C_i, E_i, F_i, Q_i, R_i(i = 1, 2, \ldots, L)$.

定理 4.3 设线性 GBCS (4.9)-(4.10) 是定常的并且满足假设 (A1) 和 (A2). 则该 GBCS 是能控的当且仅当下述秩条件:

$$rank(Q_C) = N, \quad \text{... (4.21)}$$

其中

$$
\begin{aligned}
Q_C &= \begin{bmatrix} Q_{C1},\ Q_{C2} \end{bmatrix}, \\
Q_{C1} &= \begin{bmatrix} \widetilde{B}, \widetilde{A}\widetilde{B}, \widetilde{A}^2\widetilde{B} + P_1, \cdots, \widetilde{A}^{(L+1)N-1}\widetilde{B} + P_{(L+1)N-2} \end{bmatrix}, \\
P_k &= \begin{bmatrix} I_N\ 0 \end{bmatrix} \overline{A}^{k+1}\overline{B} - \widetilde{A}^{k+1}\widetilde{B}, \\
Q_{C2} &= \begin{bmatrix} I_N\ 0 \end{bmatrix} e^{-\overline{A}T} Q_T \begin{bmatrix} 0_{n\times(N-n)} \\ I_{N-n} \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

矩阵 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 对应于式 (4.11) 中的时不变矩阵.

对于没有系统微观状态的定常 GBCS, 我们可以得到更简洁的结论.

推论 4.2 设线性 GBCS (4.9)-(4.10) 是定常的并且没有系统微观状态, 也即 $n_i = 0, i = 1, \cdots, L$. 在假设 (A1) 和 (A2) 成立的条件下, 该 GBCS 是能控的当且仅当下述秩条件成立:

$$rank(Q_{C1}) = n.$$

此时对任意的 $s \in \Lambda(\overline{A})$ 我们有:

$$rank(\begin{bmatrix} A - sI_n, B_1R_1^{-1}B_1^T, \cdots, B_LR_L^{-1}B_L^T, B \end{bmatrix}) = n. \qquad ... (4.22)$$

注释 4.3 很容易验证对于没有系统微观状态 ($n_i = 0, i = 1, \cdots, L$) 的二阶 ($n = 2$) GBCS 我们有下面结论:

$$(A, B) \text{ 是能控的 } \Rightarrow\ GBCS \text{ 是能控的.} \qquad ... (4.23)$$

但一般情况下, 没有下层决策个体参与的系统能控性, 也即 (A, B) 的能控性, 与原 GBCS 的能控性之间没有直接的关系. 例如, 考虑下面具有一个宏观调控者和一个下层决策个体的 GBCS:

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, L = 1,
$$

$$
Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, R_1 = 1, n_i = 0,
$$

可以验证 (A, B) 是能控的, 但是 $(Q_{C1}) = 2 < 3$, 也即 GBCS 是不能控的. 反之考虑下面具有一个宏观调控者和一个下层决策个体的 GBCS:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, L = 1,$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, R_1 = 1, n_1 = 0,$$

很明显 (A, B) 是不能控的, 但 $(Q_{C1}) = 2$, 也即 GBCS 是能控的. 由此可知, 对于某些线性控制系统, 如果不是不能控的, 但通过引入适当的博弈参与者可能使得系统变得是能控的了. 但由上一个例子也可知, 对于可控的系统引入博弈也可能导致变得不可控.

4.4.2 实例

考虑以已经被许多人研究的最优经济稳定政策 (optimal economic stabilization policies) 问题[68–70]. 在许多国家, 宏观经济政策是由不同部门制定和实施的, 而这些部门有各自的利益追求, 因此它们之间可能存在利益冲突. 对这类问题常常可以使用动态博弈来建模和研究. 文献 [68] 用线性二次离散动态博弈来研究最优经济稳定政策在参考点附近的动态过程. 其对应的连续时间模型为

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^{k} B_i u_i(t) + Cz(t), \qquad \text{... (4.24)}$$

其中 $u_i (i = 1, \cdots, k)$ 是不同部门的相应控制变量, 它们通过制定自己的政策来最小化各自的损失函数

$$J_i = \int_0^T \Big(x^T(t) Q_i x(t) + u_i^T(t) R_i u_i(t) \Big) dt. \qquad \text{... (4.25)}$$

这上述模型中, $z(t)$ 属于所有部门都知道的公共政策或法律. 已知的文献一般都研究在给定 $z(t)$ 后不同部门为达成什么样的均衡政策. 很显然, 不同的 $z(t)$ 会导致不同的纳什均衡从而得到不同的系统状态演化. 在不同的经济环境中, 宏观调控者可能为了实现不同的宏观经济目标而制定和实施不同的公共政策 $z(t)$, 宏观经济指标可以用系统的状态来表示. 给定任意的宏观经济指标, 是否存在相应的公共政策 $z(t)$ 来达到这一指标的问题对宏观调控者来说很重要. 这正是 GBCS (4.24)-(4.25) 的能控性问题.

系统中的矩阵可以通过经济数据得到, 从而可以应用上一节的能控性判定来解决这个问题, 在此我们不给出具体的计算过程.

4.4.3 主要定理证明

这部分我们给出定理的证明. 在证明之前, 我们先来分析线性 GBCS.

暂时假定对 $u(t)(t\in[0,T])$ 和系统初始状态 $x_0, x_{i,0}(i=1,2,\ldots,L)$, 下层决策个体之间形成的微分博弈存在唯一的开环纳什均 $(u_1^*(\cdot),u_2^*(\cdot),\cdots,u_L^*(\cdot))$. 则根据极大值原理, Hamiltonian 量

$$H_i=\frac{1}{2}(X^TQ_iX+u_i^TR_iu_i)+\phi_i^T(\widetilde{A}X+\sum_{j=1}^{L}\widetilde{B}_ju_j+\widetilde{B}u) \qquad ...\ (4.26)$$

被 u_i^* ,$(i=1,\cdots,L)$ 最小化, 因此

$$u_i^*(t)=R_i^{-1}(t)\widetilde{B}_i^T(t)\phi_i(t), i=1,2,\cdots,L \qquad ...\ (4.27)$$

其中 $\phi_i(t), i=1,2,\cdots,L$ 是满足如下方程的伴随变量:

$$\begin{cases}\dot{\phi}_i(t)=Q_i(t)X(t)-\widetilde{A}^T(t)\phi_i(t),\\ \phi_i(T)=\widetilde{Q}_{iT}X(T),\ i=1,2,\cdots,L,\end{cases} \qquad ...\ (4.28)$$

和

$$\begin{cases}\dot{X}(t)=\widetilde{A}(t)X(t)+\sum_{i=1}^{L}\widetilde{B}_i(t)u_i^*(t)+\widetilde{B}(t)u(t),\\ X(0)=X_0\end{cases} \qquad ...\ (4.29)$$

将方程 (4.27)-(4.29) 合在一起, 我们就得到了描述系统在纳什均衡处的的动态方程:

$$\begin{cases}u_i^*(t)=R_i^{-1}(t)\widetilde{B}_i^T(t)\phi_i(t),\\ \dot{X}(t)=\widetilde{A}(t)X(t)+\sum_{i=1}^{L}\widetilde{B}_i(t)u_i^*(t)+\widetilde{B}(t)u(t),\\ \dot{\phi}_i(t)=Q_i(t)X(t)-\widetilde{A}^T(t)\phi_i(t),\\ X(0)=X_0,\ \phi_i(T)=\widetilde{Q}_{iT}X(T),\ i=1,2,\cdots,L\end{cases} \qquad ...\ (4.30)$$

其中 $X(t)=(x^T(t),x_1^T(t),\cdots,x_L^T(t))^T$.

为了得到更加紧凑的表示, 我们引入如下定义或记号:

$$\begin{aligned}
\widetilde{S}(t) &= [\widetilde{S}_1(t), \cdots, \widetilde{S}_L(t)] \\
&= [\widetilde{B}_1(t)R_1^{-1}(t)\widetilde{B}_1^T(t), \cdots, \widetilde{B}_L(t)R_L^{-1}(t)\widetilde{B}_L^T(t)], \\
\widetilde{P}(t) &= \overbrace{\begin{bmatrix} -\widetilde{A}^T(t) & & \\ & \ddots & \\ & & -\widetilde{A}^T(t) \end{bmatrix}}^{L}, \\
\widetilde{Q}(t) &= [Q_1^T(t), \cdots, Q_L^T(t)]^T, \\
\widetilde{Q}_T &= [\widetilde{Q}_{1T}^T, \cdots, \widetilde{Q}_{LT}^T]^T, \\
\phi(t) &= [\phi_1^T(t), \cdots, \phi_L^T(t)]^T.
\end{aligned} \quad \text{... (4.31)}$$

因此, (4.30) 可以被改写为:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \widetilde{A}(t)X(t) + \widetilde{S}(t)\phi(t) + \widetilde{B}(t)u(t), \\ \dot{\phi}(t) = \widetilde{Q}(t)X(t) + \widetilde{P}(t)\phi(t), \\ X(0) = X_0, \ \phi(T) = \widetilde{Q}_T X(T), \end{cases} \quad \text{... (4.32)}$$

这是一个正倒向微分方程.

为了证明主要定理, 我们先给出一些重要命题.

命题 4.1 考虑正倒向微分方程

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)Y(t) + c(t), \\ \dot{Y}(t) = C(t)X(t) + D(t)Y(t) + d(t), \\ X(0) = X_0, \ Y(T) = Q_T X_T, \ 0 \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \quad \text{... (4.33)}$$

其中 $X(t) \in R^n$, $Y(t) \in R^m$, 对任意初值 X_0 方程 (4.33) 存在唯一解当且仅当下面的矩阵非奇异:

$$\begin{bmatrix} I_n, 0 \end{bmatrix} \Phi^{-1}(T, 0) \begin{bmatrix} I_n \\ Q_T \end{bmatrix}, \quad \text{... (4.34)}$$

其中 $\Phi(t, s)$ 是系统转移矩阵, 也即

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi(t, s)}{\partial t} = E(t)\Phi(t, s) \\ \Phi(s, s) = I_{(n+m)} \end{cases}, E(t) = \begin{bmatrix} A(t) & B(t) \\ C(t) & D(t) \end{bmatrix}. \quad \text{... (4.35)}$$

证明 下面的证明类似于文献 [66, Page 267] 的思路. 设

$$v \triangleq \int_0^T \Phi(T,t)\begin{bmatrix} c(t) \\ d(t) \end{bmatrix} dt \in R^{m+n}.$$

容易验证对任意初值 X_0 方程 (4.33) 有解当且仅当

$$(P + Q\Phi(T,0))Z(0) + Qv = \begin{bmatrix} X_0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{... (4.36)}$$

对任意初值 X_0 是可解的, 其中

$$P = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0_m \end{bmatrix},\ Q = \begin{bmatrix} 0_n & 0 \\ -Q_T & I_m \end{bmatrix},\ Z(t) = \begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix}.$$

记

$$Z = \Phi(T,0)Z(0),\ [W_1, W_2] = [I_n, 0_{n\times m}]\Phi^{-1}(T,0),$$

可知对任意初值 X_0, (4.36) 可解等价于方程

$$\begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ -Q_T & I_m \end{bmatrix} Z = \begin{bmatrix} X_0 \\ V \end{bmatrix}$$

对任意 X_0 是可解的, 其中 V 是 Qv 的后 m 个分量. 该方程的可解性进一步可以等价为下面的方程对任意 X_0 是可解的:

$$\begin{bmatrix} I_n & -W_2 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ -Q_T & I_m \end{bmatrix} Z = \begin{bmatrix} I_n & -W_2 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_0 \\ V \end{bmatrix},$$

也即

$$WZ_1 \triangleq (W_1 + W_2 Q_T)Z_1 = \begin{bmatrix} W_1, W_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n \\ Q_T \end{bmatrix} Z_1 = \overline{X}_0$$

对任意的 $\overline{X}_0$ 是可解的. 这意味着 W 非奇异, 但是

$$W = \begin{bmatrix} I_n, 0 \end{bmatrix}\Phi^{-1}(T,0)\begin{bmatrix} I_n \\ Q_T \end{bmatrix},$$

所以存在性得证.

对于任意 X_0, 我们使用反证法证明方程 (4.33) 的解唯一. 假设解不唯一, 则存在两个不同的解, 分别记为 $(X^1(\cdot), Y^1(\cdot))$ 和 $(X^2(\cdot), Y^2(\cdot))$. 由线性微分方程的

理论可知 $X^1(T) \neq X^2(T)$ 并且

$$\Phi(T,0)\begin{bmatrix} X_0 \\ Y^1(0) \end{bmatrix} + v = \begin{bmatrix} X^1(T) \\ Q_T X^1(T) \end{bmatrix},$$

$$\Phi(T,0)\begin{bmatrix} X_0 \\ Y^2(0) \end{bmatrix} + v = \begin{bmatrix} X^2(T) \\ Q_T X^2(T) \end{bmatrix}.$$

将上述两个等式左右分别相减可得

$$\Phi(T,0)\begin{bmatrix} 0 \\ Y^1(0) - Y^2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X^1(T) - X^2(T) \\ Q_T(X^1(T) - X^2(T)) \end{bmatrix},$$

因此

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} I_n, 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ Y^1(0) - Y^2(0) \end{bmatrix} \\ =&\begin{bmatrix} I_n, 0 \end{bmatrix}\Phi(T,0)^{-1}\begin{bmatrix} X^1(T) - X^2(T) \\ Q_T(X^1(T) - X^2(T)) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

通过简单的代数运算可以得到

$$\begin{aligned} 0 =&\begin{bmatrix} I_n, 0 \end{bmatrix}\Phi(T,0)^{-1}\begin{bmatrix} I_n \\ Q_T \end{bmatrix}(X^1(T) - X^2(T)) \\ =&W(X^1(T) - X^2(T)). \end{aligned}$$

但 W 是可逆的, 因此 $X^1(T) - X^2(T) = 0$. 这与 $X^1(T) \neq X^2(T)$ 矛盾, 所以唯一性得证. □

命题 4.2 考虑如下的仿射线性二次微分博弈:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + \sum_{i=1}^{L} B_i(t)u_i(t) + c(t), \\ x(0) = x_0 \ (\in R^n), \end{cases} \quad \text{... (4.37)}$$

每个 $u_j(\cdot)$ 试图最小化如下收益函数:

$$\begin{aligned} J_j(u_j(\cdot)) = &\frac{1}{2}\int_0^T [x^T(t)Q_j(t)x(t) + u_j^T(t)R_j(t)u_j(t)]dt \\ &+ \frac{1}{2}x^T(T)Q_{jT}x(T), \end{aligned} \quad \text{... (4.38)}$$

其中 $R_i(\cdot) > 0$ 并且 Q_i, Q_{iT} 是对称的, $i = 1, 2, \cdots, L$. 假设下面的 L 个 Riccati 方程在 $[0, T]$ 上存在一组对称解 K_j:

$$\begin{cases} \dot{K}_j(t) = -A^T K_j - K_j A - Q_j + K_j S_j K_j, \\ K_j(T) = Q_{jT},\ j = 1, 2, \cdots, L, \end{cases} \quad \text{... (4.39)}$$

其中 $S_i(t) = B_i(t) R_{ii}^{-1}(t) B_i^T(t), i = 1, 2, \cdots, L$, 则对 x_0, 微分博弈 (4.37)-(4.38) 存在一个开环纳什均衡当且仅当下面的正倒向微分方程存在解:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) - \sum_{i=1}^{L} S_i(t)\phi_i(t) + c(t), \\ \dot{\phi}_i(t) = -Q_i(t)x(t) - A^T(t)\phi_i(t), \\ x(0) = x_0,\ \phi_i(T) = Q_{iT}x(T),\ i = 1, 2, \cdots, L. \end{cases} \quad \text{... (4.40)}$$

进一步, 如果对任意的 $x_0 \in R^n$ 上述微分博弈均存在开环纳什均衡, 则对任意的 $x_0 \in R^n$ 上述微分博弈均的开环纳什均衡必定唯一.

证明 对于仅有两个参与者以及没有外部输入 $c(t)$ 的微分博弈 (4.37)-(4.38) 相关结论已在文献 [66, Theorem 7.1] 中得到了证明.

(1) 充分性: 假设存在一个纳什均衡 $(u_1^*, \cdots, u_L^*)$, 则, 使用下面证明定理 4.2 的类似方法, 我们可以得到正倒向微分方程 (4.40). 因此如果纳什均衡存在, 则 (4.40) 必定存在解.

(2) 必要性: 即方程 (4.39) 和方程 (4.40) 的解分别为 $K_i(t)$, $i = 1, \cdots, L$ 和 $[x^T(t), \phi_1^T(t), \cdots, \phi_L^T(t)]^T$, 考虑过程

$$m_i(t) = \phi_i(t) - K_i(t)x(t).$$

则, $m_i(T) = 0$. 对 $m_i(t)$ 微分可得

$$\begin{aligned} \dot{m}_i(t) &= \dot{\phi}_i(t) - \dot{K}_i(t)x(t) - K_i(t)\dot{x}(t) \\ &= -Q_i(t)x(t) - A^T(t)\phi_i(t) - \\ &\quad [-A(t)^T K_i(t) - K_i(t)A(t) - Q_i(t) + \\ &\quad K_i(t)S_i(t)K_i(t)]x(t) - \\ &\quad K_i(t)[A(t)x(t) - \sum_{j=1}^{L} S_j(t)\phi_j(t) + c(t)], \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\dot{m}_i(t) = (K_i(t)S_i(t) - A^T(t))m_i(t)+ \\ K_i(t)[\sum_{j\neq i}^{L} S_j(t)m_j(t)]+ \\ K_i(t)[\sum_{j\neq i} S_j(t)m_j(t)]x(t) - K_i(t)c(t).\end{aligned}$$

定义决策组合如下

$$\{u_i^*(t) = -R_i^{-1}(t)B_i^T(t)(K_i(t)x(t) + m_i(t)), i = 1, \cdots, L\}, \qquad \text{... (4.41)}$$

我们将证明这个决策组合构成上述微分博弈的一个开环纳什均衡.

任意选择参与者 i, 不是一般性我们假设 $i = 1$, 固定其他参与者的策略为 (4.41) 中对应的策略. 如果我们能够证明 $u_1^*(t)$ 对于参与者 1 是最优的, 则根据纳什均衡的定义可知 (4.41) 构成一个纳什均衡. 这正是我们接下来要做的.

用 $u_2^*(t), \cdots, u_L^*(t)$ 代替系统 (4.37)-(4.38) 中的 $u_2(t), \cdots, u_L(t)$, 对参与者 1 求解如下最优控制问题:

$$\begin{aligned}\min_{u_1} J_1(u_1, u_2^*, \cdots, u_L^*) = \\ \frac{1}{2}\int_0^T [x^T(t)Q_1(t)x(t) + u_1^T(t)R_1(t)u_1(t)]dt+ \\ \frac{1}{2}x^T(T)Q_{1T}x(T),\end{aligned}$$

其中

$$\begin{cases}\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B_1(t)u_1(t) + \sum_{i=2}^{L} B_i(t)u_i^*(t) + c(t), \\ x(0) = x_0.\end{cases}$$

因为 Riccati 方程

$$\begin{cases}\dot{K}_1(t) = -A^T K_1 - K_1 A - Q_1 + K_1 B_1 R_1^{-1} B_1^T K_1, \\ K_1(T) = Q_{1T},\end{cases}$$

在 $[0, T]$ 上有解, 根据线性二次最优控制的理论可知上述对于参与者 1 的最优控制存在如下的唯一最优解:

$$\widetilde{u}_1(t) = -R_1^{-1}(t)B_1^T(t)(K_1(t)\widetilde{x}(t) + \widetilde{m}_1(t)),$$

其中 $\widetilde{m}_1(t)$ 是下面方程的解

$$\begin{cases} \dot{\widetilde{m}}_1(t) = (K_1(t)S_1(t) - A^T(t))\widetilde{m}_1(t) - \\ \qquad K_1(t)(\sum_{i=2}^{L} B_i(t)u_i^*(t) + c(t)), \\ \widetilde{m}_1(T) = 0, \end{cases} \quad \text{... (4.42)}$$

并且 $\widetilde{x}(t)$ 满足如下方程

$$\begin{cases} \dot{\widetilde{x}}(t) = (A(t) - S_1(t)K_1(t))\widetilde{x}(t) - S_1(t)\widetilde{m}_1(t) + \\ \qquad \sum_{i=2}^{L} B_i(t)u_i^*(t) + c(t), \\ \widetilde{x}(0) = x_0. \end{cases} \quad \text{... (4.43)}$$

可以验证 $\widetilde{x}(t) = x(t)$ 和 $\widetilde{m}_1(t) = m_1(t)$ 满足微分方程 (4.42)-(4.43). 因为微分方程 (4.42)-(4.43) 解唯一, 所以 $u_1^*(t)$ 是参与人 1 的最优控制, 也就是说

$$J_1(u_1^*, u_2^*, \cdots, u_L^*) \leqslant J_1(u_1, u_2^*, \cdots, u_L^*). \quad \text{... (4.44)}$$

由于参与人 1 是任意选择的, 所以上述不等式对任意的 $i \in \{1, 2, \cdots, L\}$ 均成立, 也即对任意的 $i \in \{1, 2, \cdots, L\}$,

$$\begin{aligned} & J_1(u_1^*, \cdots, u_{i-1}^*, u_i^*, u_{i+1}^*, \cdots, u_L^*) \leqslant \\ & J_1(u_1^*, \cdots, u_{i-1}^*, u_i, u_{i+1}^*, \cdots, u_L^*). \end{aligned} \quad \text{... (4.45)}$$

因此 $(u_1^*, \cdots, u_L^*)$ 是一个纳什均衡.

如果对任意 x_0 微分博弈的开环纳什均衡存在, 则正倒向微分方程 (4.40) 对任意初始值 x_0 存在解. 由命题 4.1 可知方程的解必唯一, 因此纳什均衡也必定唯一. □

命题 4.3 若果假设 (A2) 成立, 则对任意的宏观调控者的输入 $u(t)(t \in [0, T])$ 和任意系统初始值 $x_0, x_{i,0}(i = 1, 2, \ldots, L)$, 下层决策个体之间形成的微分博弈 (4.9)-(4.10) 存在开环纳什均衡当且仅当正倒向微分方程 (4.32) 存在解. 进一步, 如果假设 (A1) 和 (A2) 都成立, 则方程的解存在且唯一, 也即微分博弈 (4.9)-(4.10) 存在唯一的开环纳什均衡.

证明 对任意的宏观输入 $u(t)(t \in [0, T])$, GBCS (4.9)-(4.10) 成为类似引理 4.2 的一个仿射线性二次微分博弈, 其中在系统 (4.37)-(4.38) 的矩阵 $A(t)$, $B_i(t)$, $c(t)$, $Q_i(t)$, $R_i(t)$, Q_{iT} 分别是 (4.12) 中的矩阵 $\widetilde{A}(t)$, $\widetilde{B}_i(t)$, $\widetilde{B}(t)$, $u(t)$, $Q_i(t)$, $R_i(t)$, $\widetilde{Q}_{iT}$.

如果假设 (A2) 成立, 则这正是命题 4.2 的结论.

因为假设 (A2) 成立, 则假设 (A1) 等价于当 $c(t) = 0(t \in [0, T])$ 时, 对任意的初始值方程 (4.40) 有解. 由命题 可知方程 (4.40) 解唯一. □

定义空间

$$W = \{ \int_0^T \Phi(T, t)\overline{B}(t)u(t)\, dt \mid u(t)(t \in [0, T]) \text{ 是容许控制}\} \quad \text{... (4.46)}$$

和矩阵

$$W(T, 0) = \int_0^T \Phi(T, s)\overline{B}(s)\overline{B}^T(s)\Phi^T(T, s)\, ds, \quad \text{... (4.47)}$$

其中 $\Phi(t, s)$ 定义如下:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi(t, s)}{\partial t} = \overline{A}(t)\Phi(t, s) \\ \Phi(s, s) = I_{(L+1)N}. \end{cases} \quad \text{... (4.48)}$$

命题 4.4 $Im(W(T, 0)) = W$.

证明 (1) 我们首先证明 $Im(W(T, 0)) \subseteq W$.
设 $\{e_i, i = 1, 2, \cdots, (L+1)N\}$ 为欧式空间 $R^{(L+1)N}$ 的一组基. 则

$$\begin{aligned} W(T, 0)e_i &= \int_0^T \Phi(T, t)\overline{B}(t)\overline{B}^T(t)\Phi^T(T, t)\, dt e_i \\ &= \int_0^T \Phi(T, t)\overline{B}(t)\overline{B}^T(t)\Phi^T(T, t)e_i\, dt \\ &= \int_0^T \Phi(T, t)\overline{B}(t)u(t)\, dt \end{aligned}$$

其中我们让 $u(t) = \overline{B}^T(t)\Phi^T(T, t)e_i$. 因此, 对于任意的 $i = 1, 2, \cdots, (L+1)N$ 有 $W(T, 0)e_i \in W$, 所以 $Im(W(T, 0)) \subseteq W$ 成立.

(2) 现在证明 $Im(W(T, 0)) = W$.

使用反证法并假设结论不成立, 也即 $Im(W(T,0)) \subsetneq W$. 因此存在非零向量 $0 \neq z \in W$ 并且 $z^T W(T,0)z = 0$, 所以

$$\begin{aligned} 0 =& z^T \int_0^T \Phi(T,t)\overline{B}(t)\overline{B}^T(t)\Phi^T(T,t)\, dtz \\ =& \int_0^T z^T \Phi(T,t)\overline{B}(t)\overline{B}^T(t)\Phi^T(T,t) z\, dt \\ =& \int_0^T \|z^T \Phi(T,t)\overline{B}(t)\|^2\, dt, \end{aligned}$$

这意味着 $z^T\Phi(T,t)\overline{B}(t) = 0$ 在 $[0,T]$ 上几乎处处成立. 因为 $z \in W$, 存在 $u(t)$ 满足 $z = \int_0^T \Phi(T,t)\overline{B}(t)u(t)\, dt$, 所以

$$\begin{aligned} \|z\| =& z^T z \\ =& z^T \int_0^T \Phi(T,t)\overline{B}(t)u(t)\, dt \\ =& \int_0^T z^T\Phi(T,t)\overline{B}(t)u(t)\, dt = 0, \end{aligned}$$

这与 $z \neq 0$ 矛盾, 命题得证. □

命题 4.5 GBCS (4.9)-(4.10) 是能控的当且仅当下面的矩阵满秩

$$\left[\Phi(T,0)\begin{bmatrix} 0 \\ I_{NL} \end{bmatrix},\ W(T,0),\ Q_T\begin{bmatrix} 0 \\ I_{N-n} \end{bmatrix}\right], \qquad \text{... (4.49)}$$

其中 Q_T 在 (4.17) 已定义, 它又可以写成如下形式:

$$Q_T = \begin{bmatrix} I_N \\ \widetilde{Q}_T \end{bmatrix} \in R^{(L+1)N\times N}.$$

证明 由定理 4.1、命题 4.1和命题 4.3可知, GBCS (4.9)-(4.10) 能控等价于正倒向微分方程 (4.32) 部分能控, 因此我们只需要证明方程 (4.32) 部分能控等价于矩阵 (4.49) 满秩.

我们分别证明充分和必要条件.

(1) 充分性.

假设命题 4.5 中的 $(L+1)N \times ((2L+2)N-n)$(4.49) 维矩阵 (4.49) 满秩, 则

它至少有一个右可逆矩阵, 任取一个记为 M^{-1}. 记

$$
\begin{aligned}
&M_1 = \Phi(T,0)\begin{bmatrix} 0 \\ I_{NL} \end{bmatrix}, M_2 = W(T,0), M_3 = Q_T\begin{bmatrix} 0 \\ I_{N-n} \end{bmatrix}, \\
&M = [M_1, M_2, M_3],
\end{aligned}
$$

将右可逆矩阵 M^{-1} 分成如下分块矩阵

$$
M^{-1} = \begin{bmatrix} \overline{M}_1 \\ \overline{M}_2 \\ \overline{M}_3 \end{bmatrix},
$$

则我们有

$$
\begin{aligned}
&MM^{-1} = I_{(L+1)N}, \text{ 或者} \\
&M_1\overline{M}_1 + M_2\overline{M}_2 + M_3\overline{M}_3 = I_{(L+1)N}.
\end{aligned}
\quad \text{... (4.50)}
$$

对于任意的初始状态 X_0 和终止状态 $x_T \in R^n$, 我们构造如下的宏观调控输入 $u(\cdot)$ 以及伴随变量 ϕ 的初值:

$$
\begin{aligned}
&\overline{u}(t) = \overline{B}^T(t)\Phi^T(T,t)\overline{M}_2(\Phi(T,0)\begin{bmatrix} -X_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_T \\ x_F \\ \overline{Q}_T v \end{bmatrix}), \\
&\phi_0 = \overline{M}_1(\Phi(T,0)\begin{bmatrix} -X_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_T \\ x_F \\ \overline{Q}_T v \end{bmatrix}) \in R^{LN},
\end{aligned}
\quad \text{... (4.51)}
$$

其中

$$
\overline{Q}_T \triangleq \widetilde{Q}_T \begin{bmatrix} 0_{n\times(N-n)} \\ I_{N-n} \end{bmatrix} \in R^{LN\times(N-n)},
$$

向量 $x_F \in R^{N-n}$ 任意选定的值, $v \in R^{N-n}$ 是一个待确定的向量. 因为在 (4.31) 中的矩阵 $\widetilde{Q}_T$ 有如下形式:

$$
\widetilde{Q}_T = [\widetilde{Q}_{1T}^T, \cdots, \widetilde{Q}_{LT}^T]^T, \quad \text{... (4.52)}
$$

并且从 (4.12) 中对矩阵 $\widetilde{Q}_{iT}$ 的定义以及矩阵 $\widetilde{Q}_{iT}, i = 1, \cdots, L$ 的前 n 列为零, 如

下等式成立:

$$\widetilde{Q}_T = [0_{LN\times n}, \overline{Q}_T]. \qquad \text{... (4.53)}$$

接下来我们要证明的是当宏观调控输入 $u(t) = \overline{u}(t)$ 和初值为 $X(0) = X_0$ 时, 正倒向微分方程 (4.32) 存在唯一解并且满足 $x(T) = x_T$.

由式 (4.32), (4.51) 中 $\overline{u}(t)$ 的形式以及 $\overline{W}_i, i = 1, 2, 3$ 的定义, 我们有

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} X(T) \\ \phi(T) \end{bmatrix} &= \Phi(T,0)\begin{bmatrix} X_0 \\ \phi_0 \end{bmatrix} + \int_0^T \Phi(T,t)\overline{B}(t)u(t)\,dt \\
&= \Phi(T,0)\begin{bmatrix} X_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \Phi(T,0)\begin{bmatrix} 0 \\ I_{NL} \end{bmatrix}\phi_0 + \\
&\quad M_2\overline{M}_2\left(\Phi(T,0)\begin{bmatrix} -X_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_T \\ x_F \\ \overline{Q}_T v \end{bmatrix}\right) \\
&= \Phi(T,0)\begin{bmatrix} X_0 \\ 0 \end{bmatrix} + M_1\overline{M}_1\left(\Phi(T,0)\begin{bmatrix} -X_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_T \\ x_F \\ \overline{Q}_T v \end{bmatrix}\right) + \\
&\quad M_2\overline{M}_2\left(\Phi(T,0)\begin{bmatrix} -X_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_T \\ x_F \\ \overline{Q}_T v \end{bmatrix}\right) \\
&= \Phi(T,0)\begin{bmatrix} X_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \\
&\quad (M_1\overline{M}_1 + M_2\overline{M}_2)\left(\Phi(T,0)\begin{bmatrix} -X_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_T \\ x_F \\ \overline{Q}_T v \end{bmatrix}\right) \\
&= \Phi(T,0)\begin{bmatrix} X_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \\
&\quad (I_{(L+1)N} - M_3\overline{M}_3)\left(\Phi(T,0)\begin{bmatrix} -X_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_T \\ x_F \\ \overline{Q}_T v \end{bmatrix}\right)
\end{aligned}$$

$$= \Phi(T,0)\begin{bmatrix} X_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \Phi(T,0)\begin{bmatrix} -X_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_T \\ x_F \\ \overline{Q}_T v \end{bmatrix} -$$

$$M_3\overline{M}_3\left(\Phi(T,0)\begin{bmatrix} -X_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_T \\ x_F \\ \overline{Q}_T v \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} x_T \\ x_F \\ \overline{Q}_T v \end{bmatrix} - M_3\overline{M}_3\left(\Phi(T,0)\begin{bmatrix} -X_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_T \\ x_F \\ \overline{Q}_T v \end{bmatrix}\right).$$

现在我们来计算伴随变量的末值 $\phi(T)$ 并验证它满足方程 (4.32) 中的末值条件.

记

$$\begin{bmatrix} y_T \\ y_F \\ y_\phi \end{bmatrix} = \Phi(T,0)\begin{bmatrix} -X_0 \\ 0 \end{bmatrix},\ w = \begin{bmatrix} y_T + x_T \\ y_F + x_F \\ y_\phi + \overline{Q}_T v \end{bmatrix},$$

其中 $y_T \in R^n, y_F \in R^{N-n}$ 和 $y_\phi \in R^{LN}$. 因为

$$M_3\overline{M}_3 = Q_T\begin{bmatrix} 0 \\ I_{N-n} \end{bmatrix}\overline{M}_3 = \begin{bmatrix} 0_{n\times(L+1)N} \\ \overline{M}_3 \\ \overline{Q}_T\overline{M}_3 \end{bmatrix}$$

和

$$\begin{bmatrix} x(T) \\ \overline{x}_F \\ \phi(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_T \\ x_F \\ \overline{Q}_T v \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \overline{M}_3 \\ \overline{Q}_T\overline{M}_3 \end{bmatrix} w = \begin{bmatrix} x_T \\ x_F - \overline{M}_3 w \\ \overline{Q}_T(v - \overline{M}_3 w) \end{bmatrix}, \qquad \text{... (4.54)}$$

其中 $(x(T)^T, \overline{x}_F^T)^T = X(T)^T$, 我们有 $x(T) = x_T$ 并且如果我们让 $v = x_F$ 则可以得到如下等式:

$$\phi(T) = \overline{Q}_T\overline{x}_F. \qquad \text{... (4.55)}$$

进一步可以得到

$$\phi(T)=\overline{Q}_T\overline{x}_F=\begin{bmatrix}0_{LN\times n},\overline{Q}_T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_T\\ \overline{x}_F\end{bmatrix}=\widetilde{Q}_TX(T),$$

其中第二个等式是因为关系 (4.53)

$$\widetilde{Q}_T=\begin{bmatrix}0_{LN\times n},\overline{Q}_T\end{bmatrix},$$

因此末值条件 $\phi(T)=\widetilde{Q}_TX(T)$ 成立.

上述证明表明正倒向微分方程 (4.32) 是部分能控的, 所以 GBCS (4.9)-(4.10) 是能控的. 因此充分性得到证明.

(2) 必要性.

如果 GBCS (4.9)-(4.10) 是能控的, 则对于任意初始状态值 X_0, 存在输入 $u(t)$ 使得方程 (4.32) 的解存在并且满足 $x(T)=0$, 也即对于任意的 X_0, 存在 $\phi_0\in R^{NL},u(t)$ 满足

$$\Phi(T,0)\begin{bmatrix}X_0\\ \phi_0\end{bmatrix}+\int_0^T\Phi(T,t)\overline{B}(t)u(t)\,dt=Q_T\begin{bmatrix}0_{n\times 1}\\ x_F\end{bmatrix},$$

其中 $x_F\in R^{N-n}$. 通过简单的代数变化, 我们知道对于任意的 $X_0\in R^N$, 存在 $\phi_0,u(t),x_F$, 满足

$$\Phi(T,0)\begin{bmatrix}X_0\\ 0\end{bmatrix}=\Phi(T,0)\begin{bmatrix}0\\ \phi_0\end{bmatrix}+\int_0^T\Phi(T,t)\overline{B}(t)u(t)\,dt+Q_T\begin{bmatrix}0_{n\times 1}\\ x_F\end{bmatrix}.$$

所以有

$$Im(\Phi(T,0)\begin{bmatrix}I_N\\ 0\end{bmatrix})\subseteq Im(\begin{bmatrix}\Phi(T,0)\begin{bmatrix}0\\ I_{NL}\end{bmatrix},\overline{W},\ Q_T\begin{bmatrix}0\\ I_{N-n}\end{bmatrix}\end{bmatrix}),$$

其中 $\overline{W}$ 是线性空间 W 的一个基矩阵. 因为矩阵 $\Phi(T,0)$ 可逆, 所以

$$\begin{aligned} & Im(\Phi(T,0)\begin{bmatrix} I_N \\ 0 \end{bmatrix}) \cap Im(\Phi(T,0)\begin{bmatrix} 0 \\ I_{NL} \end{bmatrix}) = \{0\}, \\ & Im(\Phi(T,0)\begin{bmatrix} I_N \\ 0 \end{bmatrix}) + Im(\Phi(T,0)\begin{bmatrix} 0 \\ I_{NL} \end{bmatrix}) = R^{(L+1)N}. \end{aligned} \quad \text{... (4.56)}$$

这可以得到矩阵

$$\left[\Phi(T,0)\begin{bmatrix} 0 \\ I_{NL} \end{bmatrix}, \ \overline{W}, \ Q_T\begin{bmatrix} 0 \\ I_{N-n} \end{bmatrix}\right]$$

是满秩的. 由命题 4.4 可知, 下面矩阵也是满秩的:

$$\left[\Phi(T,0)\begin{bmatrix} 0 \\ I_{NL} \end{bmatrix}, \ W(T,0), \ Q_T\begin{bmatrix} 0 \\ I_{N-n} \end{bmatrix}\right],$$

因此必要性得证. □

下面给出定理 4.2 的证明.

证明 由于假设 (A1) 和 (A2) 以及命题 4.3, 可知对于任意宏观调控者的输入输入 $u(t)(t \in [0,T])$ 和系统初始状态值 $x_0, x_{i,0}(i = 1,2,\ldots,L)$, 下层决策个体形成的微分博弈开环纳什均衡存在且唯一.

若果按如下定义矩阵 $\Psi(t)$

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = \overline{A}(t)\Psi(t), \ \Psi(0) = I_{(L+1)N}, \quad \text{... (4.57)}$$

则

$$\Psi^{-1}(t) = \Phi(t), \ \Phi(t,s) = \Psi(t)\Psi^{-1}(s), \quad \text{... (4.58)}$$

其中 $\Phi(t)$ 和 $\Phi(t,s)$ 分别在式 (4.14) 和 (4.48) 中被定义. 因此我们有

$$\begin{aligned} W(T,0) &= \Psi(T)\int_0^T \Psi^{-1}(t)\overline{B}(t)\overline{B}^T(t)\Psi^{-T}(t)\,dt\Psi^T(T) \\ &= \Psi(T)\int_0^T \Phi(t)\overline{B}(t)\overline{B}^T(t)\Phi^T(t)\,dt\Psi^T(T) = \Psi(T)W(T)\Psi^T(T), \end{aligned} \quad \text{... (4.59)}$$

并且

$$
\begin{aligned}
& Im(\begin{bmatrix}\Phi(T,0)\begin{bmatrix}0\\ I_{NL}\end{bmatrix}, \ W(T,0), \ Q_T\begin{bmatrix}0\\ I_{N-n}\end{bmatrix}\end{bmatrix}) \\
&= Im(\begin{bmatrix}\Psi(T)\begin{bmatrix}0\\ I_{NL}\end{bmatrix}, \ \Psi(T)W(T)\Psi^T(T), \ Q_T\begin{bmatrix}0\\ I_{N-n}\end{bmatrix}\end{bmatrix}) \\
&= Im(\Psi(T)\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ I_{NL}\end{bmatrix}, \ W(T)\Psi^T(T), \Psi^{-1}(T)Q_T\begin{bmatrix}0\\ I_{N-n}\end{bmatrix}\end{bmatrix}) \qquad \text{... (4.60)} \\
&= Im(\Psi(T)\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ I_{NL}\end{bmatrix}, \ W(T), \ \Phi(T)Q_T\begin{bmatrix}0\\ I_{N-n}\end{bmatrix}\end{bmatrix}) \\
&= Im(\Psi(T)\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ I_{NL}\end{bmatrix}, \ \Phi(T)Q_T\begin{bmatrix}0\\ I_{N-n}\end{bmatrix}, \ W(T)\end{bmatrix}),
\end{aligned}
$$

其中第三个等式是由于矩阵 $\Psi(T)$ 非奇异. 由命题 4.5 可知, 定理 4.2 成立. □

首先给出一个重要命题, 这个命题可以在文献 [71, 推论 3.2] 中找到.

命题 4.6 式 (4.46) 定义的线性空间 W 是矩阵 $\overline{A}$ 的不变空间并且下面等式成立:

$$Im(\left[\overline{B}, \ \overline{AB}, \ \overline{A}^2\overline{B}, \ \cdots, \ \overline{A}^{(L+1)N-1}\overline{B}\right]) = W. \qquad \text{... (4.61)}$$

下面给出定理 4.3 的证明.

证明 在时不变的情况下, 矩阵 $\Phi(T,0) = e^{\overline{A}T}$ 并且 $\Phi^{-1}(T,0) = e^{-\overline{A}T}$. 由文献 [29, 命题 1.2.1] 可知, 对于矩阵指数函数存在如下有限表示:

$$e^{\overline{A}T} = \sum_{k=0}^{(L+1)N-1} a_k\overline{A}^k, \qquad \text{... (4.62)}$$

其中 $a_k, k = 1, 2, \cdots, (L+1)N-1$ 是依赖于 $\overline{A}T$ 的一些实数. 由此可知线性空间 W 是矩阵 $\Phi(T,0)$ 的一个不变子空间. 因为矩阵 $\Phi(T,0)$ 可逆, 所以 $\Phi(T,0)W = W$. 记

$$\overline{W} = \left[\overline{B}, \ \overline{AB}, \ \overline{A}^2\overline{B}, \ \cdots, \ \overline{A}^{(L+1)N-1}\overline{B}\right],$$

因此

$$
\begin{aligned}
& Im(\begin{bmatrix} \Phi(T,0)\begin{bmatrix} 0 \\ I_{NL} \end{bmatrix}, \ W(T,0), \ Q_T\begin{bmatrix} 0 \\ I_{N-n} \end{bmatrix} \end{bmatrix}) \\
= & Im(\begin{bmatrix} \Phi(T,0)\begin{bmatrix} 0 \\ I_{NL} \end{bmatrix}, \ \overline{W}, \ Q_T\begin{bmatrix} 0 \\ I_{N-n} \end{bmatrix} \end{bmatrix}) \\
= & Im(\begin{bmatrix} \Phi(T,0)\begin{bmatrix} 0 \\ I_{NL} \end{bmatrix}, \ \Phi(T,0)\overline{W}, \ Q_T\begin{bmatrix} 0 \\ I_{N-n} \end{bmatrix} \end{bmatrix}) \\
= & Im(\Phi(T,0)\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ I_{NL} \end{bmatrix}, \ \overline{W}, \ \Phi^{-1}(T,0)Q_T\begin{bmatrix} 0 \\ I_{N-n} \end{bmatrix} \end{bmatrix}) \\
= & Im(\Phi(T,0)\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ I_{NL} \end{bmatrix}, \ \overline{W}, \ e^{-\overline{A}T}Q_T\begin{bmatrix} 0 \\ I_{N-n} \end{bmatrix} \end{bmatrix}).
\end{aligned}
$$

由命题 4.5, GBCS 能控当且仅当下述矩阵

$$
\Phi(T,0)\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ I_{NL} \end{bmatrix}, \ \overline{W}, \ e^{-\overline{A}T}Q_T\begin{bmatrix} 0 \\ I_{N-n} \end{bmatrix} \end{bmatrix}
$$

满秩, 这等价于矩阵

$$
\begin{bmatrix} I_N, 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{W}, \ e^{-\overline{A}T}Q_T\begin{bmatrix} 0 \\ I_{N-n} \end{bmatrix} \end{bmatrix},
$$

满秩, 也即矩阵

$$
Q_C = \begin{bmatrix} Q_{C1}, \ Q_{C2} \end{bmatrix}
$$

满秩, 因此定理得证. □

下面给出推论 4.1 的证明.

证明 若果 $n_i = 0, i = 1\cdots, L$, 则 $Q_{C2} = 0$ 并且 $N = n$. 此时, $\mathrm{rank}(Q_C) = \mathrm{rank}(Q_{C1})$, 因此推论的第一部分得证.

我们使用反证法证明推论的第二个结论, 假设该结论不成立, 则存在 $s_0 \in \Lambda(\overline{A})$ 使得

$$
rank(\begin{bmatrix} A - s_0 I_n, B_1 R_1^{-1} B_1^T, \cdots, B_L R_L^{-1} B_L^T, B \end{bmatrix}) < n,
$$

因此存在 $0 \neq z \in R^n$ 满足

$$z^T \left[A - s_0 I_n, B_1 R_1^{-1} B_1^T, \cdots, B_L R_L^{-1} B_L^T, B \right] = 0.$$

由 $\overline{A}$ 的定义可得

$$z^T [I_n, 0](\overline{A} - s_0 I_{(L+1)n}) = 0 \text{ and } z^T B = 0,$$

上式可以重写为如下形式:

$$\begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix}^T (\overline{A} - s_0 I_{(L+1)n}) = 0 \text{ and } \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix}^T \overline{B} = 0, \qquad \text{... (4.63)}$$

因此

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix}^T \overline{A}^k \overline{B} &= \left(\begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix}^T \overline{A} \right) \overline{A}^{k-1} \overline{B} = s_0 \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix}^T \overline{A}^{k-1} \overline{B} \\ &= \cdots = s_0^k \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix}^T \overline{B} = 0, \forall\, k \geqslant 0. \end{aligned}$$

上述等式意味着

$$\begin{aligned} z^T Q_{C1} = z^T [I_n, 0] \overline{W} &= \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix}^T \overline{W} \\ &= \left[\begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix}^T \overline{B}, \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix}^T \overline{AB}, \cdots, \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix}^T \overline{A}^{(L+1)n-1} \overline{B} \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

因为存在非零向量 $z \in R^n$ 使得 $z^T Q_{C1} = 0$, 所以 $rank(Q_{C1}) < n$, 这与推论 4.1 中的假设矛盾, 因此得证. □

4.5 本章小结

这一章我们研究了确定性 GBCS 的能控性问题. 该系统的模型源于现实中丰富的应用场景: 系统的宏观状态受许多有各自利益追求的微观个体决策的影响. 系统宏观调控者对宏观状态的调控必须考虑微观个体之间的博弈, 通过干预博弈形成的均衡来调控系统. 这个系统框架融合了博弈论与控制论. 我们首先给出了一般非线性 GBCS 的框架并引入了纳什均衡能控性的概念, 刻画了最

一般系统的能控性条件. 然后我们深入研究线性 GBCS 并给出了完整的能控性的刻画. 与传统的线性系统能控性比较而言这里关键的处理困难在于我们必须分析相应的一个正倒向微分方程的部分能控性问题, 这在文献中研究的很少. 这里有许多的有趣的关于 GBCS 的问题的研究, 同时我们也可以将其扩展到更加复杂的系统, 比如下层决策个体之间存在层次组织[72, 73], 鲁棒和自适应控制等.

第 5 章 随机 GBCS

5.1 导言

复杂系统经常会受到各种随机因素的影响, 比如外部环境的随机干扰、系统内部的热噪声、系统参数的随机漂移等. 同时在系统建模的时候, 由于认知能力的限制, 原系统的部分动态可能未知或不确切的了解, 系统的一些状态或参数无法得到确定的值, 这些都可能在系统的模型中引入随机的因素. 然而这些随机性可能显著地影响系统的动态演化. 随机微分方程是研究这类系统的一个合适的数学工具, 因此, 我们有必要考虑用随机微分方程刻画的动态系统.

随机微分方程理论基础建立于 20 世纪 60 年代, 进入上世纪七八十年代, 随机分析的相关理论得到了快速发展并广泛应用到控制理论、生态科学、物理学等各个方面. 布莱克—斯克尔斯期权定价模型 (Block-Scholes Option Pricing Model) 是随机微分方程在解决金融中期权定价问题的一个成功应用, 模型建立者也因此获得了第二十九届诺贝尔经济学奖. 随机微分方程已经成为数理金融的基本分析工具, 政府制定政策、投资者制定投资决策等等问题都会涉及到随机微分方程刻画的动态系统. 基于这些原因, 本章我们建立用随机微分方程描述的 GBCS 的数学模型以及能控性相关定义. 由于多出了扩散项的影响, 随机 GBCS 的能控性定义以及判定出现了与确定性 GBCS 不同的特征.

5.2 随机 GBCS 数学模型

给定 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, P)$ 为概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上满足通有条件的 σ-代数流, $w(t)$ 是其上的标准布朗运动 ($w(0) = 0$), 为了记号的简便我们这里只考虑一维布朗运动, 高维的情形有类似结果. 下面所有提到的过程如果没有特殊说明都假设为平方可积的 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$-适应过程.

考虑下述有一个调控者和 L 个下层决策者的层级随机控制系统:

$$\begin{cases} dx(t) = f(t, x(t), u_1(t), \ldots, u_L(t), u(t))dt \\ \qquad\qquad + \sigma(t, x(t), u_1(t), \ldots, u_L(t), u(t))dw(t), \\ x(0) = x_0 (\in R^n), \end{cases} \quad \ldots (5.1)$$

其中 $u_i(t) \in D_i \subset R^{m_i}$ 为下层决策个体 i 的输入决策, $u(t) \in D \subset R^m$ 为系统宏观调控者的宏观输入策略.

决策个体 i 的收益函数为:

$$\begin{gathered} J_i(u_1(\cdot), u_2(\cdot), \dots, u_L(\cdot), u(\cdot)) = \\ ES_i(x(T), T) + E\int_0^T L_i(x(\cdot), u_1(\cdot), u_2(\cdot), \dots, u_L(\cdot), u(\cdot))\, dt \end{gathered} \quad \text{... (5.2)}$$

这里我们考虑与确定性 GBCS 一样的信息结构: 宏观调控者首先给出它在整个时间段 $[0, T]$ 上的输入策略 $u(\cdot)$, 然后是下层决策个体进行博弈, 下层决策个体使用开环策略, 并假定系统动态和个体收益函数为共同知识.

实际上我们也可以考虑如同确定性 GBCS 中的带有微观和宏观状态的系统, 这在现实中也显得比较合理, 但经过适当的变换, 可以将其变成上面的模型, 具体实现如下.

设系统的动态过程为:

$$\begin{cases} dx(t) = f(t, x(t), x_1(t), x_2(t), \dots, x_L(t), u(t))dt \\ \qquad\qquad + \sigma(t, x(t), x_1(t), x_2(t), \dots, x_L(t), u(t))dw(t) \\ dx_i(t) = f_i(t, x(t), x_i(t), u_i(t), u(t))dt \\ \qquad\qquad + \sigma_i(t, x(t), x_i(t), u_i(t), u(t))dw(t) \\ x(0) = x_0,\ x_i(0) = x_{i,0}, i = 1, 2, \dots, L. \end{cases} \quad \text{... (5.3)}$$

引入状态

$$X(t) = [x^T(t), x_1^T(t), \cdots, x_L^T(t)]^T$$

函数

$$\begin{gathered} \widetilde{f}(t, X(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_L(t), u(t)) = \\ \begin{bmatrix} f(t, x(t), x_1(t), x_2(t), \dots, x_L(t), u(t)) \\ f_1(t, x(t), x_1(t), u_1(t), u(t)) \\ \vdots \\ f_L(t, x(t), x_L(t), u_L(t), u(t)) \end{bmatrix} \end{gathered}$$

和

$$\widetilde{\sigma}(t, X(t), u_1(t), u_2(t), \ldots, u_L(t), u(t)) = \begin{bmatrix} \sigma(t, x(t), x_1(t), x_2(t), \ldots, x_L(t), u(t)) \\ \sigma_1(t, x(t), x_1(t), u_1(t), u(t)) \\ \vdots \\ \sigma_L(t, x(t), x_L(t), u_L(t), u(t)) \end{bmatrix}.$$

则带宏观和微观状态的 GBCS 可以转化为下面的形式:

$$\begin{cases} dX(t) = \widetilde{f}(t, X(t), u_1(t), u_2(t), \ldots, u_L(t), u(t))dt \\ \qquad\qquad + \widetilde{\sigma}(t, X(t), u_1(t), u_2(t), \ldots, u_L(t), u(t))dw(t) \\ X(0) = X_0, \end{cases} \quad \ldots (5.4)$$

个体的收益函数也很容易的化为 (5.2) 的形式. 所以我们现在考虑一般的随机 GBCS (5.1) 和 (5.2).

同确定性的 GBCS 类似的分析, 给定宏观调控者的一个输入策略 $u(\cdot)$, 系统成为 L 人微分博弈, 如果博弈存在一个唯一的开环纳什均衡 $(u_1^*, u_2^*, \ldots, u_L^*)$, 则系统的动态过程为

$$\begin{cases} dx^*(t) = f(t, x^*(t), u_1^*(t), u_2^*(t), \ldots, u_L^*(t), u(t))dt \\ \qquad\qquad + \sigma(t, x^*(t), u_1^*(t), u_2^*(t), \ldots, u_L^*(t), u(t))dw(t) \\ x^*(0) = x_0, \end{cases} \quad \ldots (5.5)$$

因此, 宏观调控者是通过对下层个体参与的博弈进行干预从而间接地对系统宏观状态进行调控.

对于随机模型, 系统的状态过程也是一个随机过程, 因此这种系统的能控性有不同的定义, 比如均值能控性等. 但在很多情况, 宏观调控者不只关系系统状态的均值, 还会关注方差甚至其分布, 这里我们考察整个平方可积随机变量构成的末值空间. 上面具有宏观和微观状态的随机 GBCS 虽然通过一定的方式可以转化为一般 (5.1) 和 (5.2) 的形式, 但却失去了对宏观和微观状态的区分. 因此, 我们引入如下与确定性中能控性概念稍有不同的能控性概念.

设 V 为空间 $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P; R^h)(h \leq n)$, P_h 是从 R^n 到 R^h 的投影算子, 其满足 $P_h((x_1, \cdots, x_n)^T) = (x_1, \cdots, x_h)^T$.

定义 5.1 由 (5.1) 和 (5.2) 定义的随机 GBCS 称为是精确 V-能控的, 如果对于任何给定的系统初值 $x(0) = x_0 \in R^n$ 和末值 $x^h(T) = x_T^h = \xi \in V$, 存在一个宏观输入策略 $u(t)(t \in [0, T])$, 使得下层 L 个个体的随机微分博弈存在唯一的纳什均衡并且系统 (5.5) 的解 $x^*(t)$ 满足 $P_h x^*(T) = x_T^h$. 如果 $V = L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P; R^n)$, 则称该 GBCS 是完全能控的.

5.3 一般非线性 GBCS 能控性判定

我们假设宏观调控者和下层决策个体 i 的允许控制集分别为:

$$\begin{aligned} &u(\cdot) \in U \triangleq \{u : [0, T] \to D \subset R^m \mid u(\cdot) \in L^2_{\mathcal{F}}(0, T; R^m)\} \\ &u_i(\cdot) \in U_i \triangleq \{u : [0, T] \to D_i \subset R^{m_i} | u_i(\cdot) \in L^2_{\mathcal{F}}(0, T; R^{m_i})\}, \end{aligned} \qquad \text{... (5.6)}$$

考虑上述非线性随机 GBCS, 为了使系统是良定义的, 我们需要引入一些合理的假设.

(A1) 在 GBCS 中的所有函数 f, σ, K_i 和 L_i $(i = 1, \cdots, L)$ 是可测的, 并且存在一个常数 $C > 0$ 和一个连续模函数 $\varpi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ 使得对 $\varphi(t, x, u_1, \cdots, u_L, u) = f(t, x, u_1, \cdots, u_L, u)$, $\sigma(t, x, u_1, \cdots, u_L, u)$, $K_i(x)$, $L_i(t, x, u_1, \cdots, u_L, u)$, 我们有

$$\begin{cases} |\varphi(t, x, U) - \varphi(t, \overline{x}, \overline{U})| \le C|x - \overline{x}| + \varpi(U - \overline{U}), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \forall t \in [0, T],\ x, \overline{x} \in R^n,\ U, \overline{U}, \\ |\varphi(t, 0, U)| \le C, \qquad \forall t \in [0, T],\ U. \end{cases} \qquad \text{... (5.7)}$$

函数 f, σ, K_i 和 L_i $(i = 1, \cdots, L)$ 关于 x 是 C^2 的. 另外, 存在一个常数 $C > 0$ 和一个连续模函数 $\varpi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ 使得对 $\varphi = f, \sigma, K_i, L_i$, 我们有

$$\begin{cases} |\varphi_x(t, x, U) - \varphi_x(t, \overline{x}, \overline{U})| \le C|x - \overline{x}| + \varpi(|U - \overline{U}|), \\ |\varphi_{xx}(t, x, U) - \varphi_{xx}(t, \overline{x}, \overline{U})| \le \varpi(|U - \overline{U}| + |x - \overline{x}|), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \forall t \in [0, T],\ x, \overline{x} \in R^n,\ U, \overline{U}, \end{cases} \qquad \text{... (5.8)}$$

其中 $U = (u_1^T, \cdots, u_L^T, u^T)^T$, $\overline{U} = (\overline{u}_1^T, \cdots, \overline{u}_L^T, \overline{u}^T)^T$.

从第2章中对随机微分方程解的存在唯一性定理可知, 如果假设 (A1) 成立, 则对任意的控制输入 $u(\cdot) \in U$, $u_i(\cdot) \in U_i, i = 1, 2, \cdots, L$ 和初值, 状态方程 (5.1) 存在唯一的解 $x(\cdot) \equiv x(\cdot, u_1(\cdot), \cdots, u_L(\cdot), u(\cdot))$, 并且对所有的 $i = 1, \cdots, L$ 收益函数 (5.2) 是良定义的.

对任何给定的输入 $u(\cdot)$, 下层决策个体形成由式 (5.1) 和 (5.2) 定义的一个随机微分博弈. 为了求解这个博弈, 引入下述广义的 *Hamiltonian* 量:

$$\begin{aligned} &G_i(t,x,u_1,\cdots,u_L,u,p,P) \\ &\qquad \triangleq \frac{1}{2}\sigma(t,x,u_1,\cdots,u_L,u)^T P\sigma(t,x,u_1,\cdots,u_L,u) \\ &\qquad + < p, f(t,x,u_1,\cdots,u_L,u) > -L_i(t,x,u_1,\cdots,u_L,u), \end{aligned} \quad \text{... (5.9)}$$

$$\forall\ (t,x,u_1,\cdots,u_L,u,P) \in [0,T]\times R^n \times R^{m_1} \times \cdots R^{m_L} \times R^m \times S^n,$$

其中 $S^n = \{A \in R^{n\times n} : A^T = A\}, i = 1,\cdots,L.$

然后定义 $\boldsymbol{H}$-函数:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{H}_i(t,x,u_1,\cdots,u_{i-1},u_i,\overline{u}_i,u_{i+1},\cdots,u_L,u,p,P) \\ &\qquad \triangleq G_i(t,x,u_1,\cdots,u_{i-1},u_i,u_{i+1},\cdots,u_L,u,p,P) \\ &\qquad + \sigma(t,x,u_1,\cdots,u_{i-1},u_i,u_{i+1},\cdots,u_L,u)^T[q - P\overline{\sigma}], \end{aligned} \quad \text{... (5.10)}$$

其中 $\overline{\sigma} = \sigma(t,x,u_1,\cdots,u_{i-1},\overline{u}_i,u_{i+1},\cdots,u_L,u).$

为了是最优控制存在, 如同其他文献, 我们引入下面的一个假设.

(A2) 对于任意的 $(t,x) \in [0,T]\times R^n$, $u(\cdot) \in U$, 任意向量 $p_1,\cdots,p_L \in R^n$ 和任意的矩阵 $P_1,\cdots,P_L \in S^n$, 存在唯一的 $(u_1^*,\cdots,u_L^*) \in D_1\times\cdots\times D_L$ 满足

$$u_i^* = \underset{u_i\in D_i}{arg\ min}\, \boldsymbol{H}_i(t,x,u_1^*,\cdots,u_{i-1}^*,u_i,u_i^*,u_{i+1}^*,\cdots,u_L^*,u,p_i,P_i)$$

$$i = 1,2,\cdots,L.$$

相应的映射记为

$$\begin{aligned} &(t,x,p_1,\cdots,p_L,P_1,\cdots,P_L,u(\cdot)) \to \\ &(u_1^*(t,x,p_1,\cdots,p_L,P_1,\cdots,P_L,u(\cdot)),\cdots,u_L^*(t,x,p_1,\cdots,p_L,P_1,\cdots,P_L,u(\cdot))). \end{aligned}$$

若果假设 (A2) 成立并且对宏观输入策略 $u(t), t \in [0,T]$ 和系统初值 $x(0) = x_0$ 随机微分博弈存在开环纳什均衡 $U^*(\cdot) = (u_1^*(\cdot)$, 则应用随机极大值原理可以得到:

$$\begin{cases} dx(t) = f(t,x(t),U^*(t),u(t))dt + \sigma(t,x(t),U^*(t),u(t))dw(t), \\ dp_i(t) = -\Big\{f_x^T(t,x(t),U^*(t),u(t))p_i(t) + \sigma_x^T(t,x(t),U^*(t),u(t))q_i(t) \\ \qquad - (L_i)_x(t,x(t),U^*(t),u(t))\Big\}dt + q_i(t)dw(t), \\ x(0) = x_0, p_i(T) = (K_i)_x(x(T)), i = 1,\cdots,L, \end{cases} \quad \text{... (5.11)}$$

并且

$$u_i^*(t) =$$

$$\underset{u_i \in D_i}{arg\ min}\ \boldsymbol{H}_i(t, x(t), u_1^*(t), \cdots, u_{i-1}^*(t), u_i, u_i^*(t), u_{i+1}^*(t),$$

$$\cdots, u_L^*(t), u(t), p_i(t), P_i(t))$$

$$i = 1, 2, \cdots, L,$$

其中, $p_i(t)$ 是方程 (5.11) 的解, $P_i(t)$ 是下述方程的解:

$$\begin{cases} dP_i(t) = -\Big\{f_x^T(t, x(t), U^*(t), u(t))P_i(t) + P_i(t)f_x(t, x(t), U^*(t), u(t)) \\ \qquad + \sigma_x^T(t, x(t), U^*(t), u(t))P_i(t)\sigma_x(t, x(t), U^*(t), u(t)) \\ \qquad + \sigma_x^T(t, x(t), U^*(t), u(t))Q_i(t) + Q_i(t)\sigma_x(t, x(t), U^*(t), u(t)) \\ \qquad + (H_i)_{xx}(t, x(t), U^*(t), u(t), p(t), q(t))\Big\}dt + Q_i(t)dw(t), \\ P_i(T) = -(K_i)_{xx}(x(T)), i = 1, \cdots, L, \end{cases}$$

... (5.12)

其中 H_i 定义如下:

$$\begin{aligned} H_i(t, x, U, u, p, q) =&< p, f(t, x, U, u) > +q^T\sigma(t, x, U, u) - L_i(t, x, U), \\ &(t, x, U, u, p, q) \in [0, T] \times R^n \times R^{m_1+\cdots+m_L} \times R^m \times R^n \times R^n, \end{aligned}$$

... (5.13)

方程 (5.11) 和 (5.12) 是倒向随机微分方程. 在假设 (A1) 和 (A2) 成立的情况下, 对任意给定的 $p(t), t \in [0, T]$, 方程 (5.12) 存在唯一解 $(P_i(\cdot), Q_i(\cdot))$.

从上面的分析我们知道 $u_i^*(t), i = 1, \cdots, L$ 可以表示成关于 $t, x(t), p_i, P_i$ 的函数, 因此我们可以将在方程 (5.11) 和 (5.12) 中的函数从新写为 F, Σ, H_i, G_i, 他们都不显示含有下层决策个体的控制变量 $u_i^*(t), i = 1, \cdots, L$.

现在我们给出最后一个假设.

(A3) 对于任意的宏观调控者的输入 $u(\cdot) \in U$ 和任意系统初值 x_0, 由式 (5.1) 和 (5.2) 定义的随机微分博弈存在开环纳什均衡.

假设 (A3) 要求对任意的 $u(\cdot) \in U$ 纳什均衡存在, 这个条件相对于第 3 章中能控性的定义 3.3 来说要严格, 因为系统能控不一定要求对所有的输入均衡都存在. 如此假设部分因为这样方便我们专注于能控性的研究, 在线性系统的时候我们会考虑存在性问题. 另一个原因是因为这里我们只考虑开环宏观策略也即只与时间有关, 对于这类系统有很多研究时变非线性最优控制的方

法可以直接应用到这里均衡存在性的研究中. 对于非线性系统, 我们可以使用随机动态规划的方法来研究纳什均衡的存在性, 其把均衡的存在性问题转化为 Hamilton-Jacobi-Isaacs 方程粘滞解的存在性问题.

当我们使用极大值原理来求解下层个体形成的微分博弈的纳什均衡时, 我们会得到一个以系统状态 $x(t)$ 为正向过程和 $\{p_i(t), P_i(t) : i = 1, \cdots, L\}$ 为倒向过程的正倒向的随机微分方程. 这个方程不仅与纳什均衡的存在性有关, 还刻画了当系统处于均衡是系统状态的演化过程. 因此它对我们研究宏观调控者的能控性有紧密关系, 因此我们引入受控正倒向随机微分方程 V-能控性的定义.

定义 5.2 受控正倒向随机微分方程

$$\begin{cases} dx(t) = f(t, x(t), y(t), u(t))dt + \sigma(t, x(t), y(t), u(t))dw(t), \\ dy(t) = g(t, x(t), y(t), u(t))dt + q(t)dw(t), \\ x(0) = x_0, \ y(T) = G(x(T)) \end{cases} \quad \text{... (5.14)}$$

称为是精确 V-能控的, 如果对任意任何给定的系统初值 $x(0) = x_0 \in R^n$ 和末值 $x^h(T) = x_T^h = \xi \in V$, 存在 $u(t)(t \in [0, T])$, 使得方程 (5.14) 存在唯一解 $x^*(t)$ 并且该解满足 $P_h x^*(T) = x_T^h$. 如果 $V = L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P; R^n)$, 则称该系统 (5.14) 是完全能控的.

需要注意在方程 (5.14) 中, 任何给定 $u(t)(t \in [0, T])$ 后, 该方程是一个 FBSDE, 如果其存在解, 则按照第 2 章中定义 2.1 可知, 其解为一个过程对 $(x(\cdot), y(\cdot), q(\cdot))$. 解中的过程 $q(\cdot)$ 是为了使得方程存在适应解.

由前面的分析我们可以得到下面对一般非线性随机 GBCS 能控性的刻画.

定理 5.1 如果 (5.1) 和 (5.2) 定义的随机 GBCS 满足假设 (A1), (A2) 和 (A3), 则该 GBCS 是精确 V-能控的当且仅当下述 $FBSDE$ 是精确 V-能控的:

$$\begin{cases} dx(t) = F(t, x(t), p_1(t), \ldots, p_L(t), P_1(t), \cdots, P_L(t), u(t))dt \\ \qquad\qquad + \Sigma(t, x(t), p_1(t), \ldots, p_L(t), P_1(t), \cdots, P_L(t), u(t))dw(t), \\ dp_i(t) = H_i(t, x(t), p_1(t), \ldots, p_L(t), P_1(t), \cdots, P_L(t), q_i(t), u(t))dt + q_i(t)dw(t), \\ dP_i(t) = G_i(t, x(t), p_1(t), \ldots, p_L(t), P_1(t), \cdots, P_L(t), Q_i(t), u(t))dt + Q_i(t)dw(t), \\ x(0) = x_0, p_i(T) = (K_i)_x(x(T)), P_i(T) = -(K_i)_{xx}(x(T)), i = 1, \cdots, L. \end{cases}$$

... (5.15)

同确定性一般非线性的 GBCS 一样, 由于上述 $FBSDE$ 是高度耦合和非线性的, 我们很难得到显示的关于能控性的判定条件. 但我们将对 GBCS 的能控性转化为关于 $FBSDE$ 的能控性问题, 这对进一步的研究提供了基础, 下面关于线性 GBCS 就是运用了相应的结果.

5.4 线性 GBCS 能控性判定

考虑下述有一个上层宏观调控者和 L 个下层决策个体的线性二次非合作随机微分博弈::

$$\begin{cases} dx(t) = \Big(A(t)x(t) + \sum_{i=1}^{L} B_i(t)u_i(t) + B(t)u(t)\Big)dt \\ \qquad\qquad + \Big(C(t)x(t) + \sum_{i=1}^{L} D_i(t)u_i(t) + D(t)u(t)\Big)dw(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \qquad \text{... (5.16)}$$

设 $U_i = L^2_{\mathcal{F}}(0,T;R^{m_i})$ 和 $U = L^2_{\mathcal{F}}(0,T;R^m)$. 个体 $i(i=1,2,\ldots,L)$ 通过选择输入策略 $u_i(\cdot)$ 最小化的收益函数为:

$$\begin{aligned} J_i(u_1(\cdot),u_2(\cdot),\ldots,u_L(\cdot)) &= \frac{1}{2}Ex^T(T)Q_{iT}x(T) \\ &+ \frac{1}{2}E\int_0^T \left[x^T(t)Q_i(t)x(t) + u_i^T(t)R_i(t)u_i(t)\right]dt, \end{aligned} \qquad \text{... (5.17)}$$

其中对任意 $t \in [0,T]$, $R_i^{-1}(t)$ 存在, $R_i(t), Q_i(t)$ 和 Q_{iT} 对称, 并且矩阵 $A(t)$, $B(t)$, $C(t), D(t), B_i(t), C_i(t), D_i(t), Q_i(t), R_i(t), R_i^{-1}(t), i=1,2,\cdots,L$ 的所有元素是关于时间的分段光滑函数. 这里我们仅考虑了确定性的矩阵, 对于随机矩阵可以类似推广.

5.4.1 主要定理

从定理 5.1 可知, GBCS 的精确 V-能控性等价于正倒向随机微分方程 (5.15) 的精确 V-能控能控性. 为了将线性 GBCS 对应的正倒向随机微分方程写成更紧凑的形式, 我们引入如下的一些记号:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ p_1(t) \\ \vdots \\ p_L(t) \end{bmatrix},\ p(t) = \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ \vdots \\ p_L(t) \end{bmatrix},\ q(t) = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_L(t) \end{bmatrix}, \qquad \text{... (5.18)}$$

和

$$
\begin{aligned}
S(t) &= \left[B_1(t)R_1^{-1}(t)B_1^T(t),\ \cdots,\ B_L(t)R_L^{-1}(t)B_L^T(t)\right],\\
T(t) &= \left[D_1(t)R_1^{-1}(t)D_1^T(t),\ \cdots,\ D_L(t)R_L^{-1}(t)D_L^T(t)\right],\\
M(t) &= \left[B_1(t)R_1^{-1}(t)D_1^T(t),\ \cdots,\ B_L(t)R_L^{-1}(t)D_L^T(t)\right],\\
N(t) &= \left[D_1(t)R_1^{-1}(t)B_1^T(t),\ \cdots,\ D_L(t)R_L^{-1}(t)B_L^T(t)\right],\\
Q(t) &= \left[Q_1^T(t),\ \cdots,\ Q_L^T(t)\right],\\
Q_T &= \left[Q_{1T}^T,\ \cdots,\ Q_{LT}^T\right]^T,\\
\overline{A}(t) &= \begin{bmatrix} A(t) & S(t)\\ -Q(t) & -I_L\otimes A^T(t)\end{bmatrix},\ \overline{A}_1(t) = \begin{bmatrix} C(t) & T(t)\\ 0 & 0\end{bmatrix},\\
\overline{B}(t) &= \left[B^T(t),0,\cdots,0\right]^T,\qquad \overline{B}_1(t) = \left[D^T(t),0,\cdots,0\right]^T,\\
\overline{C}(t) &= \begin{bmatrix} M(t)\\ -I_L\otimes C^T(t)\end{bmatrix},\qquad \overline{C}_1(t) = \begin{bmatrix} N(t)\\ I_L\otimes I_n\end{bmatrix},\\
\widehat{C}(t) &= \left[0, I_{nL}\right]\in R^{Ln\times(L+1)n}.
\end{aligned}
\tag{5.19}
$$

线性 GBCS 对应的正倒向微分方程 (5.15) 也是线性的, 其可以写成如下形式:

$$
\begin{cases}
dX(t) = \left(\overline{A}(t)X(t) + \overline{B}(t)u(t) + \overline{C}(t)q(t)\right)dt\\
\qquad\qquad + \left(\overline{A}_1(t)X(t) + \overline{B}_1(t)u(t) + \overline{C}_1(t)q(t)\right)dw(t),\\
x(0) = x_0,\ p(T) = Q_T x(T).
\end{cases}
\tag{5.20}
$$

因此, 上面定义中的矩阵 $\overline{A}(t)$ 和 $\overline{A}_1(t)$ 恰好是系统 (5.15) 的系统矩阵, 而矩阵 $\overline{B}(t)$ 和 $\overline{B}_1(t)$ 为控制矩阵.

下面给出线性 GBCS 的一些基本假设.

(A1) 下面的 $FBSDE$ 存在唯一解:

$$
\begin{cases}
dX(t) = \left(\overline{A}(t)X(t) + \overline{C}(t)q(t)\right)dt + \left(\overline{A}_1(t)X(t) + \overline{C}_1(t)q(t)\right)dw(t),\\
x(0) = 0,\ p(T) = Q_T x(T),
\end{cases}
\tag{5.21}
$$

其中 $X(t) = (x^T(t), p^T(t))^T$.

(A2) 下述 *Riccati* 微分方程组在 $[0,T]$ 上存在强正则解 K_j, $j=1,2,\cdots,L$:

$$\begin{cases} \dot{K}_j(t)= -A^TK_j-K_jA-Q_j-C^TK_jC+ \\ \qquad (B_j^TK_j+D_j^TK_jC)^T(R_j+D_j^TK_jD_j)^{-1}(B_j^TK_j+D_j^TK_jC) \\ K_j(T)=Q_{jT}, \end{cases} \quad \text{... (5.22)}$$

K_j 称为强正则解, 如果存在一个正数 $\lambda>0$ 使得下述条件成立[74]:

$$R_j(t)+D_j^T(t)K_j(t)D_j(t)\geq \lambda I,\ a.e.t\in[0,T]. \quad \text{... (5.23)}$$

如果随机线性二次最优控制的标准假设成立, 也即矩阵 $Q_i(t)$, Q_{iT}, $(i=1,2,\cdots,L)$ 为半正定矩阵并且 $R_i(t)>0$, 则假设 (A2) 自动成立[37]. 这里放松标志假设不仅是在理论上有意义, 在实际中更能反映不同个体的利益冲突. 如果矩阵 $Q_i(t)$, Q_{iT}, $(i=1,2,\cdots,L)$ 为半正定矩阵并且 $R_i(t)>0$, 则意味着所有下层个体都是想使用最小的能力使系统状态能力最小, 但如果矩阵 $Q_i(t)$, Q_{iT}, $(i=1,2,\cdots,L)$ 不一定半正定, 则意味有有的个体可能性最大化系统状态的某些分量, 这意味着放松半正定的假设可以建模个体对状态的不同态度, 也即他们在利益上的冲突.

下面我们给出线性随机 GBCS 有关能控性的一些结论.

定理 5.2 如果由 (5.16) 和 (5.17) 定义的随机 GBCS 是精确 *V*-能控的, 则下面两条件成立:

1. 对任何零测集 I, 有

$$\overline{V}\subseteq\bigcup_{t\in[0,T]-I}\mathrm{Im}(D(t)), \quad \text{... (5.24)}$$

其中 $\overline{V}=\{v\in R^n: v_i=0, h<i\leq n\}$.

2. 矩阵

$$\left[\begin{bmatrix}0_{n\times nL}\\ I_{nL}\end{bmatrix}, \overline{\Phi}_T\overline{Q}_T\begin{bmatrix}0_{h\times(n-h)}\\ I_{n-h}\end{bmatrix}, M(T)\right], \quad \text{... (5.25)}$$

是满秩的, 其中

$$\begin{aligned} M(T)=&E\int_0^T\Phi(t)\overline{B}(t)\overline{B}(t)^T\Phi^T(t)\,dt, \\ \overline{\Phi}_T=&E\Phi(T),\ \overline{Q}_T=\begin{bmatrix}I_n\\ Q_T\end{bmatrix}\in R^{(L+1)n\times n}, \end{aligned} \quad \text{... (5.26)}$$

矩阵 $\Phi(t)$ 定义为

$$\begin{cases} d\Phi(t) &= -\Phi(t)\overline{A}(t)dt - \Phi(t)\overline{C}(t)\widehat{C}(t)dw(t), \\ \Phi(0) &= I_{(L+1)n\times(L+1)n}, \end{cases} \qquad \dots (5.27)$$

在上述定理中, 第一个条件是关于系统扩散项中控制矩阵的, 控制通过这项可以对系统状态的分布进行调控, 因为我们的能控性是要求末值达到空间 $L^2(\Omega,\mathcal{F}_T,P;R^h)$ 的任意值, 所以这个条件具有某种直观的意义. 第二个条件可以看成是关于系统状态均值能控的条件, 也即可以把状态的均值调控到任意制定值. 如果系统是确定性系统, 按确定性 GBCS 能控性的定义, 可以验证上述定理中的第二个条件就是能控性的条件.

定理 5.3 如果由 (5.16) 和 (5.17) 定义的随机 GBCS 满足假设 (A1) 和 (A2), 则该 GBCS 是精确 V-能控的当且仅当下面两个条件成立:

1. 对任意的 $x^h \in L^2(\Omega,\mathcal{F}_T,P;R^h)$, 存在 $x_F \in L^2(\Omega,\mathcal{F}_T,P;R^{n-h})$ 和 $u(\cdot) \in U$ 满足下面的 BSDE 存在解:

$$\begin{cases} dX(t) = \Big(\overline{A}(t)X(t) + \overline{B}(t)u(t) + \overline{C}(t)q(t)\Big)dt \\ \qquad\qquad + \Big(\overline{A}_1(t)X(t) + \overline{B}_1(t)u(t) + \overline{C}_1(t)q(t)\Big)dw(t), \\ x(T) = x_T,\ p(T) = Q_T x(T). \end{cases} \qquad \dots (5.28)$$

其中 $x_T = \begin{bmatrix} x^h \\ x_F \end{bmatrix} \in L^2(\Omega,\mathcal{F}_T,P;R^n)$.

2. 与定理 5.2 中定义的相同矩阵

$$\left[\begin{bmatrix} 0 \\ I_{nL} \end{bmatrix}, \overline{\Phi}_T\overline{Q}_T\begin{bmatrix} 0_{h\times(n-h)} \\ I_{n-h} \end{bmatrix}, M(T)\right], \qquad \dots (5.29)$$

满秩.

如果对任意 $t \in [0,T]$, $rank(D(t)) = n$ 成立, 则 $m \geq n$ 并且矩阵 $\widetilde{B}_1(t) = [\overline{B}_1(t),\overline{C}_1(t)]$ 也是满秩的. 此时, 我们可以找到一个可逆的 $(Ln+m)\times(Ln+m)$-矩阵 $H(t)$ 满足 $\widetilde{B}_1(t)H(t) = [I_{(L+1)n},0]$ 和一个矩阵 $K(t)$ 使得 $\widetilde{B}_1(t)K(t) = -\overline{A}_1(t)$.

我们定义如下转移矩阵 $\Phi(t)$

$$\begin{cases} d\Phi(t) &= -\Phi(t)\widehat{A}(t)dt - \Phi(t)\widehat{A}_1(t)dw(t), \\ \Phi(0) &= I_{(L+1)n\times(L+1)n}, \end{cases} \qquad \dots (5.30)$$

和一个能控性矩阵 $M(T)$

$$M(T) = E\int_0^T \Phi(t)\widehat{B}(t)\widehat{B}(t)^T\Phi^T(t)\,dt \in R^{(L+1)n\times(L+1)n}, \qquad \text{... (5.31)}$$

其中

$$\begin{aligned}
\widehat{A}(t) &= \overline{A}(t) + \widetilde{B}(t)K(t) \in R^{(L+1)n\times(L+1)n},\\
\widehat{A}_1(t) &= \widetilde{B}(t)H(t)\begin{bmatrix} I_{(L+1)n} \\ 0 \end{bmatrix} \in R^{(L+1)n\times(L+1)n},\\
\widehat{B}(t) &= \widetilde{B}(t)H(t)\begin{bmatrix} 0 \\ I_{m-n} \end{bmatrix} \in R^{(L+1)n\times(m-n)},\\
\widetilde{B}(t) &= [\overline{B}(t), \overline{C}(t)],\ \widetilde{B}_1(t) = [\overline{B}_1(t),\ \overline{C}_1(t)].
\end{aligned} \qquad \text{... (5.32)}$$

定理 5.4 如果由 (5.16) 和 (5.17) 定义的随机 GBCS 满足假设 (A1) 和 (A2) 并且有对任意 $t \in [0, T]$, $rank(D(t)) = n$, 则该 GBCS 是完全能控的当且仅当下面矩阵满秩:

$$\left[\begin{bmatrix} 0 \\ I_{nL} \end{bmatrix},\ M(T)\right]. \qquad \text{... (5.33)}$$

在定理 5.4 中的条件对任意 $t \in [0, T]$, $rank(D(t)) = n$ 看着似乎是太苛刻. 它意味着宏观控制输入的维数要比系统状态的维数高, 然而在一些特殊的情况下, 我们可以证明这个条件是必要的.

下面我们给出一个新的假设.

(A3) 扩散项中的控制矩阵 $D(t)$ 是定常矩阵, 也即 $D(t) \equiv D$.

定理 5.5 如果由 (5.16) 和 (5.17) 定义的随机 GBCS 满足假设 (A1), (A2) 和 (A3). 则该 GBCS 是完全能控的当且仅当下面两个条件成立:

1. $\mathrm{rank}(D) = n$;
2. 矩阵

$$\left[\begin{bmatrix} 0 \\ I_{nL} \end{bmatrix},\ M(T)\right]$$

满秩.

对于线下定常系统我们可以得出更加简洁的判定, 而无需计算系统转移矩阵[75]. 此时矩阵 $A(t), B(t), C(t), D(t), B_i(t), D_i(t), Q_i(t), R_i(t), (i=1,2,\cdots,L)$ 均与时间 t 无关, 将它们分别记为 $A, B, C, D, B_i, D_i, Q_i, R_i$ $(i=1,2,\ldots,L)$.

定理 5.6 如果由 (5.16) 和 (5.17) 定义的随机 GBCS 是定常的并且满足假设 (A1) 和 (A2). 则该 GBCS 是完全能控的当且仅当下面秩条件成立:

1. $\mathrm{rank}(D)=n$;
2. $\mathrm{rank}(Q_C)=n$.

其中

$$Q_C=[I_n,\ 0]\Big[\widehat{B},\ \widehat{AB},\ \widehat{A}_1\widehat{B}, \widehat{AA_1}\widehat{B},\ \widehat{A}_1\widehat{AB},\ \cdots\Big],$$

矩阵 $\widehat{A}, \widehat{A}_1$ 和 $\widehat{B}$ 是相对于定义 5.32 中矩阵 $\widehat{A}(t), \widehat{A}_1(t)$ 和 $\widehat{B}(t)$ 的定常情形.

5.4.2 主要定理证明

这部分我们给出定理的证明. 在证明之前, 我们先来分析线性随机 GBCS.

暂时假定对于宏观调控策略 $u(t)(t\in[0,T])$ 和系统初始值 $x_0, x_{i,0}(i=1,2,\ldots,L)$, 下层决策个体形成的随机微分博弈存在唯一的开环纳什均衡 $(u_1^*(\cdot), u_2^*(\cdot),\cdots,u_L^*(\cdot))$, 则对于任意 $i\in\{1,\cdots,L\}$, $u_i^*(\cdot)$ 是下述随机线性二次最优控制的唯一解:

$$\begin{cases} dx(t)=\Big(A(t)x(t)+\sum\limits_{j\neq i}B_j(t)u_j^*(t)+B_i(t)u_i(t)+B(t)u(t)\Big)dt+ \\ \qquad\qquad \Big(C(t)x(t)+\sum\limits_{j\neq i}D_j(t)u_j^*(t)+D_i(t)u_i(t)+D(t)u(t)\Big)dw(t), \\ x(0)=x_0, \end{cases} \quad \text{... (5.34)}$$

其中 $u_i(\cdot)$ 最小化如下指标函数:

$$J_i(u_1(\cdot),u_2(\cdot),\ldots,u_L(\cdot))= \frac{1}{2}E\int_0^T\Big[x^T(t)Q_i(t)x(t)+u_i^T(t)R_i(t)u_i(t)\Big]dt+\frac{1}{2}Ex^T(T)Q_{iT}x(T). \quad \text{... (5.35)}$$

由随机极大值原理可知, 控制 $u_i^*(\cdot)$ 满足

$$\begin{cases} u_i^*(t) = R_i^{-1}(t)\Big(B_i^T(t)p_i(t) + D_i^T(t)q_i(t)\Big) \\ dx(t) = \Big(A(t)x(t) + \sum_{j=1}^{L} B_j(t)u_j^*(t) + B(t)u(t)\Big)dt \\ \qquad + \Big(C(t)x(t) + \sum_{j=1}^{L} D_j(t)u_j^*(t) + D(t)u(t)\Big)dw(t), \\ dp(t) = -\Big(Q_i(t)x(t) - A^T(t)p_i(t) - C^T(t)q_i(t)\Big)dt + q_i(t)dw(t) \\ x(0) = x_0, p_i(T) = Q_{iT}x(T), i = 1, 2, \cdots, L. \end{cases} \quad \ldots (5.36)$$

使用式 (5.18) 和 (5.19) 定义的符号, 我们可以将方程 (5.36) 重写为如下形式:

$$\begin{cases} dx(t) = \Big(A(t)x(t) + S(t)p(t) + M(t)q(t) + B(t)u(t)\Big)dt \\ \qquad + \Big(C(t)x(t) + T(t)p(t) + N(t)q(t) + D(t)u(t)\Big)dw(t), \\ dp(t) = \Big(Q(t)x(t) - I_L \otimes A^T(t)p(t) - I_L \otimes C^T(t)q(t)\Big)dt + q(t)dw(t), \\ x(0) = x_0,\ p(T) = Q_T x(T). \end{cases} \quad \ldots (5.37)$$

注释 5.1 在方程 (5.37) 中, 过程 $p(t)$ 给出的是末值条件而不是初值条件, 这被称为倒向随机微分方程 (BSDE). 因此方程 (5.37) 是一个完全耦合的正倒向随机微分方程 (FBSDE). 想了解更多关于 BSDE 的信息, 可以参考由 Pardoux 和 Peng 的原始文章 [76]. 这类 FBSDEs 已经被很多人深入研究过[37, 77]. 方程 (5.37) 也可以被重写为如式 (5.20) 更加紧凑的形式.

为了证明定理, 我们首先需要引入并证明几个重要的引理.

命题 5.1 如果假设 (A2) 成立, 则对于任意宏观调控者的策略 $u(t)(t \in [0, T])$ 和任意系统初始值 x_0, 由 (5.16) 和 (5.17) 定义的随机微分博弈存在开环纳什均衡当且仅当 FBSDE (5.37) 存在解. 进一步, 如果假设 (A1) 和 (A2) 都成立, 则该微分博弈存在唯一开环纳什均衡.

证明 尽管我们相信这个结论不是新的, 但因为我们没有找到正好符合这个结论的参考文献, 因此为了方便我们给出证明的梗概.

命题的必要性是显然的, 因此我们只需要证明充分性即可.

对任何固定的输入策略 $u(t), t \in [0,T]$, 假定 FBSDE (5.37) 存在一个解 $(x(\cdot), p(\cdot), q(\cdot))$, 则我们可以证明下述的策略组合

$$\{\, u_i^*(t) = R_i^{-1}(t)\Big(B_i^T(t)p_i(t) + D_i^T(t)q_i(t)\Big), i = 1, \cdots, L \,\} \qquad \text{... (5.38)}$$

构成一个纳什均衡.

由 $R_i^{-1}(t), B_i(t), D_i(t)$ 的有界性和 $p_i(\cdot) \in L^2_{\mathcal{F}}(0,T;R^n)$, $q_i(\cdot) \in L^2_{\mathcal{F}}(0,T;R^n)$ 可知 $u_i^*(\cdot)(i = 1, \cdots, L)$ 是下层决策个体 i 的开环容许控制.

任意选择参与者 i, 不是一般性我们假设 $i = 1$, 固定其他参与者的策略为 (5.38) 中的相应控制. 若果我们可以证明 $u_1^*(\cdot)$ 是个体 1 的最优控制, 则策略组合 (5.38) 构成一个纳什均衡. 这正是我们将以证明的结论.

用 $u_i^*(\cdot)(i = 2, \cdots, L)$ 代替 (5.16) 和 (5.17) 中的 $u_i(\cdot)(i = 2, \cdots, L)$, 我们来求解下面的最优控制问题:

$$\min_{u_1(\cdot)\in U_1} J_1(u_1(\cdot), u_2^*(\cdot), \ldots, u_L^*(\cdot)), \qquad \text{... (5.39)}$$

其中

$$\begin{cases} dx(t) = \Big(A(t)x(t) + B_1(t)u_1(t) + \sum_{i=2}^{L} B_i(t)u_i^*(t) + B(t)u(t)\Big)dt \\ \qquad\qquad + \Big(C(t)x(t) + D_1(t)u_1(t) + \sum_{i=2}^{L} D_i(t)u_i^*(t) + D(t)u(t)\Big)dw(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \qquad \text{... (5.40)}$$

如果假设 (A2) 成立, 也即方程组 (5.22) 有强正则解, 则上述最优控制存在唯一的开环最优控制并且映射 $u_1(\cdot) \to J^0(u_1(\cdot)) = J_1^0(u_1(\cdot), u_2^*, \ldots, u_L^*)$ 是一致凸的[74], 其中

$$J^0(u_1(\cdot)) = \frac{1}{2}E\Big\{\int_0^T \Big(x_1^T(t)Q_1(t)x_1(t) + u_1^T(t)R_1(t)u_1(t)\Big)dt + x_1^T(T)Q_{1T}x_1(T)\Big\}, \qquad \text{... (5.41)}$$

并且 $x_1(\cdot)$ 是下面 FSDE 的解:

$$\begin{cases} dx_1(t) = \Big(A(t)x_1(t) + B_1(t)u_1(t)\Big)dt + \Big(C(t)x_1(t) + D_1(t)u_1(t)\Big)dw(t), \\ x_1(0) = 0,\ t \in [0,T]. \end{cases} \qquad \text{... (5.42)}$$

一致凸可以推出对任意 $u_1(\cdot) \in U_1$, $J^0(u_1(\cdot)) \geq 0$.

对任意 $\lambda \in R$ 和 $v(\cdot) \in U_1$, 使用与文献 [78] 类似的方法可得

$$\begin{aligned}&J_1(u_1^*(\cdot) + \lambda v(\cdot), u_2^*, \ldots, u_L^*) - J_1(u_1^*(\cdot), u_2^*, \ldots, u_L^*)\\ =&\lambda^2 J^0(v(\cdot)) \geq 0,\end{aligned}$$

因此 $u_1^*(\cdot)$ 是唯一的最优开环控制.

从上面的证明可知, 对 FBSDE (5.37) 的任意解 $(x(\cdot), p(\cdot), q(\cdot))$, 我们都可以构造一个纳什均衡, 反之亦然. 因此在 FBSDE (5.37) 的解与下层决策个体构成的随机微分博弈的纳什均衡之间可以建立一个一一映射.

如果假设 (A1) 和 (A2) 都成立, 我们证明对任意宏观策略输入 $u(\cdot)$, 纳什均衡唯一. 假设不唯一则对某些输入 $u(\cdot)$, 存在至少两个不同的纳什均衡, 此时由上面证明可知 方程 (5.37) 存在只是两个不同的解 $(x^1(\cdot), p^1(\cdot), q^1(\cdot))$ 和 $(x^2(\cdot), p^2(\cdot), q^2(\cdot))$, 我们可以得到 $(x(\cdot), p(\cdot), q(\cdot)) = (x^1(\cdot) - x^2(\cdot), p^1(\cdot) - p^2(\cdot), q^1(\cdot) - q^2(\cdot)) \neq 0$ 是下述 FBSDE 的解:

$$\begin{cases} dx(t) = \Big(A(t)x(t) + S(t)p(t) + M(t)q(t)\Big)dt \\ \qquad\qquad + \Big(C(t)x(t) + T(t)p(t) + N(t)q(t)\Big)dw(t), \\ dp(t) = \Big(Q(t)x(t) - I_L \otimes A^T(t)p(t) - I_L \otimes C^T(t)q(t)\Big)dt + q(t)dw(t), \\ x(0) = 0,\ p(T) = Q_T x(T). \end{cases} \quad \text{... (5.43)}$$

很明显 $(0, 0, 0)$ 是 FBSDE (5.43) 的一个解. 因此我们得到 FBSDE (5.43) 的两个不同解, 这与假设 (A1) 矛盾, 因此命题得证. □

考虑下面的倒向随机微分方程 (BSDE)

$$\begin{cases} dx(t) = b(x(t), v(t), t)dt + \sigma(x(t), v(t), t)dw(t), \\ x(T) = x_T. \end{cases} \quad \text{... (5.44)}$$

我们假设方程 (5.44) 满足下面的条件: 对任意 $(x, v) \in R^n \times R^m$,

$$\begin{aligned}&b(x, v, \cdot) \in L^2_{\mathcal{F}}(0, T; R^n),\\ &\sigma(x, v, \cdot) \in L^2_{\mathcal{F}}(0, T; R^n),\\ &\lim_{t \to T} E\|\sigma(x, v, t) - \sigma(x, v, T)\|^2 = 0,\end{aligned}$$

函数 $b(x, v, t), \sigma(x, v, t)$ 关于其变量 (x, v) 满足对时间 $t \in [0, T]$ 的一致线性增长条件, 并且函数 $\sigma(x, v, t)$ 关于其 x 满足对 (v, t) 是一致 Lipschitizian.

类似于文献 [76], 我们也可以定义方程 (5.44) V-E-良定义的概念, 其中 V 是空间 $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P; R^n)$ 的一个线性子空间.

定义 5.3 系统 (5.44) 称为是 V-E-良定义的, 如果对任意系统状态末值 $x^h(T) = x_T^h = \xi \in V$, 存在 $v(t) \in L^2_{\mathcal{F}}(0, T; R^m)$, 使得方程 (5.44) 的解 $x(t)$ 满足条件: $P_h x(T) = x_T^h$.

在定义 5.3 中, 我们只对系统状态的末值有要求, 但如果我们想知道系统可以从哪些初始状态值到达目的末值状态, 则我们应该考虑与能控性类似的如下定义.

定义 5.4 系统 (5.44) 称为是 W-V-精确能控的, 如何对任意系统初始状态值 $x(0) = x_0 = \xi \in W \subseteq R^n$ 和状态末值 $x^h(T) = x_T^h = \xi \in V$, 存在 $v(t) \in L^2_{\mathcal{F}}(0, T; R^m)$, 使得方程 (5.44) 的解 $x(t)$ 满足条件: $x(0) = x_0$ and $P_h x(T) = x_T^h$.

记 $v(t) = [u^T(t), q^T(t)]^T$, 则方程 (5.45) 可以被写成如 (5.44) 形式:

$$\begin{cases} dX(t) = \Big(\overline{A}(t)X(t) + \widetilde{B}(t)v(t)\Big)dt \\ \qquad\qquad + \Big(\overline{A}_1(t)X(t) + \widetilde{B}_1(t)v(t)\Big)dw(t), \\ x(0) = x_0,\ p(T) = Q_T x(T). \end{cases} \qquad \text{... (5.45)}$$

其中

$$\widetilde{B}(t) = \Big[\overline{B}(t), \overline{C}(t)\Big],\ \widetilde{B}_1(t) = \Big[\overline{B}_1(t), \overline{C}_1(t)\Big].$$

从上述的定义可知, GBCS (5.16)-(5.17) 是精确 V-能控的当且仅当存在 $R^{(L+1)n}$ 的一个子空间 W 使得 $P_n(W) = R^n$, (5.45) 是 W-V- 精确能控的, 并且末值条件 $p(T) = Q_T x(T)$ 成立. 这也意味着方程 (5.45) 是 V-E-良定义的.

命题 5.2 记 V 为线性空间 $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P; R^h)(0 < h \le n)$. 如果系统 (5.44) 是 V-E-良定义的, 则对任意 $a \in R^m$, $b \in \overline{V} = \{v \in R^n : \|v\| = 1, v_i = 0, h < i \le n\}$, 存在 $(x, v) \in R^n \times R^m$ 满足

$$b^T(\sigma(x, v, t) - \sigma(x, a, t)) \neq 0,\ \text{几乎处处}. \qquad \text{... (5.46)}$$

证明 可以验证方程 (5.45) 的解 $(x(t), v(t))$ 满足

$$\lim_{t\to T} E\|\sigma(x(t), a, t) - \sigma(x(T), a, T)\|^2 = 0,$$
$$b(x(\cdot), v(\cdot), \cdot) \in L^2_{\mathcal{F}}(0, T; R^n),$$
$$\sigma(x(\cdot), v(\cdot), \cdot) \in L^2_{\mathcal{F}}(0, T; R^n).$$

如果条件 (5.46) 不成立, 则我们可以找到 $a \in R^m, b \in \overline{V}$ 满足对任意的 (x, v)

$$b^T(\sigma(x, v, t) - \sigma(x, a, t)) = 0.$$

使 $\hat{x}_T = \xi = \zeta b$ (ζ 在 (2.1) 中被定义). 因为方程 (5.45) 是 V-E-良定义的, 则存在 $x_F \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P; R^{n-h})$ 满足对如下状态末值

$$x_T = \hat{x}_T + \hat{x}_F = \hat{x}_T + \begin{bmatrix} 0 \\ x_F \end{bmatrix} = \zeta \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_h \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta b_1 \\ \vdots \\ \zeta b_h \\ x_F \end{bmatrix} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P; R^n),$$

方程 (5.45) 存在解 $(x(t), v(t))$, 也即

$$x_T = \hat{x}_T + \hat{x}_F = x_0 + \int_0^T b(x(s), v(s), s)ds + \int_0^T \sigma(x(s), v(s), s)dw(s),$$

这可以得到

$$\begin{aligned}
\zeta &= \zeta b^T b = \zeta b^T b + b^T \hat{x}_F = b^T(\zeta b + \hat{x}_F) = b^T x_T \\
&= b^T x_0 + \int_0^T b^T b(x(s), v(s), s)ds + \int_0^T b^T \sigma(x(s), v(s), s)dw(s) \\
&= b^T x_0 + \int_0^T b^T b(x(s), v(s), s)ds + \int_0^T b^T \sigma(x(s), a, s)dw(s) \\
&= b^T x_0 + \int_0^T \overline{a}(s)ds + \int_0^T \overline{b}(s)dw(s),
\end{aligned}$$

这与定理 (2.1) 矛盾, 所以命题得证. □

类似文献 [79], 我们考虑如下特殊形式

$$\sigma(x, v, t) = \sigma_1(x, t) + G_1(t)v,$$

其中 G_1 是一个 $n\times m$ 的时变矩阵并且函数 $\sigma_1(x, t)$ 关于 x 是一致 Lipschitzian 的. 对于上述特殊情况, 我们可以对方程 (5.45) 是 V-E-良定义的给出一个相对简单的必要条件.

命题 5.3 方程 (5.45) 是 V-E-良定义的一个必要条件是对于任意零测集 $I \subseteq [0,T]$, 我们有

$$\overline{V} \subseteq \bigcup_{t\in[0,T]-I} \mathrm{Im}(G_1(t)), \qquad \text{... (5.47)}$$

其中 $\overline{V} = \{v \in R^n : \|v\| = 1, v_i = 0, h < i \leq n\}$.

证明 可知方程 (5.45) 的解 $(x(t), v(t))$ 满足

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to T} E\|\sigma(x(t), a, t) - \sigma(x(T), a, T)\|^2 = 0,\\
&b(x(\cdot), v(\cdot), \cdot) \in L^2_{\mathcal{F}}(0, T; R^n),\\
&\sigma(x(\cdot), v(\cdot), \cdot) \in L^2_{\mathcal{F}}(0, T; R^n).
\end{aligned}$$

如果条件 (5.47) 不成立, 在存在非零向量 $b \in \overline{V}$ 使得 $b^T G_1(t) = 0$ 几乎处处成立, 因此对任意 (x, v), 我们有

$$b^T(\sigma(x, v, t) - \sigma(x, a, t)) = b^T(G_1(t)(v - a)) = 0.$$

这与 (5.2) 矛盾, 因此得证. □

命题 5.4 定义空间

$$W = \{E\int_0^T \Phi(t)B(t)u(t)\,dt \ : \ u(t)(t \in [0,T]) \ \in L^2_{\mathcal{F}}(0, T; R^m)\} \qquad \text{... (5.48)}$$

和矩阵

$$M = E\int_0^T \Phi(s)B(s)B^T(s)\Phi^T(s)\,ds, \qquad \text{... (5.49)}$$

其中 $\Phi(\cdot) \in L^2_{\mathcal{F}}(0, T; R^{n\times n})$ and $B(\cdot) \in L^2_{\mathcal{F}}(0, T; R^{n\times m})$, 则有

$$\mathrm{Im}(M) \ = \ W.$$

证明 证明分两步.

(1) 首先证明 $Im(M) \subseteq W$.

记 $\{e_i, i = 1, 2, \cdots, n\}$ 是欧式空间 R^n 的任意一组基. 则

$$\begin{aligned}
Me_i &= E\int_0^T \Phi(t)B(t)B^T(t)\Phi^T(t)\,dte_i \ = \ E\int_0^T \Phi(t)B(t)B^T(t)\Phi^T(t)e_i\,dt\\
&= E\int_0^T \Phi(t)B(t)u(t)\,dt
\end{aligned}$$

其中我们令 $u(t) = B^T(t)\Phi^T(t)e_i \in L^2_{\mathcal{F}}(0,T;R^m)$. 因此, 对任意 $i = 1,2,\cdots,n$ 有 $Me_i \in W$, 所以 $Im(M) \subseteq W$ 成立.

(2) 现在我们证明 $Im(M) = W$.

使用反之法并假设等式不成立, 也即 $Im(M) \subsetneq W$. 则存在非零向量 $0 \neq z \in W$ 使得 $z^TMz = 0$, 因此我们有

$$
\begin{aligned}
0 = z^T E\int_0^T \Phi(t)B(t)B^T(t)\Phi^T(t)\,dtz &= E\int_0^T z^T\Phi(t)B(t)B^T(t)\Phi^T(t)z\,dt \\
= E\int_0^T \|z^T\Phi(t)B(t)\|^2\,dt,
\end{aligned}
$$

这意味着

$$z^T\Phi(t)B(t) = 0,\ a.e.\ 0 \leqslant t \leqslant T$$

因为 $z \in W$, 所以存在 $u(t)$ 使得 $z = E\int_0^T \Phi(t)B(t)u(t)\,dt$, 可以得到

$$\|z\|^2 = z^Tz = z^TE\int_0^T \Phi(t)B(t)u(t)\,dt = E\int_0^T z^T\Phi(t)B(t)u(t)\,dt = 0$$

这与 $z \neq 0$ 矛盾, 因此命题得证. □

现在我们给出定理 5.2 的证明.

证明 (1) 定理中第一个条件的证明.

可以验证方程 (5.45) 的解 $(x(t), v(t))$ 满足

$$
\begin{aligned}
&\lim_{t\to T} E\|\sigma(x(t),a,t) - \sigma(x(T),a,T)\| = 0, \\
&b(x(\cdot),v(\cdot),\cdot) \in L^2_{\mathcal{F}}(0,T;R^n), \\
&\sigma(x(\cdot),v(\cdot),\cdot) \in L^2_{\mathcal{F}}(0,T;R^n).
\end{aligned}
$$

因为 GBCS (5.16)-(5.17) 是精确 V-能控的的一个必要条件是方程 5.45 是 V-E-良定义的, 由命题 (5.3) 可知, 对任意零测集 $I \subseteq [0,T]$,

$$\overline{V}_{(L+1)n} \subseteq \bigcup_{t\in[0,T]-I} \mathrm{Im}(\begin{bmatrix} D(t) & N(t) \\ 0 & I_{Ln} \end{bmatrix}),$$

其中 $\overline{V}_{(L+1)n} = \{v \in R^{(L+1)n} : \|v\| = 1, v_i = 0, h < i \leq (L+1)n\}$. 空间 $\overline{V}_{(L+1)n}$ 中任意向量的最后 $(L+1)n$ 个分量均为零, 因此

$$\overline{V} \subseteq \bigcup_{t\in[0,T]-I} \mathrm{Im}(D(t)),$$

其中 $\overline{V}=\{v\in R^n:\|v\|=1,v_i=0,h<i\le n\}$. 证明结束.

(2) 第二个条件的证明.

对式 $\Phi(t)X(t)$ 使用 Ito 公式, 其中 $\Phi(t)$, $X(t)$ 分别在 (5.27) 和 (5.20) 中定义, 我们有

$$
\begin{aligned}
&\Phi(T)X(T)\\
&=X(0)+\int_0^T\Phi(t)dX(t)+\int_0^T(d\Phi(t))X(t)+\\
&\quad\int_0^T-\Phi(t)\overline{C}(t)\widehat{C}(t)\Big(\overline{A}_1(t)X(t)+\overline{B}_1(t)u(t)+\overline{C}_1(t)q(t)\Big)dt\\
&=X(0)+\int_0^T\Phi(t)\Big(\overline{A}(t)X(t)+\overline{B}(t)u(t)+\overline{C}(t)q(t)\Big)dt+\\
&\quad\int_0^T\Phi(t)\Big(\overline{A}_1(t)X(t)+\overline{B}_1(t)u(t)+\overline{C}_1(t)q(t)\Big)dw(t)-\\
&\quad\int_0^T\Phi(t)\overline{A}(t)X(t)dt-\int_0^T\Phi(t)\overline{C}(t)\widehat{C}(t)X(t)dw(t)-\\
&\quad\int_0^T\Phi(t)\overline{C}(t)\widehat{C}(t)\Big(\overline{A}_1(t)X(t)+\overline{B}_1(t)u(t)+\overline{C}_1(t)q(t)\Big)dt,
\end{aligned}
$$

通过简单的代数运算并使用等式 $\widehat{C}(t)\overline{C}_1(t)=I_{Ln}$, $\overline{C}(t)\ \widehat{C}(t)\ \overline{B}_1(t)=0$, 和 $\overline{C}(t)\widehat{C}(t)\overline{A}_1(t)=0$, 我们可得

$$
\begin{aligned}
\Phi(T)X(T)=X(0)&+\int_0^T\Phi(t)\overline{B}(t)u(t)dt+\\
&\int_0^T\Phi(t)\Big(\overline{A}_1(t)X(t)+\overline{B}_1(t)u(t)+\overline{C}_1(t)q(t)\Big)dw(t)-\\
&\int_0^T\Phi(t)\overline{C}(t)\widehat{C}(t)X(t)dw(t)
\end{aligned}
$$

对上面的等式两边分别取希望可得

$$
E\Phi(T)X(T)=EX(0)+E\int_0^T\Phi(t)\overline{B}(t)u(t)dt. \qquad \text{... (5.50)}
$$

如果 GBCS (5.16)-(5.17) 是精确 V-能控的, 则对任意系统初始状态值 x_0, 存在宏观策略输入 $u(t)$, 使得方程 (5.20) 的解存在并满足 $P_h(x(T))=0$, 也即对任意 x_0, 存在 $p(0)\in R^{Ln}$, $u(t)$ 满足

$$
E\Phi(T)\overline{Q}_T\begin{bmatrix}0_{h\times1}\\ x_F\end{bmatrix}=E\begin{bmatrix}x_0\\ p_0\end{bmatrix}+E\int_0^T\Phi(t)\overline{B}(t)u(t)dt,
$$

其中 $x_F\in L^2(\Omega,\mathcal{F}_T,P;R^{n-h})$ 是某一个确定的向量. 通过简单的代数运算可得,

对任意的 $x_0 \in R^n$, 存在 p_0 和控制 $u(\cdot)$ 满足

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \end{bmatrix} = E\begin{bmatrix} 0 \\ p_0 \end{bmatrix} + E\int_0^T \Phi(t)\overline{B}(t)u(t)dt + E\Phi(T)\overline{Q}_T\begin{bmatrix} 0_{h\times 1} \\ x_F \end{bmatrix}.$$

这可以推出

$$\mathrm{Im}\left(\begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}\right) \subseteq \mathrm{Im}\left(\left[\begin{bmatrix} 0 \\ I_{Ln} \end{bmatrix}, \overline{W}, \overline{\Phi}_T\overline{Q}_T\begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-h} \end{bmatrix}\right]\right),$$

其中 $\overline{W}$ 是线性空间 W 的一个基矩阵. 因此矩阵

$$\left[\begin{bmatrix} 0 \\ I_{Ln} \end{bmatrix}, \overline{W}, \overline{\Phi}_T\overline{Q}_T\begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-h} \end{bmatrix}\right]$$

满秩. 由命题 (5.4) 可知, 下面的矩阵也是满秩的

$$\left[\begin{bmatrix} 0 \\ I_{Ln} \end{bmatrix}, M(T), \overline{\Phi}_T\overline{Q}_T\begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-h} \end{bmatrix}\right],$$

因此定理得证. □

下面给出定理 5.3 的证明.

证明 由定理 (5.1) 和命题 (5.1) 可知, 对任意的宏观输入 $u(\cdot)$, 下层决策个体间的微分博弈存在唯一的开环纳什均衡并且对应的 FBSDE (5.37) 对任意的初始条件均存在唯一解. 因此, 由定理 (5.1) 可知, GBCS (5.16)-(5.17) 是精确 V-能控的等价于 FBSDE (5.37) 是精确 V-能控的, 因此我们只需要证明 (5.37) 是精确 V-能控的.

我们分开证明充分性与必要性.

(1) 必要性.

定理的第一个条件之间可以从精确 V-能控的的定义中可以得到, 第二个条件可由定理 (5.1) 得到.

(2) 充分性.

对任意给定的初始值 $x_0 \in R^n$ 和系统状态末值 $x^h \in L^2_{\mathcal{F}_T}(R^h)$, 从定理的第一个条件可知, 存在 $x_F^{x^h} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P; R^{n-h})$ 和 $u^{x^h}(\cdot) \in U$ 满足 BSDE (5.28) 存在一个解 $(X^{x^h}(\cdot), q^{x^h}(\cdot))$, 又由于假设 (A1) (A2), 可知解是唯一的.

如果第二个条件成立, 则对任何系统初始值 $x \in R^n$, 存在输入 $u^{(x)}(\cdot) \in U$ 满足 FBSDE (5.37) 存在唯一解并满足 $x(0) = x$ 和 $x(T) = \begin{bmatrix} 0 \\ x^0 \end{bmatrix}$, 其中 $x^0 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P; R^{n-h})$ 是某个确定的向量.

令 $u(\cdot) = u^{(x_0 - x^{x^h}(0))} + u^{x^h}$, 其中 $x^{x^h}(0)$ 是向量 $X^{x^h}(0)$ 的前 n 个分量, 则我们很容易验证, 在这个构造的输入下, FBSDE (5.37) 存在满足 $x(0) = x_0$ 和 $x(T) = \begin{bmatrix} x^h \\ \overline{x}_F \end{bmatrix}$ 的唯一解, 因此 GBCS 是精确 V-能控的. □

下面我们给出定理 5.4 的证明.

证明 在定理的假设下, 我们可以使用如下线性变换

$$v(t) = H(t)\begin{bmatrix} Z(t) \\ U(t) \end{bmatrix} + K(t)X(t) \qquad \text{... (5.51)}$$

将方程 (5.45) 转化为如下的等价形式:

$$\begin{cases} dX(t) = \left(\widehat{A}(t)X(t) + \widehat{A}_1(t)Z(t) + \widehat{B}(t)U(t)\right)dt + Z(t)dw(t), \\ x(0) = x_0,\ p(T) = Q_T x(T). \end{cases} \qquad \text{... (5.52)}$$

这两个方程 (5.45) 和 (5.52) 的等价是说如果存在平方可积适应过程 $(Z(\cdot), U(\cdot))$ 使得方程 (5.52) 有解 $X(\cdot)$, 则我们可以构造 $v(t)$ 使得方程 (5.45) 有相同的解 $X(\cdot)$, 反之也成立.

我们分开证明必要性和充分性.

(1) 必要性.

对表达式 $\Phi(t)X(t)$ 使用 Ito 公式, 其中 $\Phi(t)$, $X(t)$ 分别在 (5.30) 和 (5.52) 中被定义, 可得

$$\begin{aligned}
&\Phi(T)X(T) \\
&= X(0) + \int_0^T \Phi(t)dX(t) + \int_0^T (d\Phi(t))X(t) + \int_0^T -\Phi(t)\widehat{A}_1(t)Z(t)dt \\
&= X(0) + \int_0^T \Phi(t)\left(\widehat{A}(t)X(t) + \widehat{A}_1(t)Z(t) + \widehat{B}(t)U(t)\right)dt + \int_0^T \Phi(t)Z(t)dw(t) - \\
&\quad \int_0^T \Phi(t)\widehat{A}(t)X(t)dt - \int_0^T \Phi(t)\widehat{A}_1(t)X(t)dw(t) - \int_0^T \Phi(t)\widehat{A}_1(t)Z(t)dt \\
&= X(0) + \int_0^T \Phi(t)\widehat{B}(t)U(t)dt + \int_0^T \Phi(t)\left(Z(t) - \widehat{A}_1(t)X(t)\right)dw(t).
\end{aligned}$$

对上述等式两边分别取希望可得

$$E\Phi(T)X(T) = EX(0) + E\int_0^T \Phi(t)\widehat{B}(t)U(t)dt. \qquad \text{... (5.53)}$$

考虑如下的 BSDE:

$$\begin{cases} dX(t) = (\widehat{A}(t)X(t) + \widehat{A}_1(t)Z(t) + \widehat{B}(t)U(t))dt + Z(t)dw(t), \\ X(T) = 0, \end{cases} \qquad \text{... (5.54)}$$

其中 $x \in L^2_{\mathcal{F}_T}(R^n)$. 根据参考文献 [79] 可知, 对任意 $U(t) \in L^2_{\mathcal{F}}(0,T;R^m)$, 存在唯一的平方可积使用过程 $(X(\cdot),Z(\cdot)) \in L^2_{\mathcal{F}}(0,T;R^{(2L+1)n})$ 满足 BSDE. 我们即这个解为 $(X^{U,x}(\cdot),Z^{U,x}(\cdot))$.

定义空间

$$\begin{aligned} S_0 &= \{X^{U,0}(0):\ U(t) \in L^2_{\mathcal{F}}(0,T;R^m)\}, \\ S_{x_0} &= \{x^{U,0}(0):\ X^{U,0}(0) \in S_0\}, \end{aligned} \qquad \text{... (5.55)}$$

其中 $x^{U,0}(0)$ 是向量 $X^{U,0}(0)$ 的前 n 个分量. 空间 S_{x_0} 是所有可以控制到零的初始态的集合, 也即如果 GBCS (5.16)-(5.17) 的初始状态为 $x_0 \in S_{x_0}$, 则存在宏观调控策略使得系统状态在 T 时刻到达零状态.

如果 GBCS (5.16)-(5.17) 是完全能控的, 则对任何初始态 x_0, 存在 $U(t)$, 使得方程 (5.54) 的解存在并满足 $x(0) = x_0$, 其中 $x(0)$ 是向量 $X(0)$ 的前 n 个分量, 这意味着 $S_{x_0} = R^n$.

如果我们可以证明 $S_0 = Im(M(T))$, 则 $S_{x_0} = R^n$ 可以推出定理 5.4 中的矩阵满秩, 因此必要性证明结束.

现在我们证明等式 $S_0 = Im(M(T))$.

将末值条件 $X(T) = 0$ 带入等式 (5.53) 可得

$$X(0) = -E\int_0^T \Phi(t)\widehat{B}(t)U(t)dt. \qquad \text{... (5.56)}$$

由命题 5.4可知 $S_0 = Im(M(T))$.

(2) 充分性.

如果定理 5.4 中的矩阵是满秩的, 则 $S_{x_0} = R^n$, 也即对任意初始值 x_0, 存在 $U(t)$, 使得方程 (5.54) 存在解并且满足 $x(0) = x_0$. 记相应的控制为 $U^{x_0}(\cdot)$

对任意给定的状态末值 $x_T \in L^2_{\mathcal{F}_T}(R^n)$, 我们知道存在唯一的适应过程对 $(X^{X_T}(\cdot), Z^{X_T}(\cdot))$ 满足如下的 BSDE:

$$\begin{cases} dX(t) = (\widehat{A}(t)X(t) + \widehat{A}_1(t)Z(t))dt + Z(t)dw(t), \\ x(T) = x_T,\ p(T) = Q_T x(T). \end{cases} \quad \text{... (5.57)}$$

对任意状态初始值 $x_0 \in R^n$, 令宏观控制策略为 $U^{x_0 - x^{x_T}(0)}(\cdot)$, 则方程 (5.52) 是可解的并且满足 $x(T) = x_T$.

上述的分析表明在定理的条件下, 对任意状态初始值 $x_0 \in R^n$ 和任意状态末值 $x_T \in L^2_{\mathcal{F}_T}(R^n)$, 我们可以构造一个宏观调控策略使得方程 (5.52) 是可解的并且满足 $x(T) = x_T$. 这正是 GBCS 完全能控的定义, 因此充分性得到证明. □

下面我们给出定理 5.5 的证明.

证明 由定理 5.4 可知, 定理 5.5 的条件是充分的. 我们只需要证明条件 $rank(D) = n$ 是必要的即可, 这可以从定理 5.2 中得到, 所以定理证毕.

□

下面我们给出定理 5.6 的证明.

证明 由定理 5.5 可知, 如果我们可以证明 $Im(M(T)) = Im(Q_C)$, 则定理成立. 实际上, 这个等式可以从 (5.54)-(5.56), 等式 $S_0 = Im(M(T))$ (可参看定理 5.4 的证明) 和定理 2.4 推出. 因此, 定理得证.

□

5.5　本章小结

这一章我们研究了随机 GBCS 以及其能控性问题. 随机 GBCS 的研究不只是理论上对确定性系统的推广, 这更多的是源于随机 GBCS 大量存在以及在考虑控制复杂系统时随机因素是不可避免的. 我们首先给出了一般非线性随机 GBCS 的框架并引入了纳什均衡能控性在随机框架下的定义. 然后我们深入研究线性随机 GBCS 并给出了相对完整的能控性的刻画. 对于随机 GBCS 能控性的研究, 我们需要考虑随机正倒向微分方程的能控性问题, 这在文献中很少被研究, 同时即使是线性的 FBSDE 其可解性在数学上也还没有像确定性 FBDE 那样被完全刻画.

第 6 章　不完全信息 GBCS

6.1　导言

不完全信息无论是控制理论还是博弈论中都被大量研究, 这是由于不完全信息的情况在实际情况中大量出现, 而完全信息的情况很多时候只是对实际系统的简化或理想化假设. 因此对不完全信息的 GBCS 进行研究是重要而且必要的. 本章我们对不完全信息 GBCS 进行初步探讨, 引入不完全信息 GBCS 的概念并对一类特殊系统的能控性进行了研究.

6.2　不完全信息 GBCS

在博弈论中, 不完全信息是指博弈参与人对其他参与人的偏好、收益函数、行动空间等信息是不完全的, 这些不同种类的不完全可以通过一些方法转化为对其他参与人的收益函数信息不完全的形式, 因此博弈论专家使用“类型”来刻画不完全信息, 同一个参与人的不同类型仅在其收益函数上有区别, 具体可参看文献 [80, 第 15 章]. 博弈论在处理不完全信息时, 会假设在参与人类型空间上存在一个概率分布, 并且这个分布是共同知识, 因此可以用贝叶斯的方法来处理. 在控制论中, 不完全信息一般指控制者对被控系统的动态方程、系统参数或系统输出等信息获取不完全或未知. 由于被控系统没有理性个体参与, 系统对控制输入是被动响应, 因此不会存在像博弈系统中欺骗等问题, 控制者可以通过对被控系统输入适当的激励信号来获得某些需要的信息.

由于 GBCS 将博弈模型融入到了控制系统中, 因此不完全信息 GBCS 具有自己的特征. 比如在定义完全信息 GBCS 的时候下层决策个体能够知道到宏观调控者的策略, 并且宏观调控策略是先于下层博弈开始前给出. 但在一些实际情况中, 宏观调控策略可能未知或难以观测. 这种不完全信息其实可以转化为系统的动态映射未知的情况. 仔细分析博弈和控制中可能存在的不完全信息情况, 我们可以将 GBCS 不完全信息归为如下两类: 下层决策个体的类型未知、系统的动态映射未知. 因此我们有如下对不完全信息 GBCS 的定义.

定义 6.1 *不完全信息 GBCS 是存在信息不完全的 GBCS, 由下述要素构成:*

1. 系统动态映射非空集合: $DS = \{T_{D,\lambda} : \lambda \in \Lambda\}$;

2. 收益函数非空集合: $JS_1 = \{J_{1,\theta_1} : \theta_1 \in \Theta_1\}, \cdots, JS_N = \{J_{N,\theta_N} : \theta_N \in \Theta_N\}$;

3. 关于集合 $DS, JS_i, i = 1, \cdots, N$ 的先验结构信息: $\mathcal{PI}$.

其中 DS 表示动态过程的不确定性, 系统的动态可能是这个集合中的某一个; JS_i 表示第 i 个下层决策个体可能的类型.

同定义 GBCS 的定义 3.1 一样, 宏观调控者和下层决策个体到底知道什么信息暗含在他们各自策略集合的定义中. 有时为了明确不完全信息的结构可以明确表示出谁拥有什么信息. 定义中的先验结构信息由实际问题的不同而不同.

信息经济学中的机制设计可以看成是不完全信息 GBCS 最优控制问题. 参考文献 [81, 第三章, 284 页], 我们给出机制设计问题的一般描述.

一个委托人, N 个代理人. 委托人没有私人信息, 代理人 i 的类型 $\theta_i \in \Theta_i$ 是私人信息. 类型空间 $\Theta = \prod_{i=1}^{N} \Theta_i$ 上存在一个概率分布 P, 它表示某种类型出现的概率并且是共同知识. 委托人的目的是设计一个配置函数 $y = (x(\cdot), t(\cdot))$ 使得自己的期望收益最大, 其中 $x(\cdot)$ 是决策向量, $t = (t_1, \cdots, t_N)$ 是从委托人到代理人的转移支付向量. 委托人和代理人都有一个效用函数 $u_i(y, \theta), i = 0, \cdots, N$. 为简单起见这里我们暂时忽略参与约束并直接利用显示原理[81]. 博弈的规则是, 代理人选择自己的类型 $\mu_i \in \Theta_i$, 信号组合 $\mu = (\mu_1, \cdots, u_N)$ 共同决定配置: $y_m : \Theta \to X \times R^N$. 由此可知, 给定一个机制 m, 代理人之间形成一个贝叶斯博弈, 贝叶斯纳什均衡决定了委托人的期望收益.

很容易可以看出, 在这里委托人相当于 GBCS 中的调控者, 代理人是下层决策个体. 系统无动态不确定性, 不确定性来源于调控者对下层决策个体的类型未知, 类型集合上的先验信息是概率分布 P, 调控者的目的是最大化自己的期望收益. 机制设计处理不确定性的方法是直接向下层决策个体询问他们的类型, 决策个体报告的类型觉得了配置, 从而影响下层决策个体的收益. 当然决策个体报告的类型可能是假的, 机制设计理论就是研究在没有私人信息的一方如何设计博弈规则让具有私人信息一方将真实的信息披露出来[9]. 经济学中的合同理论[82] 也对不完全信息进行了深入研究. 这种处理方法是将下层决策个体当成完全理性的参与者.

控制论中有很多方法处理信息不完全, 比如自适应控制[83]、系统辨识[84]、

鲁棒控制[85]、自抗扰控制技术 (ADRC)[86] 等等. 显然博弈论处理不完全信息的方法与控制论有明显的区别, 机制设计中是设计适当的利益分配方法来激励理性参与个体主动披露自己的真实信息, 这正是利用了理性个体是利益驱动的特征. 在控制论中, 经典的被控系统是被动响应的, 因此控制者通过适当的输入来获取系统的响应, 进而从输入输出的信息中获得不完全信息的真实取值. 如何将这两种处理不完全信息的方法融合在一起是一个值得研究的方向, 我们需要研究理性个体在信息未知的情况下如何进行博弈以及如何获取未知信息. 这是一个复杂的问题, 可以参考文献 [87–90] 进一步了解相关的研究. 目前大部分的文献都是将下层决策个体当成有限理性进行处理, 比如使用强化学习方法[91, 92]、No-regret 学习[93] 等. 对于系统动态不确定性的博弈, 文献 [94, 95] 使用独立地第三方机构的方法来估计系统动态, 其估计值作为共同知识为理性个体所知.

对系统动态信息不完全的博弈, 我们进行如下初步探索, 对这类博弈系统的控制留待进一步研究.

首先考虑如下最优控制问题.

令 $X = \{1, \cdots, n\}$, $U = \{1, \cdots, m\}$, $F \subset AF = X^{X\times U}$ 为一非空子集, 并且 p_0 是 F 的一个概率分布. 系统的动态方程为

$$\begin{cases} x(t+1) = f(x(t), u(t)), \\ \quad x(0) = x_0 \in X,\ t = 0, \cdots, T-1, \end{cases} \quad ... (6.1)$$

其中 f 是未知函数但 $f \in F$ 并且其为 F 中某个特定函数 f 的概率为 $P(f)$. 控制者的收益函数为

$$J(u(\cdot)) = K(x(T)) + \sum_{t=0}^{T-1} S(x(t), u(t)) \quad ... (6.2)$$

并希望最大化其期望值. 容许控制集 $\mathcal{U}$ 为所有可能的反馈控制, 也即

$$\mathcal{U} = \{(u_t(\cdot))_{0\le t\le T-1} : u_t(x^t, u^{t-1}) \in U\}, \quad ... (6.3)$$

其中 $x^t = (x_0, \cdots, x_t)$ 和 $u^{t-1} = (u_0, \cdots, u_{t-1})$.

由于容许控制集合 $\mathcal{U}$ 是有限集合, 因此上述定义的最优控制问题存在最优控制, 也即最优控制问题是良定义的. 由于系统存在不完全信息, 也即对系统的动态信息是不完全的, 上述最优控制无法直接使用动态规划进行求解.

由上述分析可知, 从任意时刻 $t \in [T] = \{0, 1, \cdots, T\}$, 任意状态 $x \in X$ 和 F 上的任意分布 p 开始的最优控制问题均存在最优控制以及相应的最优期望值. 由于最优期望值必唯一, 故可令最优值函数为 $V(t, x, p)$. 设在 $t \in [T-1]$ 时刻系统的状态为 $x \in X$ 并且 F 上的分布为 p, 当输入控制 u 后系统的状态变为 y, 此时控制者可以对真实的系统动态进行估计, 也即估计 F 上的一个新的概率分布 $p(x, y; p, u)$, 这可以通过如下方式进行计算:

1. 如果 $p(f) = 0$, 则 $p(x, y; p, u)(f) = 0$;
2. 如果 $p(f) \neq 0$ 但是 $f(x, u) \neq y$, 则 $p(x, y; p, u)(f) = 0$;
3. 记所有满足 $p(f) \neq 0$ 并且 $f(x, u) = y$ 的函数集合为 $F(t+1)$, 则对任意 $f \in F(t+1)$ 有

$$p(x, y; p, u)(f) = \frac{p(f)}{\sum_{\bar{f} \in F(t+1)} p(\bar{f})}.$$

因为真实的 f 在集合 (F, p) 中, 所以上述定义的分布 $p(x, y; p, u)$ 有意义.

下面我们可以得到类似确定性最优控制中的最优性原理.

定理 6.1 最优值函数 $V(t, x, p)$ 满足如下方程:

$$\begin{cases} V(t, x, p) = \max_{u \in U} \left\{ S(x, u) + \sum_{y \in X} \mu(x, u, y; p) V(t+1, y, p(x, y; p, u)) \right\}, \\ V(T, x, p) = K(x). \end{cases} \quad \text{... (6.4)}$$

其中概率分布 μ 的计算如下:

$$\mu(x, u, y; p) = \sum_{f \in F, f(x,u) = y} p(f). \quad \text{... (6.5)}$$

证明 证明类似动态规划的方法. □

面对系统动态信息不完全的最优控制, 控制者要在探索与开发中取得平衡, 也即要在使用输入来系统辨识和利用已获得的信息来最优化之间进行权衡. 如果初始分布 p_0 退化为单点, 也即存在 $f \in F$ 满足 $p_0(f) = 1$, 则上述定理退化为确定性动态系统的最优性原理.

现在我们考虑动态信息不完全的 L-人博弈问题.

令 $X = \{0, \cdots, n\}$, $U_i = \{0, \cdots, m_i\} (i = 1, \cdots, L)$, $U = \prod_{i=1}^{L} U_i$, $F \subset X^{X \times U}$ 是

一个非空子集, 并且 p_0 为 F 上的初始概率分布. 系统动态为

$$\begin{cases} x(t+1) = f(x(t), u_1(t), \cdots, u_L(t)), \\ \quad x(0) = x_0 \in X,\ t = 0, \cdots, T-1, \end{cases} \quad \text{... (6.6)}$$

其中 f 是未知函数但 $f \in F$ 并且其为 F 中某个特定函数 f 的概率为 $P(f)$. 参与者 i 的收益函数为

$$J_i(u_i(\cdot), u_{-i}(\cdot)) = K_i(x(T)) + \sum_{t=0}^{T-1} S_i(x(t), u_i(t), u_{-i}(t)). \quad \text{... (6.7)}$$

每个参与者希望最大化各自的期望收益. 博弈模型的信息为共同知识. 假设每个参与者都可以观察到其他个体的行动, 系统唯一的不确定性来源于系统动态的不完全.

正如有限博弈纯策略纳什均衡不一定存在, 我们需要引入混合策略.

$$\mathcal{U}_i = \{(u_{i,t}(\cdot))_{0\le t\le T-1} : u_{i,t}(x^t, u^{t-1}) \in \Delta(U_i)\}, \quad \text{... (6.8)}$$

其中 $x^t = (x_0, \cdots, x_t)$, $u_t = (u_{1,t}, \cdots, u_{L,t})$ 和 $u^{t-1} = (u_0, \cdots, u_{t-1})$. 由策略集合的定义可知我们主要关注的是子博弈精炼纳什均衡.

类似动态博弈的逆向求解以及上述动态信息不完全的最优控制方法可以证明下述结论, 并且利用 (6.4) 类似的最优性原理可以求解纳什均衡.

定理 6.2 *具有动态信息不完全的博弈* (6.6) - (6.8) *存在子博弈精炼纳什均衡.*

这个博弈与传统的贝叶斯博弈有区别, 贝叶斯博弈中的不确定性是来自于参与者的“类型”, “自然”在博弈开始以参与者都知道的类型分布随机选取各个参与者的类型, 然后博弈开始. 这里类型是私人信息, 也即参与者自己知道自己的类型但不知道其他人的类型, 但是“自然”抽取类型的分布是共同知识. 在上述信息动态信息不完全的博弈中, 可以认为“自然”首先以概率 p_0 随机选的系统的动态 f, 所有参与者都不知道这个真实的动态 f, 但参与者可以通过自己的行动输入来辨识 f. 这时参与者会在系统辨识、最优化自己的收益、其他参与者行动的影响三者之间进行权衡.

上述博弈也与有限随机博弈 (Stochastic Games, 定义见第3.5节例子3.1) 不同, 有限随机博弈的系统动态为马尔科夫链, 参与者的行动输入影响系统的概率转移, 但在随机博弈中不存在系统辨识的问题, 所有的信息都是已知的只是状态的转移是随机的.

6.3 一类不完全信息 GBCS 能控性研究

这小节我们考虑当下层决策个体不知道宏观策略的情况, 这可能是由于宏观调控者的输入策略难以观测或观测成本很高造成的. 作为对不完全信息 $GBCS$ 的初步探讨, 我们使用鲁棒纳什均衡来刻画下层决策个体之间的博弈结果. 此时, 下层决策个体将宏观策略当成外部噪声来处理, 每个个体均使用鲁棒最优化方法来决定自己的策略.

我们考虑确定性的线性二次非合作微分博弈. $GBCS$ 的动态为:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + \sum_{i=1}^{L} B_i(t)u_i(t) + B(t)u(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad \text{... (6.9)}$$

个体 $i(i = 1, 2, \ldots, L)$ 通过选择输入策略 $u_i(\cdot)$ 最小化的收益函数为:

$$\begin{aligned} J_i(u_1(\cdot), u_2(\cdot), \ldots, u_L(\cdot), u(\cdot)) = {} & x^T(T)Q_{iT}x(T) \\ + \int_0^T & [x^T(t)Q_i(t)x(t) + u_i^T(t)R_i(t)u_i(t) + u^T(t)P_i(t)u(t)]\, dt, \end{aligned} \quad \text{... (6.10)}$$

矩阵 $A(t)$, $B(t)$, $B_i(t)$, $Q_i(t)$, $R_i(t)$, $i = 1, 2, \cdots, L$ 的所有元素是关于时间的分段光滑函数且有界. 决策个体的策略空间为平方可积函数, 即 $u_i(\cdot) \in U_i = L^2([0, T]; R^{m_i})$ 和 $u(\cdot) \in U = L^2([0, T]; R^m)$, 设 $U^F = \prod_{i=1}^{L} U_i$.

在第 4 章中, 我们也考虑了上述模型的 $GBCS$, 但在那里所有信息都是完全的.

定义 6.2 [96] 分两个阶段定义鲁棒纳什均衡. 考虑策略组合 $u^F = (u_1, \cdots, u_L) \in U^F$,

1. 从第 i 个个体的角度来看宏观控制 $\widehat{u}^i(u^F) \in U$ 为最坏的, 如果对任意 $u \in U$ 都有

$$J_i(u^F, \widehat{u}^i(u^F)) \geq J_i(u^F, u).$$

2. 策略组合 $u^{F*} = (u_1^*, \cdots, u_L^*) \in U^F$ 称为一个鲁棒纳什均衡, 如果对所有的 $i \in \{1, \cdots, L\}$ 它满足下面两个条件:
   - 对任意的策略组合 $u^F = (u_1, \cdots, u_L) \in U^F$, 从任意个体 i 的角度来看都存在一个最坏的宏观策略;

- 对任意的个体 i 及其任意的输入 $u_i \in U_i$, 下式对任意的 $\widehat{u}^i(u^F) \in U$ 成立:

$$J_i(u_i^*, u_{-i}^*, \widehat{u}^i(u_i^*, u_{-i}^*)) \leq J_i(u_i, u_{-i}^*, \widehat{u}^i(u_i, u_{-i}^*))$$

由鲁棒纳什均衡的定义可以知道, 如果微分博弈 (6.9)-(6.10) 存在唯一的鲁棒纳什均衡 $u^{F*} = (u_1^*, \cdots, u_L^*) \in U^F$, 则下层个体的输入不会随宏观调控输入变化而变化, 但宏观调控输入可以改变系统动态, 所以宏观调控者可以对系统进行调控. 此时, 对任意的宏观输入 $u \in U$, 系统的动态均为:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + \sum_{i=1}^{L} B_i(t)u_i^*(t) + B(t)u(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad \text{... (6.11)}$$

这使得 $GBCS$ 变成一个纯的控制系统. 因此, 如果对任意初始值 x_0 鲁棒纳什均衡都存在且唯一, 则上述系统的能控性等价于没有下层决策个体参与的纯线性系统的能控性. 现在我们对鲁棒均衡 $u^{F*} = (u_1^*, \cdots, u_L^*)$ 的存在性、唯一性进行刻画..

首先我们引入如下假设.

(A1) 文献 [96] 中定理 3 的条件成立. 在此我们仅给出 Riccati 方程条件: 下述 Riccati 方程组在 $[0, T]$ 存在对称解:

$$\begin{cases} \dot{K}_i(t) = -A^T(t)K_i(t) - K_i(t)A(t) - Q_i(t) + K_i(t)(S_i(t) + T_i(t))K_i(t), \\ K_i(T) = 0,\ i = 1, \cdots, L, \end{cases} \quad \text{... (6.12)}$$

其中 $S_i = B_i R_i^{-1} B_i^T, T_i = BP_i^{-1}B^T$.

这个假设是关于一些矩阵或算子正定或负定, Riccati 方程存在解的假设, 在此我们不详细给出这些假设的具体形式. 下面定理出自文献 [96, Theorem 3].

定理 6.3 [96] 如果假设 (A1) 成立, 则对于宏观调控策略 $u(t), t \in [0, T]$ 和系统初始值 x_0, 由 (6.9) 和 (6.10) 定义的微分博弈存在唯一鲁棒纳什均衡当且仅当下

面的正倒向微分方程 (FBDE) 存在唯一解:

$$
\begin{cases}
\dot{x}_i(t) = Ax_i(t) + \sum_{j=1}^{L} S_j(t)(K_j(t)x_j(t) + e_j(t)) - T_i(t)(K_i(t)x_i(t) + e_i(t)), \\
\dot{e}_i(t) = (A^T - K_i(t)(S_i(t) + T_i(t)))e_i(t) + K_i(t)\sum_{j\neq i} S_j(t)(K_j(t)x_j(t) + e_j(t)), \\
x_i(0) = x_0,\ e_i(T) = 0,\ i = 1, \cdots, L.
\end{cases}
\quad \dots (6.13)
$$

决策个体 i 的策略为: $u_i(t) = -R_i^{-1}(t)B_i^T(t)(K_i(t)x_i(t) + e_i(t))$.

上述定理给出了鲁棒纳什均衡的完全刻画. 同前面研究确定性 GBCS 的思路, 我们应该在上述 (FBDE) 上来研究系统能控性问题. 然而在方程 (6.13) 中含有 Riccati 方程 $K_i(t)$ 同时 Riccati 方程是非线性的, 这使得直接在方程 (6.13) 上来研究会比较困难. 因此我们需要对鲁棒纳什均衡给出一个新的刻画方程, 这个方程最好是线性的. 下面定理给出了这种刻画.

定理 6.4 如果假设 (A1) 成立, 则对于宏观调控策略 $u(t), t \in [0, T]$ 和系统初始值 x_0, 由 (6.9) 和 (6.10) 定义的微分博弈存在唯一鲁棒纳什均衡当且仅当下面的正倒向微分方程 (FBDE) 存在唯一解:

$$
\begin{cases}
\dot{x}_i(t) = A(t)x_i(t) + \sum_{j\neq i} S_j(t)\phi_j(t) + T_i(t)\phi_i(t), \\
\dot{\phi}_i(t) = Q_i(t)x_i(t) - A^T(t)\phi_i(t), \\
x_i(0) = x_0,\ \phi_i(T) = 0,\ i = 1, \cdots, L.
\end{cases}
\quad \dots (6.14)
$$

证明 在 [97] 定理 3 的证明中有如下等式

$$
\begin{aligned}
\Lambda_i(t) =& \Phi^T(T, t)K_{if}x_i(T) + \int_t^T \Phi^T(T, s)Q_i(s)x_i(s)ds \\
=& K_i(t)x_i(t) + e_i(t),
\end{aligned}
\quad \dots (6.15)
$$

由于在我们的模型中矩阵 $K_{if} = 0$ 并令 $\phi_i = \Lambda_i$ 所以我们有

$$
\begin{cases}
\dot{\phi}_i(t) = Q_i(t)x_i(t) - A^T(t)\phi_i(t), \\
\phi_i(T) = 0,\ i = 1, \cdots, L.
\end{cases}
\quad \dots (6.16)
$$

将上述关系式 (6.15) 和 (6.16) 带入 (6.13) 即可得 (6.14). 同时由 [97] 定理 3 的证明可知方程 (6.13) 和方程 (6.14) 的具有相同的存在唯一性, 因此定理得证. □

为了将方程 (6.14) 写得更紧凑, 我们引入如下一些记号:

$$\begin{aligned}
\overline{x}(t) &= [x_1^T(t), \cdots, x_L^T(t)]^T, \\
\overline{\phi}(t) &= [\phi_1^T(t), \cdots, \phi_L^T(t)]^T, \\
\overline{A}(t) &= diag\{A(t), \cdots, A(t)\} \in R^{(nL)\times(nL)}, \\
\overline{Q}(t) &= diag\{Q_1(t), \cdots, Q_L(t)\} \in R^{(nL)\times(nL)}, \\
\overline{S}(t) &= \begin{pmatrix} T_1(t) & S_2(t) & \cdots & S_L(t) \\ S_1(t) & T_2(t) & \cdots & S_L(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ S_1(t) & S_2(t) & \cdots & T_L(t) \end{pmatrix}
\end{aligned} \qquad \text{... (6.17)}$$

则方程 (6.14) 可写重写为

$$\begin{cases} \dot{\overline{x}}(t) = \overline{A}(t)\overline{x} + \overline{S}(t)\overline{\phi}(t), \\ \dot{\overline{\phi}}(t) = \overline{Q}(t)\overline{x}(t) - \overline{A}^T(t)\overline{\phi}(t), \\ \overline{x}(0) = x_0 \otimes \mathbf{1},\ \overline{\phi}(T) = 0. \end{cases} \qquad \text{... (6.18)}$$

因此, 在假设 (A1) 成立的情况下, 鲁棒纳什均衡存在唯一性等价于对任意初始值 x_0 正倒向微分方程 (6.18) 存在唯一解.

注释 6.1 在第 4 章命题 4.1 中我们已经给出了类似上述正倒向微分方程解存在唯一性的充要条件, 但与这里的条件不同, 这里的初始值为 $\overline{x}(0) = x_0 \otimes \mathbf{1}$, 而不是所有的初始值.

定义正倒向微分方程 (6.18) 转移矩阵 $\overline{\Phi}(t, s)$ 为:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{\Phi}(t, s)}{\partial t} = E(t)\overline{\Phi}(t, s) \\ \overline{\Phi}(s, s) = I_{(n+m)} \end{cases}, E(t) = \begin{bmatrix} \overline{A}(t) & \overline{S}(t) \\ \overline{Q}(t) & -\overline{A}^T(t) \end{bmatrix} \qquad \text{... (6.19)}$$

和系统能控性 *Gramian* 矩阵 W 为:

$$W(T) = \int_0^T \Phi(t)B(t)B^T(t)\Phi^T(t)\,dt. \qquad \text{... (6.20)}$$

其中

$$\begin{cases} \dfrac{d\Phi(t)}{dt} = -\Phi(t)A(t), \\ \Phi(0) = I_n, \end{cases} \qquad \text{... (6.21)}$$

定理 6.5 设不完全信息 GBCS 满足假设 (A1), 则该 GBCS 在鲁棒纳什均衡意义下能控当且仅当下述条件成立:

1. 矩阵 $M(T)$ 满秩, 其中

$$M(T) = [I_{nL}, 0_{nL}]\overline{\Phi}(T, 0)\begin{bmatrix} I_{nL} \\ 0_{nL} \end{bmatrix};$$

2. 矩阵 $W(T)$ 满秩.

证明 由能控性的定义可知, 要求对于任意初值 x_0, 存在宏观调控 $u(\cdot)$ 使得均衡存在唯一. 前面分析可知, 均衡的存在唯一与宏观调控 $u(\cdot)$ 无关, 这意味着在假设 (A1) 成立的前提下, 对任意的初始值 x_0, 方程 (6.18) 的解存在且唯一, 下面我们证明定理中的条件 1 是它的充要条件.

使用类似第 4 章命题 4.1 的证明可以得到: 方程 (6.18) 的解存在且唯一等价于对于任意初值 x_0, 存在唯一向量 $z \in R^{nL}$ 满足:

$$M(T)z = x_0 \otimes \mathbf{1}. \qquad \text{... (6.22)}$$

如果 $M(T)$ 满秩, 则显然上述条件成立. 反之令 $x_0 = 0$, 则要求 $M(T)z = 0$ 存在唯一解, 所以有矩阵 $M(T)$ 满秩, 因此得证.

在条件 1 成立下, 不完全信息 GBCS 能控性等价于没有下层决策个体参与的线性系统的能控性, 而定理中的条件 1 是它的充要条件. □

上述研究只是在这个方向的一个简单探索, 还需要进一步深入研究. 我们现在对上述不确定性 GBCS 做一个简单的分析和设想但不进一步深入讨论. 如果我们将宏观调控者的输入策略看成是政策、规范、命令或其他在博弈开始之前就会公布的信息, 则宏观策略看成是共同知识是自然的, 这也是完全信息 GBCS 的基本假定. 但有的时候宏观决策者的输入并不是提前公布的而是采用“见机行事”的方式给出, 这时我们可以将宏观策略看成是反馈控制, 因为我们假设了下层决策个体是完全理性的, 因此根据理性预期理论, 我们可以合理的假设下层决策个体都可以正确预期到宏观策略的反馈形式, 此时宏观策略也变成了共同知识, 因此也可以将这种情况看成是完全信息的 GBCS. 但是现实中确实存在宏观策略未知的情形, 上述我们的处理方式是不考虑理性个体的理性预期, 假设它们无法获得任何有关宏观策略的信息, 此时理性个体采用保

守谨慎的行动, 也即鲁棒最优化. 当然实际情况, 理性个体会有自己的预期, 这也是理性个体与被动响应个体很大的区别所在, 所以更加现实的做法是将理性个体的预测、预期或信念作为系统运行规律的一部分考虑进来. 所有理性个体会对未知信息进行理性的预测, 并基于这个预测来最优化自己的行为, 这正是自适应控制所采用的方法. 但在理性个体参与的情况下, 我们需要考虑什么样的预测规则或方法是理性的从而不会出现“系统性谬误”, 这应该是区别与自适应控制最重要的方面. 纳什均衡可以看成是理性预期的自我实现, 也即参与者都会预期到其他个体会采用均衡处的策略从而使得所有参与者都采用纳什均衡策略. 因此, 研究理性个体如何进行更加实际的理性预期是处理不完全信息 GBCS 的重要研究内容, 其研究的重要性不言而喻但任重而道远.

一种可能的处理不完全信息的思路思路为: 假设市场上存在各种关于未知信息进行预测的咨询公司, 理性个体可以出价向这些不同公司购买预测信息, 信息的价格会随公司之前预测的准确性变动. 此时理性个体的行为完全变成了一个完全信息的优化问题. 文献 [94, 95] 使用的自适应博弈的方法可以看是成当前市场上只有一个相应的咨询公司而且价格便宜, 因此所有参与者都使用同样的估计方法同时也不考虑估计的代价. 这种思路下甚至可以研究“创新”对系统的影响.

6.4　本章小结

在不完全信息 GBCS 模型中, 我们初步研究了不完全信息下如果对这类系统的控制, 然而这只是研究的开始. 在控制论中有非常多得方法处理信息未知或不完全, 比如自适应控制、系统或参数估计、极值搜索等; 在博弈论中也有许多处理不完全信息的方法, 比如贝叶斯纳什均衡、博弈中的学习理论、代理或合同理论等. 如何将这些重要的方法与思想运用到不完全信息 GBCS 的控制中不管是在理论方面还是在应用上都将是非常有意义的.

第 7 章　本文总结与展望

7.1　工作总结

在经典的控制理论框架下, 被控对象没有自己的目标函数, 然而在许多实际的控制系统中确并非如此. 比如社会系统、经济系统和许多的”智能”系统. 虽然博弈论可以对这类系统进行有效地建模与分析, 但经典的博弈论主要研究均衡相关问题, 而很少考虑博弈系统的调控问题, 然而对有理性个体参与的系统进行调控随处可见. 如果不对这些调控问题进行科学地研究, 则经常会出现“拍脑袋办事”, 而这往往达不到调控目的甚至事与愿违. 这种“上有政策, 下有对策”的现象普遍存在于各种层级决策系统中. 正是基于这样的背景, 本文提出了基于博弈的控制系统 (GBCS) 并深入研究了能控性问题. 主要结果总结如下:

(1) 提出了基于博弈的控制系统 (Game-Based Control Systems, GBCSs) 基本框架. GBCS 将可以刻画具有理想个体参与的博弈模型融入到控制系统中, 将控制理论和博弈理论融合在一起, 从而可以用于对更加广泛的系统的调控. 为了刻画宏观调控者对系统宏观状态调控能力的大小, 我们在 GBCS 引入了纳什均衡能控性的概念, 它是进一步研究系统其它控制性质的基础.

(2) 确定性微分博弈已经被大量应用到实际问题的建模与分析中, 研究对这类系统的控制激发我们引入用常微分方程描述的确定性 GBCS. 针对这类系统, 我们建立了相应的数学模型以及能控性的数学定义. 然后给出了一般非线性 GBCS 能控性的刻画, 将 GBCS 能控性问题转化为对应正倒向微分方程的部分能控性问题. 对一般线性时变 GBCS , 我们通过研究相应线性时变正倒向微分方程部分能控性问题, 给出了 GBCS 能控的充分必要代数秩判定条件. 最后我们给出了线性定常 GBCS 能控性更加简洁的矩阵秩判定.

(3) 由于复杂系统经常会受到内外等随机因素的影响, 因此我们进一步研究了用随机微分方程描述的 GBCS 及其能控性问题. 同确定性 GBCS 一样, 我们建立了随机 GBCS 的数学模型以及随机版本的能控性定义. 然后给出了一般非线性随机 GBCS 能控性的刻画, 将 GBCS 能控性问题转化为对应正倒向随

机微分方程 (FBSDE) 能控性问题. 最后后对一般线性时变 GBCS, 我们给出了系统能控的充分必要代数秩判定条件. 针对线性定常随机 GBCS, 我们也给出了能控性的更加简洁的矩阵秩判定.

(4) 不完全信息指某些信息未知或信息不对称. 前面确定性与随机 GBCS 都做了信息完全的假设, 然而许多实际系统中信息是不完全的, 因此我们引入不完全信息 GBCS. 作为对这个方向的初步探索, 我们考虑了一类特殊的不完全信息: 宏观策略未知的不完全信息 GBCS. 针对线性二次微分博弈, 我们使用鲁棒纳什均衡来刻画下层决策个体间博弈的均衡结果并研究了这类不完全信息 GBCS 的能控性问题.

7.2 工作展望

由于本文是研究 GBCS 的开始, 所以在这个框架下会有很多有意思的问题需要研究, 我们也将在这些方面开展进一步进行的研究, 这些包括但不限于以下几个方面:

(1) 考察无穷时间 GBCS 模型或重复博弈模型, 这可以为不完全信息 GBCS 模型的研究提供进一步的基础.

(2) 对于多重纳什均衡调控的研究, 也即研究宏观调控者如何通过外部干预使系统从一个纳什均衡转移到一个更加合理的纳什均衡. 这对于研究如何才能更好的协调和合作有重要意义, 因为这是社会或其他复杂系统面临的两个基本问题[9].

(3) 在不完全信息 GBCS 模型中, 我们初步研究了不完全信息下如果对这类系统的控制, 然而这只是研究的开始. 在控制论中有非常多得方法处理信息未知或不完全, 比如自适应控制、系统或参数估计、极值搜索等; 在博弈论中也有许多处理不完全信息的方法, 比如贝叶斯纳什均衡、博弈中的学习理论、代理或合同理论等. 如何将这些重要的方法与思想运用到不完全信息 GBCS 的控制中不管是在理论方面还是在应用上都将是非常有意义的.

(4) 研究复杂网络上博弈系统的调控. 前面考虑的系统可以看成是在完全连接图上博弈的系统, 但现实中决策个体之间是有一定的结构的, 这个结构可以用复杂网络的理论来刻画, 而复杂网络上的优化、控制等理论已经取得了长足进展, 因此如何将这些理论运用到 GBCS 模型中将会非常有意义.

(5) 如果参与博弈的个体只有有限理性, 如何对这类系统进行调控?

参考文献

[1] 郭雷. 系统学是什么[J]. 系统科学与数学, 2016, 36(3): 291–301.

[2] Lucas R E. Methods and problems in business cycle theory[J]. Journal of Money Credit & Banking, 1980, 12(4): 696–715.

[3] Hansen L P, Sargent T J. 理性预期计量经济学[M]. 北京: 中国人民大学出版社, 2016.

[4] Steinberg R, Zangwill W I. The prevalence of Braess' paradox[J]. Transportation Science, 1983, 17(3): 301–318.

[5] Levin Y, J Mcgill M N. Dynamic pricing in the presence of strategic consumers and oligopolistic competition[J]. Management Science, 2009, 55(1): 32–46.

[6] 郭雷. 关于控制理论发展的某些思考[J]. 系统科学与数学, 2011, 31(9): 1014–1018.

[7] Von Neumann J, Morgenstern O. Theory of games and economic behavior[M]. USA: Princeton University Press, 1955.

[8] Kreps D. Game theory and economic modeling[M]. UK: Oxford University Press, 1990.

[9] 张维迎. 博弈与社会[M]. 北京: 北京大学出版社, 2015.

[10] 张维迎. 经济学原理[M]. 西安: 西北大学出版社, 2015.

[11] Zhu M, Martinez S. Distributed coverage games for energy-aware mobile sensor networks[J]. Siam Journal on Control and Optimization, 2013, 51(51): 1–27.

[12] Marden J R, Shamma J S. Game theory and distributed control[J]. Handbook of Game Theory with Economic Application, 2015, 4: 861–899.

[13] 梅生伟, 郭文涛, 王莹莹, 等. 一类电力系统鲁棒优化问题的博弈模型及应用实例[J]. 中国电机工程学报, 2013, 33(19): 5009–5017.

[14] 卢强, 陈来军, 梅生伟. 博弈论在电力系统中典型应用及若干展望[J]. 中国电机工程学报, 2014, 34(29): 47–56.

[15] Anderson D R, Sweeney D J, Williams T A. 数据、模型与决策：管理科学篇 (第 12 版)[M]. 北京: 机械工业出版社, 2010.

[16] 尚玉昌. 行为生态学[M]. 北京: 北京大学出版社, 1998.

[17] Palm G. Evolutionary stable strategies and game dynamics for N-Person games[J]. Journal of Mathematical Biology, 1984, 19(3): 646–650.

[18] Nowak M A, Sasaki A, Taylor C, et al. Emergence of cooperation and evolutionary stability in finite populations[J]. Nature, 2004, 428(6983): 436–464.

[19] Li Y, Mu Y F, Yuan S, et al. The game theoretical approach for multi-phase complex systems in chemical engineering[J]. J Syst Sci Complex, 2017, 30: 4–19.

[20] Roughgarden T, Tardos E, Vazirani V V. Algorithmic game theory[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.

[21] Goodfellow I J, Abadie J P, Mirza M, et al. Generative adversarial networks[J]. Eprint arXiv:1406.2661, 2014.

[22] Smith J M. Evolution and the theory of games[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1982.

[23] Isaacs R. Differential games: a mathematical theory with applications to warfare and pursuit, control and optimization[M]. New York: New York, Wiley, 1965.

[24] La Q D, Chew Y H, Soong B H. Potential game theory[M]. New York: Springer International Publishing, 2016.

[25] Caines P E, Huang M, Malhame R P. Mean field games[J]. Handbook of Dynamic Game Theory, 2017.

[26] Fudenberg D, Levine D K. 博弈学习理论[M]. 北京: 中国人民大学出版社, 2004.

[27] Hommes C. 复杂经济系统中的行为理性与异质性预期[M]. 上海: 格致出版社, 2013.

[28] 王艳秋, 王立红, 杨汇军. 自动控制理论[M]. 北京: 清华大学出版社, 2008.

[29] 郭雷, 程代展, 冯德兴. 控制理论导论—从基本概念到研究前沿[M]. 北京: 科学出版社, 2005.

[30] Mu Y F, Guo L. A new class of control systems based on non-equilibrium games[J]. In Three Decades of Progress in Control Sciences, 2010: 313–326.

[31] Mu Y F, Guo L. Towards a new paradigm of control theory[C] // Proc. Chinese Automation Congress. HangZhou, China, 2009: 26–49.

[32] Mu Y F, Guo L. Optimization and identification in a non-equilibrium dynamic game[C]// Proc. 48th IEEE Conference on Decision and Control. HangZhou, China, 2009: 5750–5755.

[33] 严加安. 鞅与随机积分引论[M]. 上海: 上海科技出版社, 1984.

[34] Ma J, Yong J. Forward-backward stochastic differential equations and their applications[M]. New York: Springer-Verlag, 1999.

[35] Liberzon D. Calculus of variations and optima control theory: a concise introduction[M]. Princeton: Princeton University Press, 2012.

[36] 王朝珠, 秦化淑. 最优控制理论[M]. 北京: 科学出版社, 2003.

[37] Yong J, Zhou X Y. Stochastic controls: Hamiltonian systems and HJB equations[M]. New York: Springer New York, 1999.

[38] Basar T, Olsder G J. Dynamic noncooperative game theory (Second dition)[M]. Philadelphia: Society for Industrial, Applied Mathematics, 1999.

[39] Peng S G. Backward stochastic differential equation and exact controllability of stochastic control systems[J]. Progeress in Natural Science, 1994, 4(3): 274–284.

[40] 黄立宏, 郭振远, 王佳伏. 右端不连续微分方程理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2011.

[41] Yakubovich Y A, Leonov G A, Gelig A K. Stabilization of stationary sets in control systems with discontinuous nonlinearities[M]. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2004.

[42] 弗登博格, 梯若尔. 博弈论[M]. 北京: 中国人民大学出版社, 2002.

[43] Sontag E D. Mathematical control theory: deterministic finite dimensional systems (Second Edition)[M]. New York: Springer, 1998.

[44] Ho Y C, Luh P B, Muralidharan R. Information structure, stackelberg games, and incentive controllability[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1981, 26(2): 454–460.

[45] 周志华. 机器学习[M]. 北京: 清华大学出版社, 2016.

[46] Stankova K, Boudewijn A. Stackelberg and inverse Stackelberg road pricing games: state of the art and future research[J]. Game Theoretic Analysis of Congestion, Safety and Security, 2014: 191–209.

[47] Groot N B. Reverse Stackelberg games: theory and applications in traffic control[D]. Maastricht: Maastricht University, 2013.

[48] Ho Y C, Luh P B, Olsder G J. A control-theoretic view on incentives[J]. Automatica, 1982, 18(2): 167–1179.

[49] Elamvazhuthi K, Deshmukh V, Kawski M, et al. Mean-field controllability and decentralized stabilization of Markov chains[C]// 2017 IEEE 56th Annual Conference on Decision and Control (CDC). Melbourne, Australia, 2017: 3131–3137.

[50] Buratto A, Cesaretto R, Zamarchi R. HIV vs. the immune system: a differential game[J]. Mathematics, 2015, 3(4): 1139–1170.

[51] Wu J, Zhang M. A game theoretical approach to optimal control of dual drug delivery for HIV infection treatment[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics), 2010, 40(3): 694–702.

[52] Klamks J, Swierniak A. Controllability of a model of combined anticancer therapy[J]. Control and Cybernetics, 2013, 42(1): 123–138.

[53] Klamka J, Maurer H, Swierniak A. Local controllability and optimal control for a model of combined anticancer therapy with control delays[J]. Mathematical Biosciences and Engineering, 2013, 14(1): 195–216.

[54] Saad W, Zhu H, Poor H, et al. Game-theoretic methods for the smart grid: an overview of microgrid systems, demand-side management, and smart grid communications[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2012, 29(5): 86–105.

[55] Alshehri K, Liu J, Chen X D, et al. A Stackelberg game for multi-period demand response management in the smart grid[C]// 2015 IEEE 54th Annual Conference on Decision and Control. Osaka, Japan, 2015: 5889–5894.

[56] Zhu Q, Han Z, Basar T. A differential game approach to distributed demand side management in smart grid[C]// In Proc, IEEE Int. Conf. Commun. (ICCC). Ottawa, ON, Canada, 2012: 3345–3350.

[57] Arai R, Yamamoto K, Morikura M. Impact of communication availability in a demand-side energy management system: differential game-theoretic approach[C]// Proc. IEEE Globecom 2013. Atlanta, GA, USA, 2013: 906–911.

[58] Arai R, Yamamoto K, Nishio T, et al. Differential game-theoretic analysis on information availability in decentralized demand-side energy management systems[J]. IEICE Transactions on Communications E97, 2014, B(9): 1817–1825.

[59] 刘壮志, 徐柏婷, 牛东晓. 智能电网需求响应与均衡分析发展趋势[J]. 电网技术, 2013, 37(6): 1555–1561.

[60] Bressan A. Noncooperative differential games: a tutorial[J]. Milan Journal of Mathematics, 2011, 79(2): 357–427.

[61] Scalzo R C, Williams S A. On the existence of a Nash equilibrium point for N-person differential games[J]. Applied Mathematics and Optimization, 1975, 2(3): 271–278.

[62] Seierstad A. Existence of open loop Nash equilibria in certain types of nonlinear differential games[J]. Optimization Letters, 2014, 8(1): 247–258.

[63] Evans L, Souganidis P. Differential games and representation formulas for solutions of Hamilton-Jacobi-Isaacs equations[J]. Indiana University Mathematics Journal, 1983, 33(5): 50.

[64] Vamvoudakis K G, Lewis F L. Multi-player non-zero-sum games: online adaptive learning solution of coupled Hamilton-Jacobi Equations[J]. Automatica, 2011, 47(8): 1556–1569.

[65] Mylvaganam T, Sassano M, Astolfi A. A Differential game approach to multi-agent collision avoidance[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62(8): 4229–4235.

[66] Engwerda J. LQ dynamic optimization and differential games[M]. USA: John Wiley & Sons, Ltd, 2005.

[67] Renren Z, Lei G. Controllability of non-cooperative dynamic games[C] / / Proceedings of the 34th Chinese Control Conference. Hangzhou, China, 2015: 353–358.

[68] Pindyck R S. Optimal economic stabilization policies under decentralized control and conflicting objectives[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1977, 22(4): 517–530.

[69] Park J G, Lee K Y. An inverse optimal control problem and its application to the choice of performance index for economic stabilization policy[J]. IEEE Transactions on Systems, 1975, 5(1): 64–76.

[70] Park J G, Lee K Y. An application of decentralized control theory to an economic policy model[J]. Wseas Transactions on Business AND Economics, 2013, 10(3): 201–20.

[71] Trentelman H L, Stoorvogel A A, Hautus M. Control theory for linear systems[M]. New York: Springer-Verlag, 2012.

[72] Mu Y. Stackelberg public goods game with multiple hierarchies under global and local information structures[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2014, 163: 332–350.

[73] Mu Y. Stackelberg-Nash equilibrium, social welfare and optimal structure in hierarchical continuous public goods game[J]. Systems & Control Letters, 2018, 112(2): 1–8.

[74] Sun J, Li X, Yong J M. Open-loop and closed-loop solvabilities for stochastic linear quadratic optimal control problems[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2016, 54(4): 2274–2308.

[75] Renren Z, Lei G. Controllability of Nash equilibrium[C]// Proceedings of the 35th Chinese Control Conference. Chengdu, China, 2016: 323–328.

[76] Pardoux E, Peng S. Adapted solution of a backward stochastic differential equations[J]. Systems Control Lett, 1990, 14(1): 55–61.

[77] Yu Z. An optimal feedback control-strategy pair for zero-sum linear-quadratic stochastic differential game: the Riccati equation approach[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2015, 53(4): 2141–2167.

[78] Sun J, Yong J M. Linear quadratic stochastic differential games: open-loop and closed-loop saddle points[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2014, 52(6): 4082–412.

[79] Peng S. Backward stochastic differential equation and exact controllability of stochastic control systems[J]. Progress in Natural Science, 1994, 4(3): 274–284.

[80] Nash J F, Shapley L S, Harsanyi J C, et al. 博弈论经典[M]. 北京: 中国人民大学出版社, 2013.

[81] 张维迎. 博弈论与信息经济学[M]. 上海: 上海人民出版社, 2004.

[82] Bolton P, Dewatripont M. 合同理论[M]. 上海: 格致出版社, 2015.

[83] 郭雷. 时变随机系统[M]. 吉林: 吉林科学技术出版社, 1993.

[84] Soderstrom T, Stoica P. 系统辨识[M]. 吉林: 吉林科学技术出版社, 2017.

[85] Dullerud G E. A course in robust control theory: a convex approach[M]. 北京: 世界图书出版社, 2014.

[86] 韩京清. 自抗扰控制技术: 估计补偿不确定因素的控制技术[M]. 北京: 国防工业出版社, 2013.

[87] Brafman R I, Tennenholtz M. Efficient learning equilibrium[J]. Artificial Intelligence, 2004, 159(1): 27–47.

[88] Shoham Y, Powers R, Grenager T. If multi-agent learning is the answer, what is the question?[J]. Artificial Intelligence, 2007, 171(7): 365–377.

[89] Stone P. Multiagent learning is not the answer. It is the question[J]. Artificial Intelligence, 2015, 171(7): 402–405.

[90] Foster D P, Young H P. On the impossibility of predicting the behavior of rational agents[J]. Proceedings of the National Academy of Science of the United States of America, 2001, 98(22): 12848–12853.

[91] Dayan P, Niv Y. Reinforcement learning: the good, the bad and the ugly[J]. Current Opinion in Neurobiology, 2008, 18(2): 185–196.

[92] Vrabie D, Lewis F L. Adaptive dynamic programming for online solution of a zero-sum differential game[J]. Journal on Control Theory, 2011, 9(3): 353–360.

[93] Foster D P, Young H P. Regret testing: learning to play Nash equilibrium without knowing you have an opponent[J]. Theoretical Economics, 2006, 1(3): 341–367.

[94] Li Y, Guo L. Towards a theory of stochastic adaptive differential games[C]// Proc. 50th IEEE Chinese Conference On Decision and Control and European Control Conference. Vol. 413. 1. Orlando, FL, USA, 2011: 5041–5046.

[95] Li Y, Guo L. Convergence of adaptive linear stochastic differential games: nonzero-sum case[C] / / Proc. 10th World Congress on Intelligent Control and Antomation. Beijing, China, 2012: 3543–3548.

[96] Perdicoulis T, Jank G. Existence and uniqueness of disturbed open-loop Nash equilibria for affine-quadratic differential games[J]. Advances in Dynamic Game, 2011, 11: 25–39.

[97] Jank G, Kun G. Optimal control of disturbed linear-quadratic differential games[J]. European Journal of Control, 2002, 8(2): 152–162.

致 谢

蓦然回首, 一如白驹过隙, 五年的时光也转瞬即逝, 博士生涯即将画上句号. 一路征程, 背负多人期望, 在博士毕业论文完成之际, 谨在此向多年来在学习生活中关心和帮助我的老师、同学、朋友、家人表示衷心的感谢!

特别感谢我的导师郭雷院士, 是他指引我的学术研究并引领我走上学术道路, 博士期间给我提供了许多学术交流的机会, 也提供了参与科研项目的机会, 将所学运用于实践中并从实践中寻找新的问题. 在讨论班或学术报告上, 郭老师深刻的洞察力让我们对问题的本质有非常清晰的认识, 从而可以进行更加深入的研究, 做真正科学的、有意义的前沿问题. 五年时间, 郭老师以非常严谨的学术态度和精益求精的工作作风指导着我们, 对我们的每一篇文章、每一个研究问题、甚至每一次报告, 无论是观点、方法, 还是逻辑、语法、标点、错字, 他都一丝不苟的指点修改, 这使得我们的论文写作能力、观点表达能力以及学术交流能力都得到了非常重要的锻炼, 同时也慢慢的将这种态度和作风融入到我们自己的学术研究中. 郭老师经常抽出大块的时间帮我们修改文章, 曾经从早上一直修改到晚上 11 点多, 在参加会议时只要有时间就会亲自到会场来听我们的报告并给出改进建议, 每念及此, 颇多感触. 对于有志于科研的我, 能得到郭老师的指导培养真的是非常的幸运, 他也是我追求和学习的标杆.

特别感谢穆义芬师姐, 她带领我参加了不少学术相关的项目与活动, 将所学付诸实践. 感谢刘志新老师在项目中与我的讨论以及对我的指导. 感谢薛文超师兄在项目中的讨论. 感谢隆云滔师姐对我生活和学习上的关心和帮助.

特别感谢控制室的陈翰馥院士、程代展研究员、张纪峰研究员、方海涛研究员、郭宝珠研究员、姚鹏飞研究员、席在荣研究员、黄一研究员、孙振东研究员, 感谢赵延龙、赵文虓、万林、薛文超等老师, 感谢沈源、孟安琪两位老师, 感谢实验室所有老师, 他们严肃的科学态度、严谨的治学精神为控制室营造了良好的学术环境, 并为我们树立了学术榜样, 指引我将来的学术生涯. 他们交给我的不仅是学术知识、研究方法, 还有为学、为人之道.

感谢研究生处的各位老师, 特别感谢图书馆的各位老师, 他们为我们能安心学习提供了保障, 为我们的学习与生活提供了许多便利.

感谢讨论班上的师兄弟姐妹们, 他们是陈鸽、苏伟、隆云滔、从薪蓉、骆曼、胡浩洋、谢思宇、王新强、赵成、袁硕、李丹、邓娟、王彩云, 感谢他们在讨论班上的报告和讨论, 使得讨论班的气氛活跃、内容丰富, 让我学到了许多除了我自己研究领域外的其他知识, 对于丰富和完善我的知识体系起到了重要作用.

感谢这期间一起学习和生活的小伙伴们, 他们陪伴着我丰富而又单调、复杂而又简单、热闹而又孤独的博士生涯, 他们是我生活的一部分. 想起那天夕阳下的奔跑, 那是我们逝去的青春. 为了不至于忘了他们的名字, 我将他们记在这将会跟伴随我终生的博士论文中, 这些心机 boys 和 girls 是窦晓杰、魏昌坤、周宏兵、周义满、李卫觐、胡浩洋、蒋衍光、何雁羽、余卫永、葛晓贞、王西梅、王颖惠、邹委员、邓郑华、王晋娟、王彩云、王婷、刘倩、岳美玲. 感谢我前室友周亮和现室友周义满以及雁西湖室友王雄、李伟、方少锋、孙志禹等, 曾经的欢乐有你们陪伴. 浮云一别后, 流水十年间.

最后特别感谢我的父母以及其他亲人, 能走到这里离不开他们的支持和包容. 我早已习惯这种关爱, 并习以为常, 渐渐忘记了感动, 忘记了说声谢谢.

书不成字, 纸短情长.

作者简历及攻读学位期间发表的学术论文与研究成果

作者简历：

2008 年 09 月——2012 年 07 月, 在南京航空航天大学计算机科学与技术院（系）获得学士学位. 专业: 计算机科学与技术.

2013 年 09 月——2018 年 07 月, 在中国科学院数学与系统科学研究院（中国科学院大学数学与系统科学院）硕博连读. 专业: 系统理论

发表学术论文目录：

[1] Zhang Renren，Guo Lei，Controllability of non-cooperative dynamic games，Proceedings of the 34th Chinese Control Conference. Hangzhou, China, 2015: 353-358.

[2] Zhang Renren，Guo Lei，Controllability of Nash equilibrium，Proceedings of the 35th Chinese Control Conference. Chengdu, China, 2016: 323-328.

[3] Zhang Renren，Guo Lei，Controllability of Nash equilibrium in game-based control systems，Under revision at IEEE Transaction on Automatic Control

[4] Zhang Renren，Guo Lei，Controllability of Nash equilibrium in stochastic game-based control systems，to be submitted

参加的研究项目：

[1] 参与与航天院合作的关于博弈的项目

[2] 参与中国科学院过程工程研究所项目: 用博弈的方法研究多相复杂流体系统