

分类号 O426.9

UDC 534

密级 _____

编号 _____

中国科学院研究生院 博士学位论文

声表面波在周期栅阵中传播特性的变分原理研究

徐方迁

指导老师 何世堂 _____

中国科学 _____

申请学位级别 博士 论文名称 超声电子学

论文提交日期 2004.5 论文答辩日期 _____

培养单位 中国科学院声学研究所

学位授予单位 中国科学院研究生院

答辩委员会主席 _____

**A Study Based upon Variational Principle of the Properties of
Surface Acoustic Waves Propagating under Periodic Metal Grating**

Written by Fangqian Xu

Directed by Professor Shitang He

Institute of Acoustics
Chinese Academy of Sciences

May, 2004

摘 要*

本文从波动方程和边界条件出发,根据陈东培和 H. A. Haus 理论、采用变分原理分析了声表面波在压电晶体表面短路金属栅中的传播特性。在分析力学负载对反射栅的反射系数贡献时,我们发现不同材料栅条其晶体对称性是不一样的,反射系数的理论计算公式也随之改变。我们详细推导了不同晶体对称性栅条反射系数的理论计算公式,首次给出四方 $4/\text{mmm}$, 六角 $6/\text{mmm}$ 金属栅条和三角 3m 沟槽等反射系数计算公式。

论文将陈东培和 H. A. Haus 理论从一般的 Rayleigh 波推广到 SH 型表面波,并根据 Abbott's COM 方程及 Plessky's COM 方程分析了 SH 型表面波在栅阵中的色散特性。给出了 SH 型表面波在栅阵中色散关系的具体求解方法。为 SH 型表面波器件的理论分析和设计开辟了一个新的途径。

根据 COM 理论,解释了由陈东培和 H. A. Haus 理论得到的色散关系表达式物理意义,即该表达式表示的是色散曲线禁带上边缘和禁带下边缘频率与 Bragg 中心频率之差。

通过 Poynting 定理将陈东培和 H. A. Haus 理论公式中的二维积分转为平面有限元问题,从而在陈东培和 H. A. Haus 理论中成功地使用有限元方法分析厚电极栅阵的反射特性。

为了将陈东培和 H. A. Haus 理论用于二指栅阵中声表面波传播特性的分析,我们对这种栅阵的静电场问题作了理论研究。给出了关于二指栅阵 Floquet 散射分量的具体理论计算公式,也就是将 Datta 等人关于单指栅阵静电场理论推广到二指栅阵。

根据上面的理论研究结果,本文编制了相应的数值计算程序,提取了有关特征参数。

本文的理论研究工作丰富和发展了陈东培和 H. A. Haus 理论,使压电晶体中关于声表面波的变分方法不再局限于一般的 Rayleigh 波,而能用于 SH 型表面波,能够分析厚电极栅条和二指栅阵。作者希望前人以及本文的工作使压电晶体中的变分方法引起人们广泛关注,并在未来的声表面波理论研究中发挥更大的作用。

关键词: 声表面波, 变分原理, 色散关系, 禁带, 有限元。

*国家自然科学基金资助项目, 批准号 10374100

ABSTRACT*

Fangqian Xu (Acoustics)

Directed by Professor Shitang He

Originated from the equation of fluctuation and the boundary conditions and based on D.P.Chen and Haus theory, a variational principle was used to investigate surface acoustic waves passing through piezoelectric crystal with short-circuited gratings. Analyzing strip reflection coefficient produced by mechanic loading, we discovered Closed-form expressions of it for different crystal symmetry class are not uniform. With detailed deduction of closed-form expressions of the different crystal symmetry classes, we put forward, for the first time, the closed-form expressions of strip reflection coefficients of tetragonal 4/mmm, hexagonal 6/mmm and trigonal 3m crystal etc.

We extended D.P.Chen and Haus theory for general Rayleigh-type SAWs to SH-type SAWs and hence discussed the dispersion characteristics of SH-type SAWs propagating on periodic metallic grating structures by means of Abbott's COM equation and Plessky's COM equation. Solution to dispersion relation of SH-type SAWs is obtained and a new approach for the theoretical analysis and design of SH-type SAWs devices has been developed.

Using COM theory, the physical meaning of the dispersion relation derived from D.P.Chen and Haus theory was explained, i.e. this relation stands for the upper edge or the lower edge of the stopband,

The problem of a double integral in D.P.Chen and Haus theory is transformed into that of two-dimensional finite element by virtue of Poynting theorem. Consequently, finite element method is successfully applied to analysis on reflection characteristics of metallic gratings with finite thickness in D.P.Chen and Haus theory.

To apply D.P.Chen and Haus theory to the discussion of SAW propagation in periodic metallic grating structures with two fingers per period, we have studied the electrostatic problem of this gratings. Closed-form expressions for the scattered Floquet components perturbed by double-electrode gratings are given. Namely, Datta's theory for the electrostatic field of single-electrode gratings is extended to that of double-electrode gratings.

Effectiveness of the above theoretical analysis is demonstrated with results of the numerical analysis for the Rayleigh SAW modes and SH-type SAW modes.

This paper extends and develops D.P.Chen and Haus theory. The variational method for SAW propagation in piezoelectric crystal now can be applied to not only Rayleigh SAW modes but also SH-type SAW modes. In addition, it can be used to analyze the effects of grating with finite electrode thickness and the properties of double-electrode gratings. The authors hope that this variational method will arouse peoples's attentions because of previous study and our works and play more important role in the SAW research in future.

Key words: Surface Acoustic Wave(SAW), Variational Principle, Dispersion Relation, Stopband, Finite Element Method.

* This work is supported by National Natural Science Foundation of China, NSFC, 10374100.

目 录

第一章 绪论	(1)
§ 1.1 本文研究的意义	(1)
§ 1.2 国内外研究现状及分析方法	(1)
§ 1.2.1 声表面波器件的近似唯象模型分析	(2)
§ 1.2.2 声表面波器件的精确理论分析	(3)
§ 1.3 本文主要工作	(4)
第二章 压电晶体半无限空间声表面波的性质	(6)
§ 2.1 耦合波动方程	(7)
§ 2.1.1 Euler 角与 Bond 变换	(8)
§ 2.1.2 压电效应与耦合波动方程	(10)
§ 2.1.3 边界条件和耦合波动方程的解	(11)
§ 2.1.4 漏波的选根原则	(15)
§ 2.1.5 格林函数	(18)
§ 2.1.6 晶体对称	(20)
§ 2.2 表面有效介电常数	(22)
§ 2.2.1 表面有效介电常数的定义	(22)
§ 2.2.2 表面有效介电常数的数值计算	(23)
§ 2.2.3 表面有效介电常数曲线的特性	(25)
§ 2.3 SAW 器件常用晶体声表面波模式的特征参数	(28)
§ 2.3.1 铌酸锂	(29)
§ 2.3.2 钽酸锂	(32)
§ 2.3.3 石英	(35)
§ 2.3.4 四硼酸锂 ($\text{Li}_2\text{B}_4\text{O}_7$) ($0^\circ, 47.3^\circ, 90^\circ$)	(38)
§ 2.3.5 小结	(39)
第三章 压电晶体基片短路栅反射系数的变分原理研究	(42)
§ 3.1 压电晶体的变分原理	(42)
§ 3.1.1 变分原理的定义	(43)
§ 3.1.2 压电晶体的变分表达式	(43)
§ 3.1.3 变分表达式的变分特性	(44)
§ 3.1.4 变分表达式的求解	(46)
§ 3.1.5 用变分原理确定金属短路栅的色散关系	(48)
§ 3.2 压电晶体基片和金属栅条的材料特性	(50)
§ 3.3 短路栅反射系数的变分原理求解	(51)
第四章 压电晶体基片短路栅 SH 型声表面波的变分原理研究	(56)

§ 4.1 Plessky 的 COM 理论.....	(57)
§ 4.2 Abbott 的 COM 理论.....	(59)
§ 4.2.1 Abbott 的 COM 方程.....	(60)
§ 4.2.2 Abbott 的 COM 参数和 Plessky 的 COM 参数之间的关系.....	(62)
§ 4.3 SH 型表面波变分原理的研究.....	(64)
§ 4.3.1 传统 Rayleigh 波的 COM 理论.....	(64)
§ 4.3.2 变分原理和色散关系.....	(66)
§ 4.3.3 理论计算与结果.....	(69)
第五章 厚金属栅的有限元方法与双电极栅阵静电场的理论分析.....	(79)
§ 5.1 有限元方法在陈东培和 H. A. Haus 理论中的实现.....	(79)
§ 5.1.1 声场的 Poynting 定理.....	(80)
§ 5.1.2 有限元方法.....	(81)
§ 5.2 双电极栅阵静电场的理论分析.....	(86)
§ 5.2.1 栅阵静电场的主要基础理论.....	(87)
§ 5.2.2 Datta 理论在双电极栅阵的推广.....	(91)
第六章 短路金属栅条反射系数的实验研究.....	(96)
§ 6.1 反射系数的测量方法.....	(96)
§ 6.2 反射系数的实验研究.....	(97)
§ 6.2.1 128° YX-LiNbO ₃ 上的短路铝反射栅.....	(97)
§ 6.2.2 X 切 112° Y 传 LiTaO ₃ 基片上的短路铝反射栅和沟槽反射栅.....	(98)
§ 6.3 单指无内反射滤波器.....	(99)
§ 6.3.1 在 128° YX-LiNbO ₃ 基片上.....	(100)
§ 6.3.2 在 X- 112° Y LiTaO ₃ 基片上.....	(102)
第七章 结论和展望.....	(104)
结论.....	(104)
尚待解决的问题与后续工作.....	(105)
参考文献.....	(107)
发表论文	
致谢	

第一章 绪论

§ 1.1 本文研究的意义

声表面波 (SAW) 器件是六十年代末期发展起来的一种固态电子学器件, 其基本结构是压电晶片和在其表面制作的两个叉指换能器。基本工作原理是输入换能器利用晶体的逆压电效应将电信号变换成声表面波 (Surface Acoustic Waves SAW), 沿晶体表面传播, 第二个换能器利用压电效应将声信号变换成电信号。它的功能是用 SAW 对电信号进行处理, 包括滤波、延时、脉冲压缩、相关、卷积等功能。由于它采用半导体平面工艺制造, 适合于大批量生产, 从诞生以来获得飞速发展, 被广泛应用于雷达、航空航天、广播电视、通信等领域。

二十世纪九十年代以来, 由于移动通信的飞速发展, SAW 又掀起一个新的研究高潮。研究热点是高频、低插损 SAW 滤波器。SAW 滤波器体积小、重量轻, 是陶瓷片质滤波器的 $1/40$ 和 $1/30$, 适应了移动通信微型化的发展方向, 是移动通信三大关键器件之一。

信息产业是中国跨世纪发展的主导产业和国民经济新的增长点。移动通信作为信息产业重要的一部分, 是今日世界不可或缺的基础设施。由于移动通信的巨大需求, SAW 器件的应用领域将由电视机占主体 (58%) 转为移动通信占主体 (约 70%)。信息产业部已把声表面波滤波器作为“十五”规划重点发展的新型元器件之一。

移动通信用声表面波滤波器要求低插入损耗, 而低插入损耗主要利用栅阵的反射特性来实现。因此, 对 SAW 滤波器栅阵反射特性进行研究, 可以优化声表面波器件的设计参数, 更好地满足移动通信的要求, 促进移动通信的发展。

§ 1.2 国内外研究现状及分析方法

1885 年, 瑞利 (Lord Rayleigh)^[1] 在半无限大各向同性固体中发现声表面波的存在, 但是很长一段时间内它并没有引起人们的兴趣。1965 年, White 和 Voltmer^[2] 利用沉积在石英晶体上的叉指换能器 (Interdigital Transducer, IDT) 可以有效地激励和检测声表面波, 由于可以用制造半导体器件的光刻技术大批量生产质量很好的叉指换能器, 这大大激发出人们的研究热情。后来欧洲和美国都投入了大量人力、物力、财力研究开发军用和通信用 SAW 器件, 比如雷达中的延迟线和脉冲压缩滤波器, 时钟发生器中的高稳谐振器等。

在 70 年代中期, 从电视中频^[3] 开始, 开发并生产了大量的各种滤波器和谐振器。但是, 随着以微型计算机为代表的数字技术的建立和飞速发展, SAW 器件在军事上的重要性逐年下降, 大部分国家研究机构和大学的研究人员, 在下降或削减了他们的科研经费后, 离开了这个领域。

在 20 世纪 80 年代后期, 移动通信市场的飞速发展改变了 SAW 的研究状况, 许多新人加入到幸存的研究机构和公司中, 激烈的竞争又开始了。这次发展克服了 SAW 器件原先的不足, 比如插入损耗大、功率承受能力低等。现在, SAW 器件已广泛用于移动通信用声表面波滤波器。同时它也能用于无绳电话的天线双工器, 这两种器件的各项指标要求都十分严格。

人们过去认为, SAW 器件实际应用频率范围限制在 1GHz 左右。然而, 随着

LSI 生产引入的微制造技术的快速发展和制造工艺的改进, 批量生产的 SAW 器件其频率已经能达到 2.5GHz 左右^[4]。

期望 SAW 器件的技术规格比一般迅速发展的数字通信技术规格还要严格, 这并不是不合理的。

对声表面波在周期栅格阵中的传播特性, 几十年来人们采用各种方法进行了研究。归纳起来, 对表面声波在周期栅格阵中传播特性的研究基本上可以分成两类: 一类方法则是从其他领域借用类似模型与概念进行近似, 由此得到简单近似的结果, 非常实用; 另一类是遵循基本波动方程满足特定边界条件来求解系统的确切解。由于表面声波比体波复杂得多, 这样得到的解也是很复杂的。

§ 1.2.1 声表面波器件的近似唯象模型分析

不同时期, 不同的实际需求导致了不同表面声波器件理论模型。这些应运而生的叉指换能器简化近似模型有 δ 函数模型、脉冲响应模型、等效电路模型和耦合模式 (Coupling-of-Modes, COM) 模型。

Tancrell^[5]等人首先提出将叉指换能器中每一叉指电极边缘看成是一个独立声波源, 并且用 δ 函数来表示它, 同时还假定每一个叉指电极边缘的 δ 函数的声辐射源彼此独立互不影响; 每一个 δ 函数声波源都在垂直于叉指电极的方向发射声平面波, 这就是 δ 函数模型。

脉冲响应模型由 Hartmann 提出^[6], 我们知道一个网络的脉冲响应 $h(t)$ 是指一个单位冲击函数 $\delta(t)$ 作用下网络的输出。同样, 叉指换能器的脉冲响应也是指它的输入端加上一个单位冲击函数的信号时, 换能器产生的声信号输出。IDT 的脉冲响应的形状和它的几何结构之间有特别简单的关系, 即知道了 IDT 的脉冲响应就可以完全确定 IDT 的结构参数。

Smith 等人^[7,8]提出的等效电路模型的基本出发点是用简化场分布 (横场和纵场) 代替 SAW 器件真实的激励场分布, 然后用体波换能器来描述 SAW 器件的每一对叉指, 并且用体声波换能器 Mason 等效电路来描述 SAW 器件。

以上三种模型都是在七十年代理论上提出的, 加上各种二阶效应分析与修正以及各种器件的结构和设计方法, 形成了一个比较完整的体系, 较好地满足了当时各应用系统对器件性能的要求。

然而, 早期 SAW 器件的最大缺点是插入损耗大, 要满足移动通讯的要求, 必须降低插入损耗。为此, 出现了单相单向换能器 (Single Phase Unidirectional Transducer, SPUDT)、横向和纵向滤波器以及梯形谐振滤波器等低插损结构^[9~12]。而这些结构的实现必须利用以前被当作二阶效应而加以抑制的指间多次反射效应, 这使得脉冲响应模型和等效电路模型失效。为此提出了将指间多次反射效应考虑在内的耦合模式 (Coupling-of-Modes, COM) 模型^[13~17], 为低插损滤波器设计提供了较好的分析工具。

COM 理论最早用于微波管和光学波导分析中, 1980 年, H. A. Haus 和 P. V. Wright^[13]成功地将其移植于声表面波反射栅的分析。它用并列线性方程组来表示入射声波和栅条反射声波的耦合关系。在低插损滤波器的 COM 模型中, 关键参数是指条的反射系数^[11]。

无论是脉冲响应模型, 等效电路模型, 还是 COM 模型, 实质上都是声表面波

器件分析的近似唯象模型,模型所用的参数必须由第二类精确理论模型或实验来确定。Hartmann 等人^[18]曾用实验方法来提取 COM 参数,但这一方法周期长、成本高、正确率低,因而人们多致力于精确理论分析和数值计算来提取反射系数等 COM 参数^[19~23]。

§ 1.2.2 声表面波器件的精确理论分析

为考虑指间多次反射效应,提取 COM 模型参数,也需要详细分析声表面波模式在周期栅阵中的传播特性。从理论上讲,需要一种求解周期栅阵下各种声表面波模式传播问题的严格理论计算方法。

精确理论分析是从基本波动方程和边界条件出发求系统精确解,这是一个非常复杂的过程,几十年来有不少人一直致力于这方面的工作。1977 年, Milsom 等人^[24]从波动方程和边界条件出发导出了系统对表面一维线电荷激励的响应,即一维格林函数(Green's function),然后由卷积定理、线性叠加定理,通过数值计算求出表面电荷分布,进而由此得到换能器激发和接受的各种声波模式的全部解,并应用了表面有效介电常数(Surface Effective Permittivity)概念。Milsom 等人的这项工作在 SAW 研究发展史上是里程碑性的,为声表面波器件的研究开辟了一个新的途径。

1985 年,汪承灏和陈东培^[25,26]将 Milsom 等人的理论推广到任意表面源分布激发,引进了广义格林函数组(generalized Green's functions),普遍地给出表面广义力(generalized forces)所激发波场的一般形式,广义力包括力学部分和电学部分,该理论构成了声表面波技术的主要理论框架,被认为“分析声表面波激发和传播最严格的方法”。在这个基础上还有刘援等人^[27]的瞬态 Green 函数和黄歆等人^[28]的漏表面波的广义格林函数。

另一个决定 SAW 叉指换能器特性的基本物理量是电极上的电荷分布(Charge Distribution),这也就是所谓的 IDT 静电问题(Electrostatic Problem)^[29,30], K. Bløtekjær 等人^[31,32]应用 Floquet 定理和 Legendre 多项式,推出了电极上电荷

$q(x_1)$ 及电极间隙电场 $e(x_1)$ 的解析表达式,将周期栅阵中的入射电势(电场)和扰动电势(电场)合为一项,由一个无穷级数表示。T. Aoki 等人^[33,34]将 K. Bløtekjær 等人理论工作推广到二指栅阵。随后 S. Datta 等人^[35]将自由表面电势表示为入射电势项与用一个无穷级数表示的扰动项之和。S. V. Biryukov 等人^[29,30]在 1996 年报道了他们在 IDT 静电问题上更加深入的工作。

也是 1985 年,陈东培和 H. A. Haus^[14]从波动方程出发,导出声表面波在栅阵结构中的变分表达式,并将此变分表达式与耦合模方程结合起来,得到反射系数的表达式。包含压电短路效应与力学负载效应,其中压电短路效应与文献[35]的结果相同。然后,他们在假设晶体为各向同性的近似情况下,计算出几种常用晶体的反射系数。何世堂^[36]将此方法推广到各向异性晶体,在不考虑晶体的压电性近似情况下,得出反射系数是一个复数,说明力学负载引起的反射和压电短路引起的反射相位并不是正好相同或相反,由此可以解释实验中观察的残余反射现象。

第二种计算反射系数的方法是 Ken-ya. Hashimoto 等在 Bløtekjær 等人^[31,32]

基础上提出了栅格有效介电常数 (Effective Permittivity for grating) 和离散 Green 函数 (Discrete Green function) 概念^[37,38], 并结合有限元 (FEM) 方法得到了金属栅条的反射系数。由此编写了一套完整的 Fortran 程序在因特网上公布, 可以免费下载。目前, 国际上许多大的从事声表面波器件的研发公司都使用该程序设计他们的产品。但是, 该方法基于的 Bløtebjerg 理论在导出过程中引入了近似。有人^[39]认为 Ken-ya Hashimoto 方法不能作为普遍适用的精确理论方法。

第三种计算反射系数的方法是 V. P. Plesky 等人^[40]直接从 Green 函数和 Floquet 定理导出关于周期栅阵的周期 Green 函数 (Periodic Green function)。由此分析声波在栅阵中传播特性。P. Ventura 等改进了周期 Green 函数的算法, 采用截断解析处理方式使周期 Green 函数的计算简化为半数值半显式解形式, 计算工作量大为降低。Y. W. Zhang 等^[41]在 1993 年提出了周期栅格阵的谐波导纳 (Harmonic admittance) 概念, 并利用谐波导纳分析栅格阵中各种表面声波模式的传播特性, 提取 COM 参数。林基明^[39]根据上述理论编写了一套程序计算周期栅阵的反射系数。但是他没有考虑力学负载效应。

§ 1.3 本文主要工作

本文根据陈东培和 H. A. Haus 的变分原理来研究栅阵中各种声表面波模式的传播特性, 从上面的分析我们知道, 无论是陈东培、H. A. Haus 还是何世堂在计算反射系数的力学负载效应时都没有考虑晶体的压电性, 并且在计算栅条内质点的振动位移时认为栅条的厚度很薄, 从而假设栅条内各质点的振动位移是均匀的, 且等于晶体表面的位移。这样结果必然是近似的。例如: 按这种方法计算, 在 ST 石英基底上金栅条的反射系数是铝栅条的 4 倍, 而文献[42]报道: 在栅条厚度很大的情况下此值是 30 倍, 两者相差甚远。目前在设计梯形滤波器时, 普遍加大栅条本身的厚度, 接近 10%。这样, 就不能再认为栅条内各质点的振动位移是均匀的, 除此之外, 他们的研究都局限于传统的 Rayleigh 波和单指栅阵, 而没有涉及伪表面波和多电极栅阵。

我们研究工作就是基于上面的考虑展开的, 具体安排如下:

第二章、从耦合波动方程出发讨论了半无限空间声表面波传播特性, 详细阐明了表面有效介电常数在半无限空间声表面波特性分析中的作用, 即表面有效介电常数包含所有可能声表面波模式的全部信息, 对常用 SAW 器件晶体材料作了具体分析, 这为我们以后各章的变分原理分析与研究奠定了基础。

第三章、陈东培和 H. A. Haus 以及何世堂的理论结果是在晶体作各向同性假设或不考虑晶体压电性假设下得出的, 而实际声表面波器件所用晶体是各向异性的压电晶体, 二者的弹性常数不一样。同时, 由于压电性, 声波在压电晶体中传播会产生伴随电势, 这个伴随电势会与声波发生耦合。这两种现象都会使声波在三个方向的振动位移发生改变。根据陈东培、H. A. Haus 和何世堂理论公式, 当振动位移发生改变时, 反射系数也要变化。为此, 我们将他们的工作推广到压电晶体, 在压电晶体中用该理论方法计算栅条的反射系数。

第四章、由于传统的 COM 理论仅适用于 Rayleigh 波, Plesky 和 Abbott 分别提出了两种关于伪表面波(BGW、STW、SSBW 和 leaky Waves)器件的 COM 分析方法, 也就是 Plesky 的 COM 模型和 Abbott 的 COM 模型, 实际上陈东培

和 H. A. Haus 理论是压电晶体的变分原理与传统的 COM 理论相结合的结果。我们自然想到将压电晶体变分原理与 Plessky 的 COM 模型和 Abbott 的 COM 模型联系起来。由禁带上边缘和禁带下边缘的数值得到 Plessky 色散关系的两个参数和 Abbott 色散关系的五个参数。在这个过程中，我们也给出不同晶体对称类的栅阵质量负载引起的速度偏移的理论公式。

第五章、考虑栅条本身的厚度，认为栅条内各质点的振动位移是不同的，这样陈东培、H. A. Haus 和何世堂理论公式中的一维积分问题变为二维积分问题。我们利用有限元方法(FEM)解决二维积分问题，并用坡印廷(Poynting)定理在电极区域实现 FEM 方法，通过有限元方法我们可以考虑栅条中声波振动位移在厚度方向上是变化这一实际情况，提高计算精度。我们对电极区采用有限元方法分析，基片区的分析方法仍同以前一样，这样可以明显节省计算时间。

另外，在这一章里我们还对二指栅阵的静电场问题进行了理论分析。我们知道 Bløtekjær 理论给出单指栅阵的电场（或电势）表达式，Aoki 理论是 Bløtekjær 理论在分裂指情况下的推广。同时，Bløtekjær 理论和 Aoki 理论都是将栅阵中的入射电势（电场）和扰动电势（电场）合为一项，由一个无穷级数表示。Datta 理论在分析单指电极阵的电势时，将单指栅阵中入射电势（电场）和扰动电势（电场）分开表示。我们将 Datta 理论推广到二指栅阵情况、以便使用陈东培和 H. A. Haus 的变分方法分析多电极栅阵。

第六章、最后，我们采用长脉冲和短脉冲两种方法测量反射系数^[43]。实验是将脉冲发生器输出的脉冲信号和信号发生器输出的正弦信号输入调制器，输出的射频脉冲信号从声表面波滤波器的输入换能器输入，其输出换能器输出的信号经放大器放大后输入示波器。用示波器测出发射换能器到接收换能器延迟线响应幅度的峰值，同时测出反射信号的最大幅度，由相应的公式求得反射系数。

第七章、对本文工作进行了小结，并对这方面的研究进行了展望。

第二章 压电晶体半无限空间声表面波的性质

引言

声表面波泛指沿表面或界面传播的各种模式的波，最常用的波动模式是瑞利波(Rayleigh Waves)。Rayleigh 波在半无限固体中满足波动方程(耦合波动方程)，而在边界上满足边界条件(压电晶体包括自由表面和金属化表面两种边界条件)。Rayleigh 波有如下特点：

- ①、 只有垂直剪切波(SV 波)和纵波(L 波)两个分量，即与水平剪切波(SH 波)解耦，质点振动在传播方向和表面法线决定的平面内。
- ②、 从相位上来说，SV 波和 L 波两个分量的相位相差 $\pi/2$ 。波的媒质质点的运动轨迹为一椭圆。
- ③、 质点位移的振幅随深度的增加呈指数衰减，弹性表面波的能量主要集中在表面下一、二个波长的范围内。

漏波(leaky-SAW)最早由 Engan 等人发现的^[44]，他们在各向异性介质 α -石英的某些方向上观察到了两种相速度不同的表面波。其中一种在传播过程中向体内辐射体波而衰减，因此称为漏(表面)波。

现在人们通常认为，对任何材料的任何切向，均有唯一的 Rayleigh 波解存在，但对漏波来说却不是这样，它只存在于部分材料的某些切向上，人们以寻找在何种材料的哪些切向上的漏波具有低传播损耗，高机电耦合系数，高的传播速度和低的温度延迟系数为目标，找到了一些材料切向，其漏波具有很好的应用价值，如 41° YX -LiNbO₃、 36° YX -LiTaO₃ 等。

BG 波^[45, 46]或称电声波是在一些高对称压电介质中存在的波，它是质点振动方向与传播方向垂直而与表面平行的切变波，而且是与电势耦合的一种表面波，当压电耦合不存在，它就退化为切变体波。

输入叉指换能器激励的体声波，有时它不经过底面反射，直接到达输出换能器，这种体声波称为表面掠面体波(Surface Skimming Bulk Wave, SSBW)或浅体声波^[47, 48]，

我们知道，在传播表面上设置一个栅阵(沟槽或金属栅条)可以引导 SSBW

的传播, 这种波称为表面横波 (Surface Transverse Wave, STW) [49,50]。

近年来, 声表面波滤波器在移动通信中作为关键器件起重要作用, 在移动通信中, 急需使声表面波滤波器体积减小, Rayleigh 波器件难以实现这点, 现在主要用纯 SH 波和重金属栅条结合使声表面波滤波器体积减小^[51,52]。

有的作者把除 Rayleigh 波以外的表面波, 即漏波、BG 波、SSBW、STW 统称为伪表面波(pseudo-SAW)。

本章讨论半无限空间压电晶体声表面波的基本特性, 从耦合波动方程和边界条件出发, 通过表面有效介电常数的分析来提取各种声表面传播模式的基本参量。这为栅阵声表面波模式特性的变分原理分析奠定基础。当然, 为了论述的完整性, 本章对格林函数分析所涉及到的基本概念也扼要地加以讨论。

§ 2.1 耦合波动方程

我们采用图 2.1 的坐标系来描述 SAW 场, 它的 x_1 轴与 SAW 传播方向平行, x_3 轴是基片的法线方向, x_2 轴平行于 SAW 波阵面。

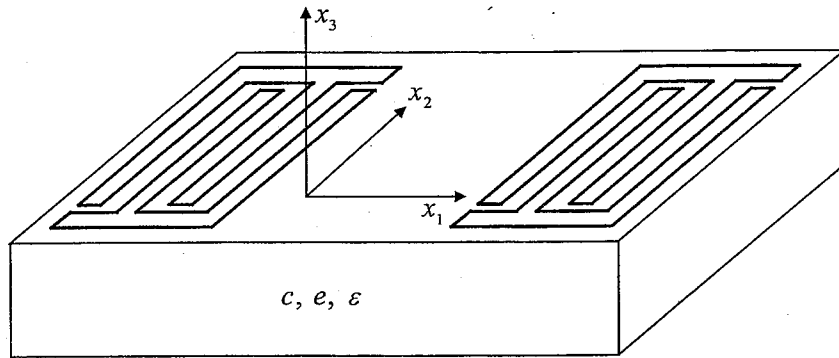


图 2.1 压电晶体半空间坐标系示意图

压电晶体材料在 x_1 和 x_3 方向的尺寸远大于声表面波的波长, 因此声表面波器件就可以看作是压电晶体半空间结构, 同时电极在 x_2 方向足够长, 认为所有相关场量均与 x_2 无关, 这就是所谓的一维近似假设。并且假设所有场量都以 $\exp(j2\pi ft)$ 形式变化, 这里 f 为频率, 在以后的讨论中将不再考虑场量与时间的关系。

§ 2.1.1 Euler 角与 Bond 变换

基片材料是影响 SAW 器件性能的一个决定因素。SAW 器件常用的是压电材料，它本身固有的各向异性，因此器件特性不仅与切向有关，而且与 SAW 的传播方向有关。

压电晶体的材料常数有弹性常数、压电常数和介电常数，这些参数均是在晶体坐标系 (X, Y, Z) 中给出的。该坐标系与晶轴平行、在晶体中是固定的，可以用 X 射线散射法测定出来。而实际的计算坐标表标系 (x_1, x_2, x_3) 不同于晶体坐标系，因此必须通过坐标变换将晶体坐标系 (X, Y, Z) 下的材料常数变换到计算坐标系 (x_1, x_2, x_3) 中去。

按照 IEEE 标准^[53]，用 Euler 角来表示从晶体坐标系 (X, Y, Z) 到计算坐标系 (x_1, x_2, x_3) 的旋转角度。为确定基片材料的 (x_1, x_2, x_3) 轴，一般需要三个连续旋转操作。开始晶体坐标系 (X, Y, Z) 与计算坐标系 (x_1, x_2, x_3) 重合。首先把 Z 晶轴旋转 θ 角到 $X'Y'Z'$ ，然后把新的 X' 轴旋转 ϕ 到 $X''Y''Z''$ 角（见图 2.2），这样就确定了切向角。最后把 $Z'' (= x_3)$ 轴旋转 ψ 角。于是传播方向与 x_1 轴平行。角 (θ, ϕ, ψ) 统称为 Euler 角，它广泛用于确定晶体的切向和 SAW 的传播中。

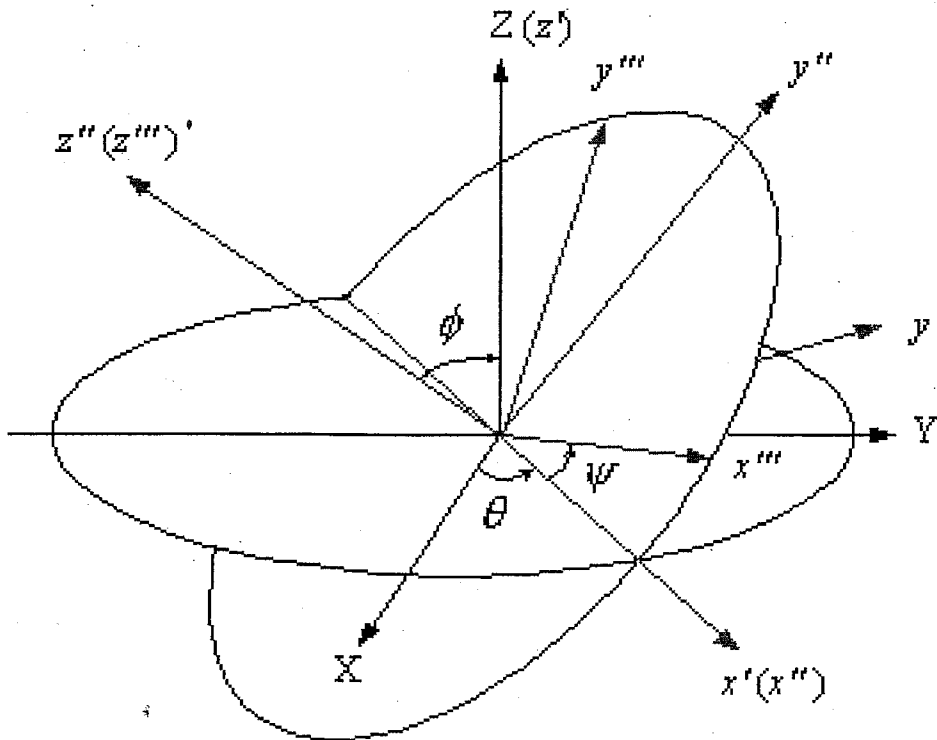


图 2.2 Euler 角与坐标变换

两次旋转坐标变换所对应的 Euler 变换矩阵 $[V]$ 为

$$[V] = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} \end{bmatrix} \quad (2.1.1)$$

$$\begin{aligned} V_{11} &= \cos \theta \cos \psi - \sin \theta \cos \phi \sin \psi \\ V_{12} &= \sin \theta \cos \psi - \cos \theta \cos \phi \sin \psi & V_{13} &= \sin \phi \sin \psi \\ V_{21} &= -\cos \theta \sin \psi - \sin \theta \cos \phi \cos \psi \\ V_{22} &= \cos \theta \cos \phi \cos \psi - \sin \theta \sin \psi & V_{23} &= \sin \phi \cos \psi \\ V_{31} &= \sin \theta \sin \phi & V_{32} &= -\cos \theta \sin \phi & V_{33} &= \cos \phi \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

在实际计算中常采用缩写下标将具体的四阶弹性张量 c_{ijkl}^E 写为 c_{IJ}^E , 三阶压电张量 e_{jik} 写为 $e_{jI}^{[54]}$, 其中

$$\begin{aligned} i, j, k, l &= 1, 2, 3 \\ I, J &= 1, 2, 3, 4, 5, 6 \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

用缩写下标能节省篇幅和便于代数运算, 所以相当重要的是有一种直接用缩写下标完成坐标变换的方法。为此, Bond 发展了一种很有效的矩阵方法, 其本质在于构成一个 6×6 矩阵, 用它来变换材料常数只需通过一次矩阵乘法。Bond 变换矩阵 $[M]$ 为

$$[M] = \begin{bmatrix} V_{11}^2 & V_{12}^2 & V_{13}^2 & 2V_{12}V_{13} & 2V_{13}V_{11} & 2V_{13}V_{12} \\ V_{21}^2 & V_{22}^2 & V_{23}^2 & 2V_{22}V_{23} & 2V_{23}V_{21} & 2V_{21}V_{22} \\ V_{31}^2 & V_{32}^2 & V_{33}^2 & 2V_{32}V_{33} & 2V_{33}V_{31} & 2V_{31}V_{32} \\ \hline V_{21}V_{31} & V_{22}V_{32} & V_{23}V_{33} & V_{22}V_{33} + V_{23}V_{32} & V_{21}V_{33} + V_{23}V_{31} & V_{22}V_{31} + V_{21}V_{32} \\ V_{31}V_{11} & V_{32}V_{12} & V_{33}V_{13} & V_{12}V_{33} + V_{13}V_{32} & V_{13}V_{31} + V_{11}V_{33} & V_{11}V_{32} + V_{12}V_{31} \\ V_{11}V_{21} & V_{12}V_{22} & V_{13}V_{23} & V_{12}V_{23} + V_{13}V_{22} & V_{13}V_{21} + V_{11}V_{23} & V_{11}V_{22} + V_{12}V_{21} \end{bmatrix} \quad (2.1.4)$$

采用缩写下标并利用 Bond 变换矩阵 $[M]$, 晶体坐标系下材料常数 $\bar{c}_{IJ}^E$ 、 $\bar{e}_{IJ}$ 、 $\bar{\varepsilon}_{ij}^S$ 到计算坐标系下材料常数 c_{IJ}^E 、 e_{IJ} 、 ε_{ij}^S 的张量变换分别有如下的公式^[54]

$$[c^E] = [M][\bar{c}^E][M]^T \quad (2.1.5)$$

$$[e] = [V][\bar{e}][M]^T \quad (2.1.6)$$

$$[\varepsilon^S] = [V][\bar{\varepsilon}^S][V]^T \quad (2.1.7)$$

其中 $[M]^T$ 是 Bond 变换矩阵 $[M]$ 的转置。由此可见, 只要知道晶体坐标系下的材

料常数和 Euler 角 (θ, ϕ, ψ) ，由 (2.1.1) ~ (2.1.7) 式即可求出当前计算坐标系下的材料常数。在今后的讨论中，均认为材料常数已做了坐标变换。

§ 2.1.2 压电效应与耦合波动方程

在压电晶体中，由于存在压电效应，所以伴随弹性波的传播，必然出现由诱导电荷产生的电磁波。这种声波和电磁波的相互耦合必然使得在压电晶体中传播的声表面波具有不同于一般介质的性质。

由于晶体的压电效应，应变 $\mathbf{S}$ 产生了一个与 $\mathbf{S}$ 成正比的电位移矢量 $\mathbf{D}$ ，又因为电场 $\mathbf{E}$ 也可以产生 $\mathbf{D}$ ，于是得到下面的方程^[55-58]

$$\mathbf{D} = \epsilon^S \cdot \mathbf{E} + \mathbf{e} : \mathbf{S} \quad \text{或} \quad D_i = e_{ikl} S_{kl} + \epsilon_{ik}^S E_k \quad (2.1.8)$$

压电晶体中同时存在逆压电效应，外加电场 $\mathbf{E}$ 会产生一个应力 $\mathbf{T}$ ，应变 $\mathbf{S}$ 自然会产生应力 $\mathbf{T}$ ，于是有

$$\mathbf{T} = -\mathbf{e} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{c}^E : \mathbf{S} \quad \text{或} \quad T_{ij} = c_{ijkl}^E S_{kl} - e_{kij} E_k \quad (2.1.9)$$

(2.1.8) 式和 (2.1.9) 式就是通常所说的压电方程或压电本构方程。

一般说来，麦克斯韦方程用来描述材料的电学性质，对于声表面波器件，因为它的尺寸比相应工作频率的电磁波波长小得多，所以可以将与声表面波相耦合的电磁场当成静电场对待，也就是准静态近似。在准静态近似下，电场的旋度等于零

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (2.1.10)$$

可以用来描述声波的传播。且电场 $\mathbf{E}$ 可表示为电势 ϕ 的梯度

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi \quad (2.1.11)$$

于是麦克斯韦方程可以简化为

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = q \quad (2.1.12)$$

q 是电荷密度，由于压电材料是绝缘体，不存在自由电荷，所以电位移矢量的散度必须等于零，

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad \text{或} \quad \frac{\partial D_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2.1.13)$$

将 (2.1.8) 式代入上式得

$$e_{jkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l \partial x_j} - \epsilon_{jk}^S \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_k \partial x_j} = 0 \quad (2.1.14)$$

另外由 (2.1.9) 式和 (2.1.11) 式可得

$$T_{ij} = c_{ijkl}^E \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + e_{kij} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \quad (2.1.15)$$

弹性介质的牛顿运动方程是

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \mathbf{F} \quad (2.1.16)$$

将 (2.1.15) 式代入 (2.1.16) 式得

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - c_{ijkl}^E \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l \partial x_k} - e_{kij} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_k \partial x_j} = 0 \quad (2.1.17)$$

方程 (2.1.14) 和 (2.1.17) 就是压电介质中的耦合波动方程。任何结构下压电介质中声表面波的准确求解都是从耦合波动方程出发, 寻找满足特定边界条件的声波解。

§ 2.1.3 边界条件和耦合波动方程的解

由于主要讨论压电体中的平面波, 我们可以假设耦合波动方程有下列指数形式的解

$$\begin{aligned} u_i(x_1, x_3) &= A_i \exp[-j2\pi f(sx_1 + \alpha sx_3)] \\ \phi(x_1, x_3) &= A_4 \exp[-j2\pi f(sx_1 + \alpha sx_3)] \end{aligned} \quad (2.1.18)$$

其中 f 为频率, $s = 1/V$ 是速度的倒数即慢度, 它可以看成复数 $s = s^r + js^i$, 其所对应的传播相速为 $V = 1/s^r$, 传播损耗为^[59]

$$\alpha^i = -\frac{40\pi}{\ln 10} \frac{s^i}{s^r} \approx -54.575 \frac{s^i}{s^r} \text{dB}/\lambda \quad (2.1.19)$$

对频率为 f 、慢度为 s 的声表面波, 它在材料体内 $x_3 < 0$ 各场量在 x_3 方向的变化形式为 $\exp(-j2\pi\alpha f s x_3)$, α 为场量在 x_3 方向的衰减因子。将 (2.1.18) 式代入耦合波方程 (2.1.14) 式和 (2.1.17) 式中, 就可以得到关于各场分量振幅的线性方程组

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} - \rho/s^2 & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} & \Gamma_{14} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} - \rho/s^2 & \Gamma_{23} & \Gamma_{24} \\ \Gamma_{13} & \Gamma_{23} & \Gamma_{33} - \rho/s^2 & \Gamma_{34} \\ \Gamma_{14} & \Gamma_{24} & \Gamma_{34} & \Gamma_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.1.20)$$

方程 (2.1.20) 就是 Christoffel 方程, 等式左端系数矩阵称为 Christoffel 矩阵, 它的矩阵元素只是声波传播方向和晶体弹性常数的函数。上式左端系数矩阵左上角 3×3 子块的各元素代表了弹性位移分量之间的耦合,

$$\begin{aligned}\Gamma_{11} &= c_{55}^E \alpha^2 + 2\alpha c_{15}^E + c_{11}^E \\ \Gamma_{22} &= c_{44}^E \alpha^2 + 2\alpha c_{46}^E + c_{66}^E \\ \Gamma_{33} &= c_{33}^E \alpha^2 + 2\alpha c_{35}^E + c_{55}^E \\ \Gamma_{12} &= c_{45}^E \alpha^2 + \alpha(c_{14}^E + c_{56}^E) + c_{16}^E \\ \Gamma_{13} &= c_{35}^E \alpha^2 + \alpha(c_{13}^E + c_{55}^E) + c_{15}^E \\ \Gamma_{23} &= c_{34}^E \alpha^2 + \alpha(c_{36}^E + c_{45}^E) + c_{56}^E\end{aligned}\quad (2.1.21)$$

矩阵左上和角右下角的 3 个元素代表了弹性位移分量与电势之间的耦合,

$$\begin{aligned}\Gamma_{14} &= e_{35} \alpha^2 + \alpha(e_{15} + e_{31}) + e_{11} \\ \Gamma_{24} &= e_{34} \alpha^2 + \alpha(e_{14} + e_{36}) + e_{16} \\ \Gamma_{34} &= e_{33} \alpha^2 + \alpha(e_{13} + e_{35}) + e_{15}\end{aligned}\quad (2.1.22)$$

右下角一项为介电项

$$\Gamma_{44} = -\varepsilon_{33}^s \alpha^2 - 2\alpha \varepsilon_{13}^s - \varepsilon_{11}^s \quad (2.1.23)$$

Christoffel 方程 (2.1.20) 式存在非零解的条件是它的系数行列式为零, 即

$$\begin{vmatrix} \Gamma_{11} - \rho/s^2 & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} & \Gamma_{14} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} - \rho/s^2 & \Gamma_{23} & \Gamma_{24} \\ \Gamma_{13} & \Gamma_{23} & \Gamma_{33} - \rho/s^2 & \Gamma_{34} \\ \Gamma_{14} & \Gamma_{24} & \Gamma_{34} & \Gamma_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.1.24)$$

一般情况下这就得到一个关于待定深度衰减系数 α 的八次方程, 这一方程共有八个根, 分别对应半无限空间的八个基本模式, 这八个基本模式分成四对, 分别对应两个准剪切波、一个准纵波和一个电磁波项, 对给定的边界条件只能选其中四个基本模式^[60]

对于传统的声表面波 Rayleigh 波, 它的各场量随深度衰减, 因此在波数 $k > 0$ 的情况下, 若 α_n 为复数, 则需选虚部大于零的根以保证各场量随深度衰减。若 α_n 为实数, 则代表了无深度衰减的体波模式, 应选小于零的根以保证向材料体内的传播。对于特定的 k 值, 也可能出现实根 α_n 同号的情况, 此时, 按能流方向朝向材料体内的原则选其中绝对值小的实根。这样可选出四个合适的根, 而其余四个根则对应 $k < 0$ 的情况^[61]。

漏波和纵漏波的选根原则远比 Rayleigh 波复杂得多^[62-72], 在下一小节里我们作详细的讨论。

每一个选出的 α_n 都对应一个分波, 代回到 Christoffel 方程 (2.1.20) 式中就可求出分波中各场量之间的振幅比。四个 α_n 根所对应的四组基本解形式可写为

$$A_i^{(n)} \exp[-j2\pi f(sx_1 + \alpha_n sx_3)] \quad i, n = 1, 2, 3, 4 \quad (2.1.25)$$

其中

$$A^{(n)} = [A_1^{(n)} \quad A_2^{(n)} \quad A_3^{(n)} \quad A_4^{(n)}] \quad (2.1.26)$$

为 Christoffel 方程 (2.1.20) 式对应于 α_n 的特征矢量。

Christoffel 方程 (2.1.20) 式的解还必须满足在介质表面的边界条件, 对于压电介质, 边界条件包含机械边界条件和电学边界条件。

对于半无限空间, 在不考虑电极质量情况下, 表面法向应力分量为零, 机械边界条件为

$$T_{i3}(x_1, x_3) \Big|_{x_3=0} = 0 \quad (2.1.27)$$

电学边界条件有两个, 当 $x_3 > 0$ 时, 电势 ϕ 必须满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (2.1.28)$$

同时在界面上电势是连续的, 并且当 $x_3 \rightarrow \infty$ 时, ϕ 必须为零, 因此当 $x_3 \geq 0$ 时电势 ϕ 可写成

$$\phi(x_1, x_3 \geq 0) = \phi(x_1, 0) \exp(-\gamma x_3) \quad (2.1.29)$$

另一个电学边界条件是自由表面电荷密度 σ 等于法向电位移矢量的不连续, 即

$$D_3(x_1, x_3) \Big|_{x_3=0^+} - D_3(x_1, x_3) \Big|_{x_3=0^-} = \sigma(x_1) \quad (2.1.30)$$

空间域场量和慢度域场量之间的关系可用傅里叶变换表示

$$\begin{aligned} u_i(x_1, x_3) &= f \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{u}_i(s, x_3) \exp(-j2\pi f s x_1) ds \\ \phi_i(x_1, x_3) &= f \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\phi}_i(s, x_3) \exp(-j2\pi f s x_1) ds \\ \sigma(x_1) &= f \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\sigma}(s) \exp(-j2\pi f s x_1) ds \end{aligned} \quad (2.1.31)$$

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_i(s, x_3) &= \int_{-\infty}^{+\infty} u_i(x_1, x_3) \exp(j2\pi f s x_1) dx_1 \\
 \bar{\phi}(s, x_3) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x_1, x_3) \exp(j2\pi f s x_1) dx_1 \\
 \bar{\sigma}(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(x_1) \exp(j2\pi f s x_1) dx_1
 \end{aligned} \tag{2.1.32}$$

只有将四个 α_n 根所对应的四组基本解线性迭加起来, 才能同时满足耦合波动方程和边界条件, 这里取慢度域场量

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_i(s, x_2) &= \sum_{n=1}^4 C_n A_i^{(n)} \exp(-j2\pi \alpha_n f s x_3) \\
 \bar{\phi}(s, x_2) &= \sum_{n=1}^4 C_n A_4^{(n)} \exp(-j2\pi \alpha_n f s x_3)
 \end{aligned} \tag{2.1.33}$$

将 (2.1.33) 式代入边界条件 (2.1.27) 式和 (2.1.30) 得

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -j\bar{\sigma}(s)/(2\pi f s) \end{bmatrix} \tag{2.1.34}$$

其中矩阵各元素为

$$\begin{aligned}
 r_{1n} &= (c_{15}^E + c_{55}^E \alpha_n) A_1^{(n)} + (c_{56}^E + c_{45}^E \alpha_n) A_2^{(n)} \\
 &\quad + (c_{55}^E + c_{35}^E \alpha_n) A_3^{(n)} + (e_{15} + e_{35} \alpha_n) A_4^{(n)} \\
 r_{2n} &= (c_{14}^E + c_{45}^E \alpha_n) A_1^{(n)} + (c_{46}^E + c_{44}^E \alpha_n) A_2^{(n)} \\
 &\quad + (c_{45}^E + c_{34}^E \alpha_n) A_3^{(n)} + (e_{14} + e_{34} \alpha_n) A_4^{(n)} \\
 r_{3n} &= (c_{13}^E + c_{35}^E \alpha_n) A_1^{(n)} + (c_{36}^E + c_{34}^E \alpha_n) A_2^{(n)} \\
 &\quad + (c_{35}^E + c_{33}^E \alpha_n) A_3^{(n)} + (e_{13} + e_{33} \alpha_n) A_4^{(n)} \\
 r_{4n} &= (e_{31} + e_{35} \alpha_n) A_1^{(n)} + (e_{36} + e_{34} \alpha_n) A_2^{(n)} \\
 &\quad + (e_{35} + e_{33} \alpha_n) A_3^{(n)} - \left(\varepsilon_{31} + \varepsilon_{33} \alpha_n + j \frac{|s|}{s} \varepsilon_0 \right) A_4^{(n)}
 \end{aligned} \quad n=1,2,3,4 \tag{2.1.35}$$

(2.1.34) 式的解为

$$C_n = \frac{\Delta_{4n}}{\Delta_0} \frac{\bar{\sigma}(s)}{j2\pi f s} \tag{2.1.36}$$

其中 Δ_0 为方程 (2.1.34) 式左端系数矩阵 $[r_{in}]$ (也称边界条件矩阵) 的行列式值, $\Delta_0 = \det(r_{in})$, Δ_{4n} 为矩阵 $[r_{in}]$ 中元素 r_{4n} 所对应的代数余子式, 最后我们得到压电晶体中各场分量在慢度 s 域全解

$$\begin{aligned}\bar{u}_i(s, x_3) &= \frac{1}{j2\pi fs} \sum_{n=1}^4 \frac{\Delta_{4n}}{\Delta_0} \bar{\sigma}(s) A_i^{(n)} \exp(-j2\pi\alpha_n f s x_3) \\ \bar{\phi}(s, x_3) &= \frac{1}{j2\pi fs} \sum_{n=1}^4 \frac{\Delta_{4n}}{\Delta_0} \bar{\sigma}(s) A_4^{(n)} \exp(-j2\pi\alpha_n f s x_3)\end{aligned}\quad (2.1.37)$$

§ 2.1.4 漏波的选根原则

现在人们通常认为, 对任何材料的任何切向, 均有唯一的 Rayleigh 波存在, 但对漏波来说却不是这样, 它只存在于部分材料的某些切向上, 漏波也满足半空间表面的边界条件, 包括自由表面边界条件和金属化表面边界条件, 但是这种表面波的传播是随着距离增加而变化幅度的分波中有一个部分波是随深度缓慢“生长”的, 而另外的部分波还保持当深度增加时, 它的场量趋于零, 正因如此, 所以被称为漏(表面)波。

如上一小节所述, 方程 (2.1.24) 式是 Christoffel 矩阵行列式等于零, 它是 α 八次方程, 共有八个根, 一般来说 α_n 可分成四对, 分别对应准慢切变波、准快切变波、准纵波和电磁波项。

为了说清问题, 以欧拉角为 $(0^\circ, 47.3^\circ, 90^\circ)$ 的四硼酸锂 ($\text{Li}_2\text{B}_4\text{O}_7$) 晶体为例, 它是典型的支持纵漏声表面波传播的晶体切向。它的倒速度(慢度)曲线如

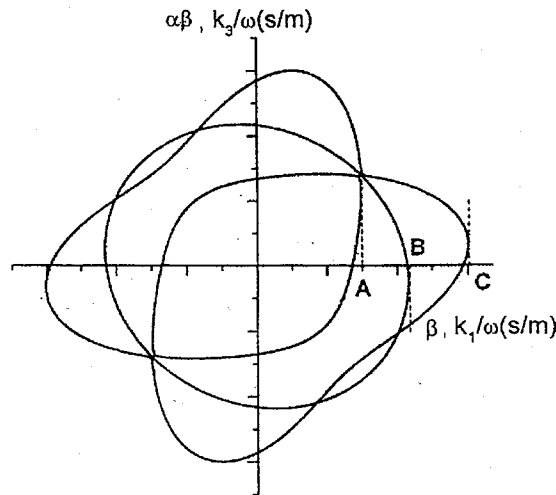


图 2.3 四硼酸锂 ($\text{Li}_2\text{B}_4\text{O}_7$) 晶体的慢度曲线

图 2.3, 它给出 $\alpha k - k$ 关系曲线 (或 $\alpha 2\pi fs - 2\pi fs$ 关系曲线), 是由 (2.1.24) 式得出的闭合曲线, 分别代表晶体中的三个部分波, 由于我们考虑准静态近似, 电磁模式的速度趋于无穷大, 所以其慢度曲线退化为原点处的一个点。

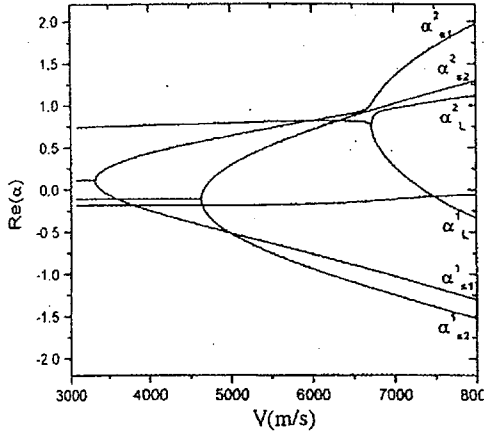


图 2.4 特征根 α 的实部

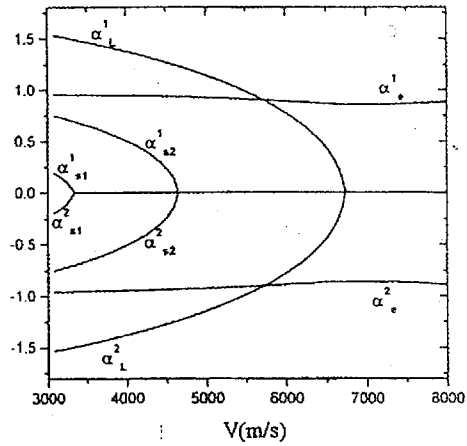


图 2.5 特征根 α 的虚部

设 s_{ss} 、 s_{Fs} 和 s_L 分别代表准慢切变波、准快切变波和准纵波的截止慢度。在图 2.3 中对应于 C, B 和 A 点。图 2.4 为四硼酸锂 ($\text{Li}_2\text{B}_4\text{O}_7$) 晶体特征根 α 的实部, 图 2.5 特征根 α 的虚部。我们将速度划分几个区间来讨论特征根 α 的选取方法。

(1)、当 $V < 1/s_{ss}$ 时, 即在图 2.3 慢度曲线中位于 $[C, +\infty]$ 上, 八个特征根均为复数, 并以共扼复数的形式出现, 此时, 按照我们在 § 2.1.3 节的讨论, 只有虚部大于零的四个根才有物理意义, 满足随深度衰减的要求。在此区域内只有一般的 Rayleigh 波存在。

(2)、当 $1/s_{ss} < V < 1/s_{Fs}$ 时, 即在图 2.3 慢度曲线中位于 $[B, C]$ 上, 有一对共扼复根变成了两个实根, 其余六个根仍然为共扼复数。此时对六个共扼复根仍取虚部大于零的根, 而对两个实根, 它对应向上和向下传播的两个波, 我们这里取对应的能流方向指向晶体内部的那一个。如图 2.6 所示, 对于某个速度 V , 有两个对应于实根 $\alpha_{s1}^{(1)}$ 和 $\alpha_{s1}^{(2)}$ 的两个点: $(\alpha_{s1}^{(1)}/V, 1/V)$ 和 $(\alpha_{s1}^{(2)}/V, 1/V)$, 其能流方向分别为 $\bar{P}_1$ 和 $\bar{P}_2$, $\bar{P}_1$ 指向晶体的内部, 因此应选 $\alpha_{s1}^{(1)}$ 为合理的根。在这个区域内有漏波存在。

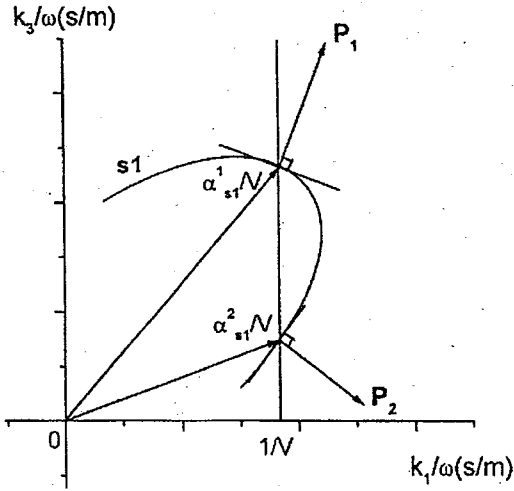
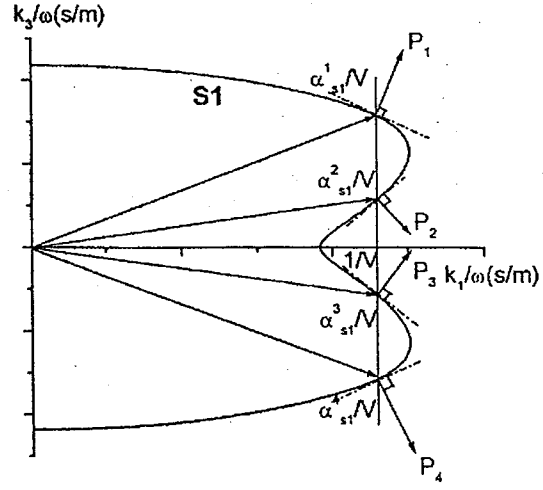


图 2.6 特征根对应能流方向示意图

图 2.7 在慢度曲线不全凸是特征根
对应能流方向示意图

如果慢度曲线不是全凸的，而是有凹有凸的曲线，如图 2.7 所示，则对于某个速度 V ，在慢度曲线上有两个以上的交点，在此例中慢度曲线上有四个实根 $\alpha_{s1}^{(1)}$ 、 $\alpha_{s1}^{(2)}$ 、 $\alpha_{s1}^{(3)}$ 和 $\alpha_{s1}^{(4)}$ ，其能量流方向分别为 $\vec{P}_1$ 、 $\vec{P}_2$ 、 $\vec{P}_3$ 和 $\vec{P}_4$ ，因为 $\vec{P}_1$ 和 $\vec{P}_3$ 指向晶体内部，所以取 $\alpha_{s1}^{(2)}$ 和 $\alpha_{s1}^{(4)}$ 为合理的根。

(3)、当 $1/s_{Fs} < V < 1/s_L$ 时，即在图 2.3 慢度曲线中位于 $[A, B]$ 上，此时八个根中有两对共扼复根、两对实根。对两对共扼复根来说，我们取虚部大于零的根，而对两对实根，我们同样根据图 2.6 或图 2.7 的方法、取能量流方向指向晶体内部的根。在这个区域内存在纵漏（表面）波（Longitudinal leaky surface wave, LLSW），也称高速伪表面波（High Velocity pseudo surface acoustic HVPSAW）。

(4)、当 $V > 1/s_L$ 时，速度处在图 2.3 中的 $[O, A]$ 区间，这种情况下八个根中有一对共扼复根，三对实根，选取原则同(3)。

由于漏波一边沿表面传播，一边向材料内辐射体波，必须将慢度加上一个很小的虚部 $s = s' + js'$ （也可在速度 V 或波数 k 上引入一个不大的虚部）使之成为复数。才能满足自由表面或金属化表面边界条件，其实部直接对应传播相速，虚部对应传播衰减。

对于漏波，慢度域场量仍可以写成 (2.1.33) 一样的形式：

$$\begin{aligned}\bar{u}_i(s, x_3) &= \sum_{n=1}^4 C_n A_i^{(n)} \exp(-j2\pi\alpha_n f s x_3) \\ \bar{\phi}(s, x_3) &= \sum_{n=1}^4 C_n A_4^{(n)} \exp(-j2\pi\alpha_n f s x_3)\end{aligned}\quad (2.1.33)$$

要注意的是,漏波的慢度取复数 $s = s' + js^i$, Christoffel 方程变为复系数高次代数方程,此时 α 的八个根均为复数,且不再共扼。

我们再来看慢度的虚部 s^i 的取值范围,通过 (2.1.33) 式可以看出,当 $s^i > 0$ 时,表示波一边传播,能量在增大,这是没有物理意义的。当 $s^i < 0$ 时,表示波在传播方向 x_1 上衰减,这才符合物理意义。

在具体选根时,首先取慢度为实数,根据上面阐述的原则求出四个符合物理意义的根,并在有效介电常数曲线上找到表征漏波的特征点(见本文 § 2.2.3)。然后在慢度 s 上加一个小的负虚部,这时慢度的取值范围应在表征漏波的特征点附近,再在复平面上进行二维优化搜索,求出所有八个根,再根据物理量连续的原则,在八个根中选择和上面四个根最接近的四个根。同时也得到慢度的实部和虚部。

林基明对漏波的选根采用解析延拓概念,将复零极点的二维搜索降为一维搜索,大幅降低了计算工作量,并创造性地将解析延拓概念延伸到谐波导纳和谐波阻抗中,详见文献[39]

§ 2.1.5 格林函数

声表面波求解问题的数学实质是特定边界条件下二阶非齐次线性偏微分方程求解,这是物理学中的一个非常普遍的问题^[73~76]。格林函数方法是解决这类问题的一个普遍适用方法,其基本过程为:针对特定边界条件建立一个相应的格林函数 $G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$,它表示系统中 $\mathbf{r}'$ 处的激发源在 $\mathbf{r}$ 处建立的响应,那么,根据线性系统的叠加原理,任意场量 $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ 均可写成格林函数 $G(\mathbf{r})$ 同物理激发量的空间分布 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ 的卷积。即

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \bullet \mathbf{F}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (2.1.38)$$

这里 Ω 是激发源 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ 的分布区域。

从这里我们可以看到,一旦建立某特定边界条件的格林函数,那么该系统的基本物理特性也就随之而定,也就是说,格林函数表示了有关物理系统的基本特性。分析格林函数可以获得系统的基本物理特性,我们对声表面波的分析也遵循这一基本思路,通过对有效介电常数的分析来提取各种声表面波模式的基本参量,实际上有效介电常数和格林函数具有相同的物理意义。

对于半无限空间声表面波激发问题, 考虑表面线源 $F(x_1)$ 激发情况, 则激发出的场分布 $u(x_1, x_2)$ 用格林函数形式可写为

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x_1 - x'_1, x_3) \cdot F(x'_1) dx'_1 \quad (2.1.39)$$

当声表面波传播区域为自由表面时, 由于电极电荷分布有限, 因而将电极电荷分布 $\sigma(x_1)$ 看成声表面波的激发源, 而激发出的表面波则由其伴随电势分布 $\phi(x_1, x_3)$ 表示^[24]

在 (2.1.37) 式电势分布 $\bar{\phi}(s, x_3)$ 表达式中定义

$$\bar{G}(s, x_3) = \frac{1}{j2\pi fs} \sum_{n=1}^4 \frac{\Delta_{4n}}{\Delta_0} A_4^{(n)} \exp(-j2\pi\alpha_n fsx_3) \quad (2.1.40)$$

则有

$$\bar{\phi}(s, x_3) = \bar{G}(s, x_3) \cdot \bar{\sigma}(s) \quad (2.1.41)$$

由傅里叶变换 (2.1.31) 式可得空间电势分布为

$$\phi(x_1, x_2) = f \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{G}(s, x_3) \bar{\sigma}(s) \exp(-j2\pi fsx_1) ds \quad (2.1.42)$$

由卷积定理可将上式为

$$\phi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x_1 - x'_1, x_3) \sigma(x'_1) dx'_1 \quad (2.1.43)$$

其中格林函数为

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2) &= f \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{G}(s, x_3) \exp(-j2\pi fsx_1) ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^4 \frac{\Delta_{4n}}{j2\pi s \Delta_0} A_4^{(n)} \exp[-j2\pi fs(x_1 + \alpha_n x_3)] ds \end{aligned} \quad (2.1.44)$$

至此, 根据耦合波方程和相应边界条件建立了压电半无限空间线电荷源的格林函数。

当声表面波传播区域为金属化表面时, 由于金属化表面上的电势分布为零, 所激发出的表面波改由电荷分布 $\sigma(x_1)$ 表示, 而表面波激发源用电势分布 $\phi(x_1, x_3)$ 表示, 类似定义金属化表面慢度 s 域的格林函数 $\bar{G}_m(s, x_3)$

$$\bar{G}_m(s, x_3) = \frac{j2\pi fs \Delta_0}{\sum_{n=1}^4 \Delta_{4n} A_4^{(n)} \exp(-j2\pi\alpha_n fsx_3)} \quad (2.1.45)$$

则有

$$\bar{\sigma}(s) = \bar{G}_m(s, x_3) \cdot \bar{\phi}(s, x_3) \quad (2.1.46)$$

相应地金属化表面空间域格林函数 $G_m(x_1, x_3)$ 为

$$G_m(x_1, x_3) = f \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{j2\pi f s \Delta_0 \exp(-j2\pi f s x_1)}{\sum_{n=1}^4 \Delta_{4n} A_4^{(n)} \exp(-j2\pi \alpha_n f s x_3)} ds \quad (2.1.47)$$

§ 2.1.6 晶体对称

上节给出了一般情况下的场解,但在实际应用中尚有必要考察某些晶体对称情况下波动解耦的特殊情况。表 2.1 给出了各种对称类型的总结^[77]。类型 1 是一般 Rayleigh 表面波,这种情况下,材料具有压电性,质点位移包含了所有三个分

表 2.1 晶体对称类型

晶体对称类型	Christoffel 矩阵元素	涉及的特征矢量	α_n 根数目	波动模式
类型 1	全部矩阵元素	A_1, A_2, A_3, A_4	8	一般表面波
类型 2	$\Gamma_{11}, \Gamma_{12}, \Gamma_{13}, \Gamma_{22}, \Gamma_{23}, \Gamma_{33}$	A_1, A_2, A_3	6	一般 Rayleigh 波
	Γ_{44}	A_4	2	
类型 3	$\Gamma_{11}, \Gamma_{13}, \Gamma_{14}, \Gamma_{33}, \Gamma_{34}, \Gamma_{44}$	A_1, A_3, A_4	6	压电 Rayleigh 波
	Γ_{22}	A_2	2	SH 波
类型 4	$\Gamma_{11}, \Gamma_{13}, \Gamma_{33}$	$A_1, A_3,$	4	纯 Rayleigh 波
	$\Gamma_{22}, \Gamma_{24}, \Gamma_{44}$	A_2, A_4	4	压电 SH 波
类型 5	$\Gamma_{11}, \Gamma_{13}, \Gamma_{33}$	A_1, A_3	4	纯机械波
	Γ_{22}	A_2	2	SH 波
	Γ_{44}	A_4	2	

量;类型 2 则代表了非压电材料情况,得到的是一般各向异性的弹性波解;类型 3 中两位移分量和电势 (u_1, u_3, ϕ) 与 u_2 分量解耦,这样材料中可存在一个解耦 Rayleigh 波和一个水平切变 (Shear horizontal SH) 体波,典型例子为 Y 切 Z 传播

LiNbO₃ 晶体；类型 4 中 (u_1, u_3) 与 (u_2, ϕ) 解耦，晶体中可存在一无压电耦合的纯 Rayleigh 波和一有压电耦合的 SH 型表面波（也称为 Bleustein-Gulyaev-Shimizu waves, 简称 BGS 波）^[78]；类型 5 表示纯机械声波，其位移分量 (u_1, u_3) 与另一个切变分量解耦。

下面分析各种晶体对称类型下的耦合波方程的解。考虑常用 SAW 器件所用的材料，我们仅分析类型 1、3、和 4。对于类型 3 晶体 Christoffel 方程 (2.1.20) 式可写为

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} - \rho/s^2 & 0 & \Gamma_{13} & \Gamma_{14} \\ 0 & \Gamma_{22} - \rho/s^2 & 0 & 0 \\ \Gamma_{13} & 0 & \Gamma_{33} - \rho/s^2 & \Gamma_{34} \\ \Gamma_{14} & 0 & \Gamma_{34} & \Gamma_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.1.48)$$

上式也可写为

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} - \rho/s^2 & \Gamma_{13} & \Gamma_{14} \\ \Gamma_{13} & \Gamma_{33} - \rho/s^2 & \Gamma_{34} \\ \Gamma_{14} & \Gamma_{34} & \Gamma_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.1.49)$$

对应的系数行列式为 α 的六次多项式，类似一般情况，从六个根中选符合要求的三个根构成基本解，相应的边界条件方程变为

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{13} & r_{14} \\ r_{31} & r_{33} & r_{34} \\ r_{41} & r_{43} & r_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -j\bar{\sigma}(s)/(2\pi fs) \end{bmatrix} \quad (2.1.50)$$

对称类型 4 中 (u_2, ϕ) 构成 BG 波解，当压电耦合不存在时，它就退化为体切变波（SH 型表面波）。而 (u_1, u_3) 构成纯 Rayleigh 波解，这种情况下，晶体 Christoffel 方程 (2.1.20) 式写为

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} - \rho/s^2 & \Gamma_{13} & 0 & 0 \\ \Gamma_{13} & \Gamma_{33} - \rho/s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_{22} - \rho/s^2 & \Gamma_{24} \\ 0 & 0 & \Gamma_{24} & \Gamma_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.1.51)$$

对与电势相耦合的 BGS 波或 SH 型表面波，可简单的将上式写为

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{22} - \rho/s^2 & \Gamma_{24} \\ \Gamma_{24} & \Gamma_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 \\ A_4 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.1.52)$$

对应的系数行列式是 α 的四次多项式, 类似地从四个根中选符合要求的两个根构成基本解, 该类型的边界条件方程可写为

$$\begin{bmatrix} r_{22} & r_{24} \\ r_{42} & r_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -j\bar{\sigma}(s)/(2\pi fs) \end{bmatrix} \quad (2.1.53)$$

§ 2.2 表面有效介电常数

一般情况下通过确定边界条件矩阵行列式的极值点就能确定声表面波模式, 由于自由表面和金属表面的边界条件不同, 因此对这两种表面要分别对待。本文通过引入表面有效介电常数概念, 通过寻找其零点和极值点可同时确定自由表面和金属表面的声表面波模式。

§ 2.2.1 表面有效介电常数的定义

为了分析的方便, 引入表面有效介电常数(Surface Effective Permittivity)概念, 早期 Milsom 等人^[24]的工作及其它许多叉指换能器和声表面波方面的分析计算也都采用了这一定义。即

$$\varepsilon_s(s) = \frac{\bar{\sigma}(s)}{2\pi|s|\bar{\phi}(s, x_3)|_{x_3=0}} \quad (2.2.1)$$

从声表面波各场分量解(2.1.37)不难看出, 式中 Δ_{4n} , Δ_0 , $A_4^{(n)}$ 都只与慢度 s 有关, 而与频率 f 无关。相应地表面有效介电常数只是慢度的函数。

$$\varepsilon_s(s) = \frac{js}{|s|} \frac{\Delta_0}{\sum_{n=1}^4 \Delta_{4n} A_4^{(n)}} \quad (2.2.2)$$

s 域格林函数与 $\varepsilon_s(s)$ 的关系为

$$\bar{G}(s) = \frac{1}{2\pi f|s|\varepsilon_s(s)} \quad (2.2.3)$$

$$\bar{G}_m(s) = 2\pi f|s|\varepsilon_s(s) \quad (2.2.4)$$

对不同的慢度 s 可通过(2.2.2)式求出对应 ε_s 值, 得到一条表面有效介电常数 $\varepsilon_s(s)$

曲线, 该曲线只是材料常数的函数。当材料的切割方向和传播方向确定时, 就有一条相应的 $\varepsilon_s(s)$ 曲线。严格地讲, $\varepsilon_s(s)$ 曲线包含了所有能在表面激发和传播的与电场相耦合的声波模式, 因此 $\varepsilon_s(s)$ 曲线在声表面波分析中占有很重要的位置。下面我们分析该曲线的一些重要特性。

§ 2.2.2 表面有效介电常数的数值计算

表面有效介电常数的数值计算是声表面波理论分析的基础, 也是本文理论分析基础, 根据公式 (2.2.2) 式编写程序, 计算流程如图 2.8。

我们采用当前非常流行的 Matlab 语言, Matlab 编程代码很接近数学推导格式, 简洁直观, 更符合人们的思维习惯, 所以编程极其方便。依据晶体的对称类型使程序模块化, 从而使我们的程序有较好的通用性, 并在程序开发中注意程序说明、标注, 提高其可读性。

计算中涉及到高次方程求根问题, Matlab 先将多项式转化为伴随矩阵 (companion matrix), 然后求伴随矩阵的特征值, 这些特征值就是原多项式的所有根。理论已经证明: 这种多项式求根的现代数值计算方法其计算可靠性和精度都高于经典方法。

在矩阵理论中, 多项式

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n \quad (2.2.5)$$

的伴随矩阵为

$$A = \begin{vmatrix} -\frac{a_1}{a_0} & -\frac{a_2}{a_0} & \cdots & -\frac{a_{n-1}}{a_0} & -\frac{a_n}{a_0} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (2.2.6)$$

该矩阵为一典型的上 Hessenberg 矩阵, 可以比较方便地对其作 QR 分解, 得到矩阵的特征值, 这些特征值就构成了 $f(x)=0$ 的所有根。

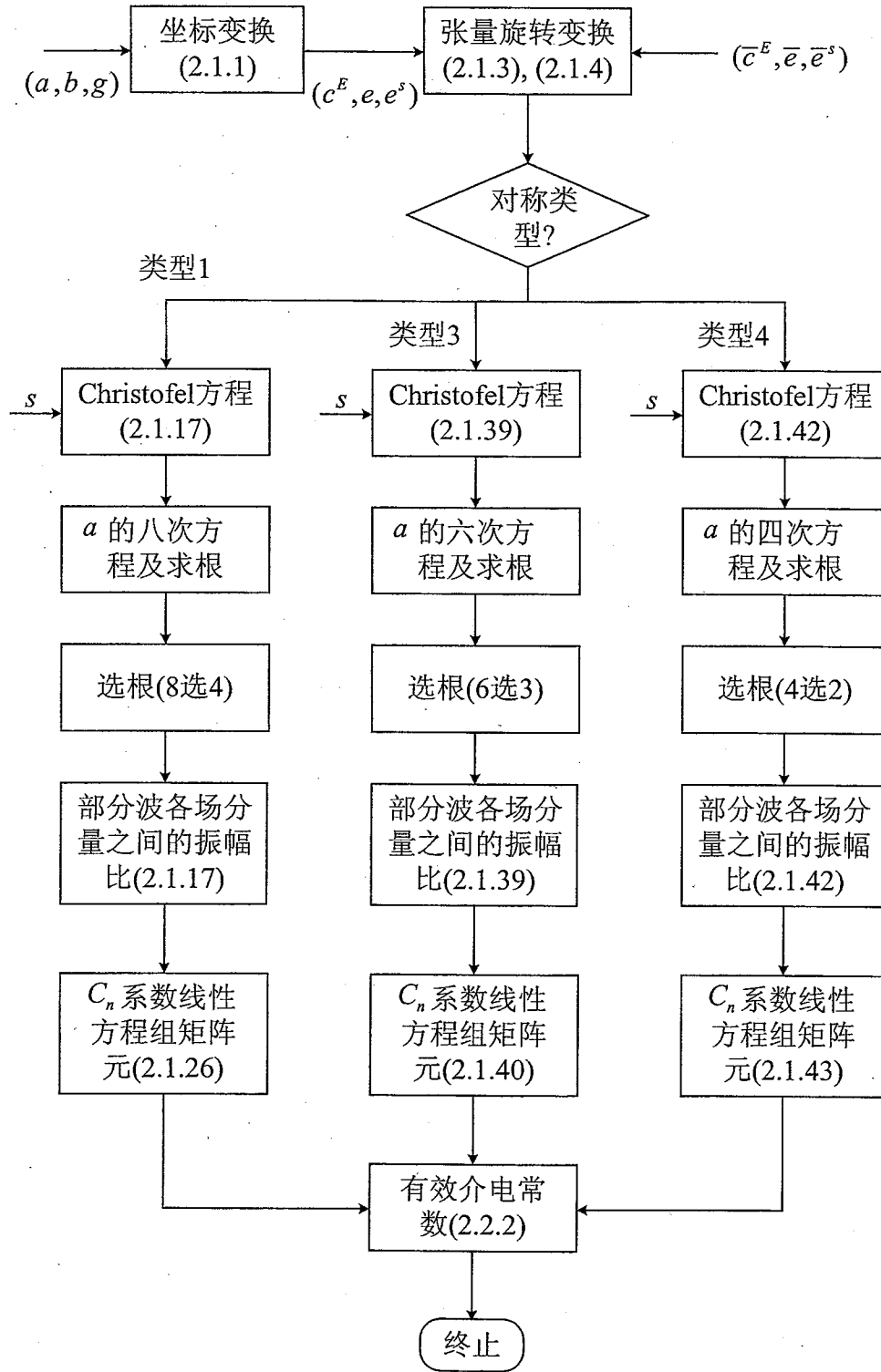


图 2.8 表面有效介电常数的计算流程图

§ 2.2.3 表面有效介电常数曲线的特性

这里以 AT 石英和 64° 旋转 Y 切割 X 传播 LiNbO_3 两种晶体材料举例分别说明一般 Rayleigh 波和漏波表面有效介电常数曲线的相关特性, Euler 角为 $(0^\circ, 125.5^\circ, 0^\circ)$ 的 AT 石英只存在一般的 Rayleigh 波, 64° YX- LiNbO_3 既有一般的 Rayleigh 波, 同时还还存在漏表面波。

对于 AT 石英和 64° YX- LiNbO_3 材料的 $\varepsilon_s(s)$ 曲线, 计算中慢度 s 均为实数, 所涉及到的选根原则均采用典型 Rayleigh 表面波的选根原则。典型的 $\varepsilon_s(s)$ 曲线如图 2.9 所示, 是 AT 石英材料的 $\varepsilon_s(s)$ 曲线, 由图中可看出 $\varepsilon_s(s)$ 曲线有若干不连续点, 分别代表各种声波模式出现的点。

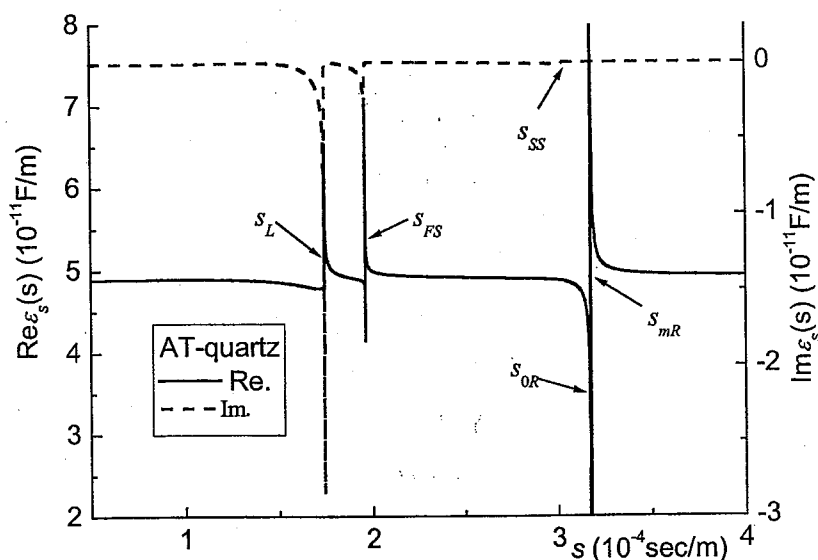


图 2.9 AT 石英($0^\circ, -54.7^\circ, 0^\circ$)晶体表面有效介电常数与慢度的关系, 其中实线为实部, 虚线为虚部。

当速度较低时, 对应声波模式是 Rayleigh 波, 无能量的损耗, 因而 $\varepsilon_s(s)$ 无虚部。此时对应的八个根 α_n 均为复数, 构成声波解的四个部分波在深度方向都存在衰减。在这一区域存在一对零、极点, 极点 s_{mR} 处 $|\varepsilon_s(s_{mR})| \rightarrow \infty$, 对应电荷分布有限而表面电势为零的金属化表面情况, 代表了金属化表面自由传播的无衰减 Rayleigh 波; 零点 s_{0R} 处 $\varepsilon_s(s_{0R}) = 0$, 对应表面电势有限而电荷分布为零的自由化表面情况, 代表了自由化表面传播的无衰减 Rayleigh 波。一般情况下, Rayleigh 波求解过程就是搜索这对零极点。

当速度增加超过 s_{SS} 时 ($s < s_{SS}$), 四对根中对应准慢剪切波 (垂直剪切波,

Shear-vertical Waves, SV 波) 的一对变为纯实根, 相应地选出的四个根中有一个代表了向材料体内传播的体波, 因此 $\varepsilon_s(s)$ 出现代表能量损耗的负虚部。由于 $s < s_{SS}$ 时准慢剪切波模式不再出现, 故 s_{SS} 代表了准慢剪切波模式的截止慢度。类似地, 当速度继续增加超过准快剪切波 (水平剪切波, Shear-Vertical Waves, SH 波) 模式的截止慢度 s_{FS} 时, 即 $s < s_{FS}$, 四对根中对应准快剪切波的一对也变为纯实根, 这样八个根中有四个根变为纯实根; 当速度超过准纵波模式的截止慢度时, $s < s_L$, 四对根中对应准纵波的一对根也变为纯实根, 八个根中有六个根为纯实根。这三个不连续点 s_{SS} 、 s_{FS} 和 s_L 在某些文献中又被称为分支点(Branch points)^[60, 61, 79]。

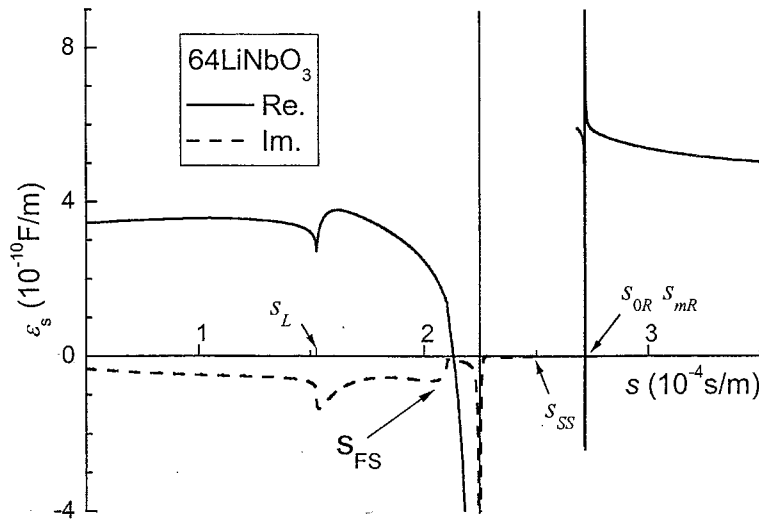


图 2.10(a) 64° YX-LiNbO₃ 晶体表面有效介电常数与慢度的关系, 其中实线为实部, 虚线为虚部。

从 $\varepsilon_s(s)$ 曲线的不连续情况可以直接判断出各声波模式是否与电场耦合, AT 石英($0^\circ, -54.7^\circ, 0^\circ$)晶体的三个不连续点 s_{SS} 、 s_{FS} 和 s_L 分别表示它的三个体声波——准慢剪切波、准快剪切波和准纵波与电势耦合。假如某个体声波和电势解耦, 则在 $\varepsilon_s(s)$ 曲线上相应的不连续点将不出现, 如 YZ-LiNbO₃ 晶体的准快剪切波和电势解耦, 而准慢剪切波和准纵波与电势耦合, 所以它的 $\varepsilon_s(s)$ 曲线上不出现不连续点 s_{FS} , 只有两个不连续点 s_{SS} 和 s_L (见本文 § 2.3.1 的 YZ-LiNbO₃ 晶体的 $\varepsilon_s(s)$ 曲线)。

另外, 有效介电常数 $\varepsilon_s(s)$ 曲线对于 Rayleigh 波能反映出边界条件是自由化表面还是金属化表面, 也就是曲线的零点代表自由化表面, 极点代表金属化表面。

但不连续点 s_{SS} 、 s_{FS} 和 s_L 分别是三个体声波的截止慢度，由于体内辐射与界面无关，因此从三个不连续点 s_{SS} 、 s_{FS} 和 s_L 上不能确定界面是自由表面还是金属化表面。

晶体 64° YX-LiNbO₃ 是常用的漏表面波材料切向。图 2.10(a) 是其有效介电常数 $\epsilon_s(s)$ 曲线，类似于图 2.9， $e_s(s)$ 曲线上包含三个代表体波模式截止慢度的分支点，一对表征 Rayleigh 表面波传播的零极点，但与图 2.9 不同的是在 $s_{SS} < s < s_{FS}$ 区间出现两个表征漏表面波解的特征点。我们知道，漏表面波的四个部分波模式中，三个部分波随深度的增长迅速衰减，另外一个则随深度缓慢增长，这样漏波

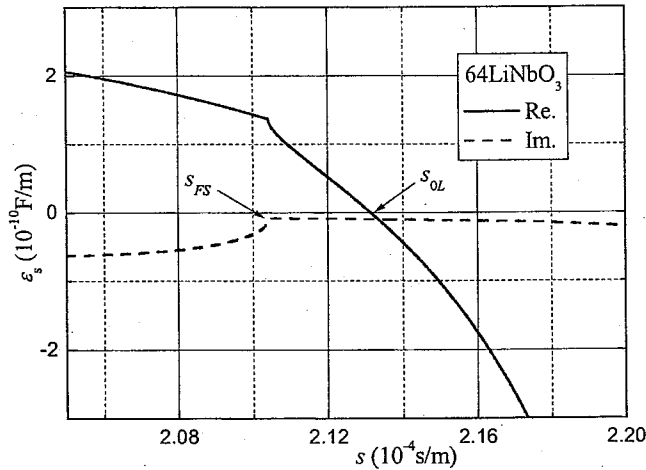


图 2.10(b) 64° YX-LiNbO₃ 晶体的 $\epsilon_s(s)$ 曲线在漏波零点附近与慢度的关系，其中实线为实部，虚线为虚部。

的能量仍主要集中在表面附近传播，同时向材料体内有少量的体波能量辐射。这样自由表面和金属化表面的漏波解所对应的慢度实际上应为复数，其实部直接对应传播相速，虚部对应传播衰减，相应地在 $e_s(s)$ 曲线上对应零极点偏离实轴。

在实慢度 $e_s(s)$ 曲线上无零极点存在，但在对应复零极点附近的实轴上 $e_s(s)$ 有较大的起伏变化，图 2.10(b) 给出了在零点附近 $e_s(s)$ 的变化，可以看到 $e_s(s)$ 的实部和虚部无法同时为零，图 2.10(c) 给出了在极点附近 $e_s(s)$ 的变化，可以看到 $e_s(s)$ 的实部和虚部均有极大的幅度，但不是无限。

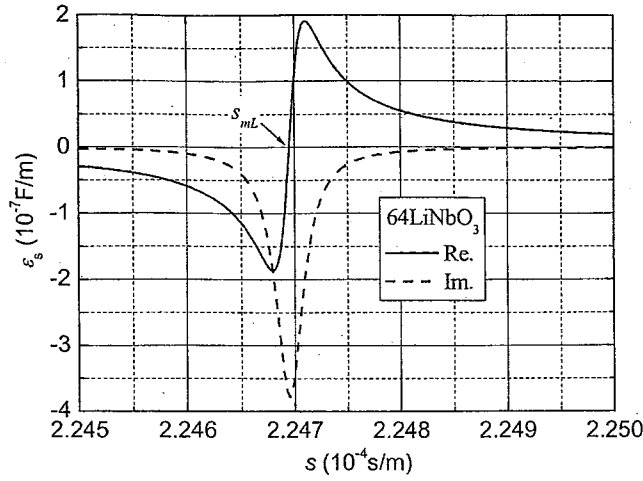


图 2.10(c) 64° YX-LiNbO₃ 晶体的 $\varepsilon_s(s)$ 曲线在漏波极点附近与慢度的关系，其中实线为实部，虚线为虚部。

从以上分析可以看出， $e_s(s)$ 曲线包含了所有声波模式的全部信息。在下节我们将从 $e_s(s)$ 曲线在零极点附近的变化趋势来提取 SAW 器件常用晶体表面波模式的特征参数。

§ 2.3 SAW 器件常用晶体声表面波模式的特征参数

在 § 2.2.2 中，我们分析了表面有效介电常数曲线的性质。以此为根据可以提取声表面波传播模式的主要物理参量，也就是声表面波在晶体中的传播速度和衰减常数。

自由表面和金属化表面传播相速度是半无限空间声表面波模式的两个重要参数。如上节所述，Rayleigh 波传播速度应满足 $V_R < 1/s_{SS}$ ，而漏波速度满足 $1/s_{SS} < V_L < 1/s_{FS}$ ，漏纵波满足 $1/s_{FS} < V_{LL} < 1/s_L$ ，这一特性直接为自由表面和金属化声表面波模式速度搜索提供了搜索范围。 $\varepsilon_s(s)$ 曲线零点对应自由表面 Rayleigh 波传播的慢度，极点对应金属化表面 Rayleigh 波传播的慢度，因此搜索 $\varepsilon_s(s)$ 曲线的实零极点即可得到两个 Rayleigh 波传播相速度。这种方法一直被广泛采用。Rayleigh 波传播在传输过程中无衰减，所以它的衰减系数始终为零。

对于漏波和漏纵波，如上所述，由于传播损耗的存在，对应的 $e_s(s)$ 零极点偏离实轴，为一复数 $s = s' + js''$ ，一般情况下漏波的求解需要同时对传播速度和传播衰减在复慢度平面 $e_s(s)$ 曲线上进行二维优化搜索，这需要单独考虑两种情

况下的选根原则，其具体办法在 § 2.1.4 节已作了详细讨论，这里不再重复。漏波的衰减系数由(2.1.19)式给出。

$$\alpha = -\frac{40\pi}{\ln 10} \frac{s^i}{s^r} \approx -54.575 \frac{s^i}{s^r} \text{ dB}/\lambda \quad (2.1.19)$$

采用上述算法，我们计算了 SAW 器件常用晶体中 Rayleigh 波和漏波，给出声表面波模式的速度和衰减系数，其中 LiNbO_3 和 LiTaO_3 的材料常数取自文献[83]，其它晶体材料常数取自文献[80-83]。对于每种晶体我们都画出相应的有效介电常数 $\varepsilon_s(s)$ 曲线、并对晶体的主要性质作简要叙述。

§ 2.3.1 铌酸锂

铌酸锂是铁电体，晶体对称性为三角 $3m$ ，用提拉法生长。铌酸锂除了介电常数和压电效应很大外，还有很强的热电效应和光电效应。它不仅用于 SAW 器件，还用于光学器件和微波传感器件等器件中。由于压电性很强，材料的机电耦合系数 K^2 和速度温度系数(Temperature Coefficient of Velocity) TCV 等特性对电学边界条件十分敏感^[84]。

(1)、YZ- LiNbO_3

YZ- LiNbO_3 是一种很常用的声表面波材料，其 Euler 角为 $(0^\circ, 90^\circ, 90^\circ)$ ，在这个切向上 Christoffel 矩阵为

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & 0 & \Gamma_{13} & \Gamma_{14} \\ 0 & \Gamma_{22} & 0 & 0 \\ \Gamma_{13} & 0 & \Gamma_{33} & \Gamma_{34} \\ \Gamma_{14} & 0 & \Gamma_{34} & \Gamma_{44} \end{bmatrix} \quad (2.3.1)$$

由 Christoffel 矩阵可以看出快剪切波模式和电势分了解耦，为纯力学 SH 波模式，而准纵波和准慢剪切波与电势分量耦合。所以它的 $\varepsilon_s(s)$ 曲线上没有不连续点 s_{FS} ，只有两个不连续点 s_{SS} 和 s_L ，见图 2.11。因此 YZ- LiNbO_3 中只有 Rayleigh 波模式，不存在漏波。对应自由边界条件的 Rayleigh 波 $V_{OR}=3487.35 \text{ m/s}$ ，金属化表面的 Rayleigh 波 $V_{mR}=3410.64 \text{ m/s}$ ，

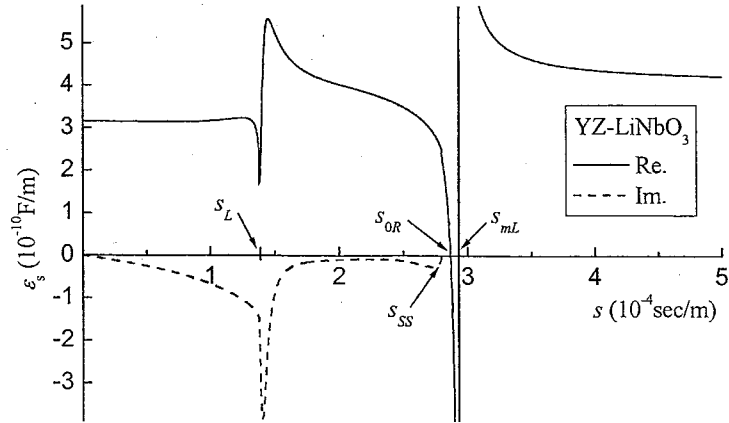


图 2.11 YZ-LiNbO₃ 晶体表面有效介电常数与慢度的关系，其中实线为实部，虚线为虚部。

(2)、128° YX-LiNbO₃

到目前为止, Rayleigh 波机电耦合系数最高的单晶材料是 127.86° 旋转 Y 切割 X 传播铌酸锂, 其 Euler 角为 (0°, 37.86°, 0°), 机电耦合系数 K^2 值约为 5.8%。对于 128° YX-LiNbO₃, SSBW 辐射被反常抑制, 这是因为慢剪切分量随压电性减少了一半, 所以 128° YX-LiNbO₃ 得到了广泛的应用。

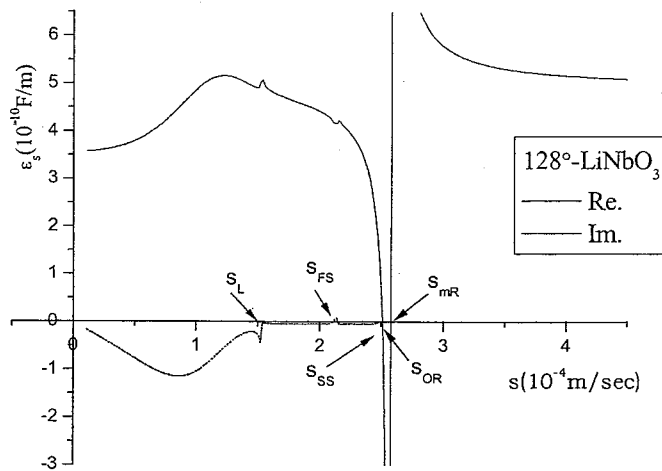


图 2.12 128° YX-LiNbO₃ 晶体表面有效介电常数与慢度的关系，其中实线为实部，虚线为虚部。

128° YX-LiNbO₃ 的 Christoffel 矩阵为

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} & \Gamma_{14} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} & \Gamma_{24} \\ \Gamma_{13} & \Gamma_{23} & \Gamma_{33} & \Gamma_{34} \\ \Gamma_{14} & \Gamma_{24} & \Gamma_{34} & \Gamma_{44} \end{bmatrix} \quad (2.3.2)$$

准纵波、准慢剪切波和准快剪切波都与电势分量耦合。所以它的 $\varepsilon_s(s)$ 曲线出现三个不连续点 s_{SS} 、 s_{FS} 和 s_L ，如图 2.12。晶体中只有 Rayleigh 波模式。对应自由边界条件的 Rayleigh 波 $V_{OR}=3980.89 \text{ m/s}$ ，金属化表面的 Rayleigh 波 $V_{mR}=3869.97 \text{ m/s}$ 。

(3)、64° YX-LiNbO₃

64° 旋转 Y 切割 X 传播 LiNbO₃ 的 Euler 角为 (0°, -26°, 0°)，Christoffel 矩阵如 (2.3.2) 式， $\varepsilon_s(s)$ 曲线如图 2.10(a,b,c)。和 128° YX-LiNbO₃ 一样，三个机械分波都与电势分量耦合， $\varepsilon_s(s)$ 曲线有三个不连续点。不同的是在 $s_{SS} < s < s_{FS}$ 区间出现两个表征漏表面波解的特征点。64° YX-LiNbO₃ 不仅有一般的 Rayleigh 波还有漏波。自由边界上漏波 $V_{OL}=4692.63 \text{ m/s}$ ，衰减系数 $\alpha_o = 5.223 e^{-2}$ ；金属化表面漏波 $V_{mL}=4451.37 \text{ m/s}$ ，衰减系数 $\alpha_m = 3.738 e^{-3}$ 。漏波的速度比一般 Rayleigh 波的高，64° YX-LiNbO₃ 已广泛用于移动通信 SAW 器件中。另外，该材料金属表面上的传播损耗几乎为零。

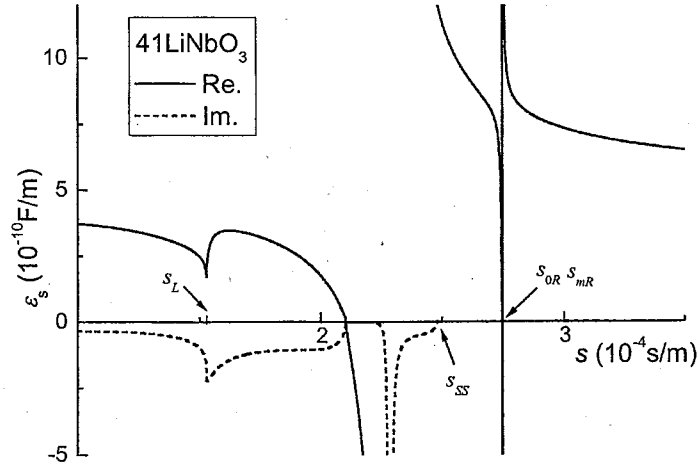


图 2.13(a) 41° -LiNbO₃ 晶体表面有效介电常数与慢度的关系，其中实线为实部，虚线为虚部。

(4)、41° YX-LiNbO₃

41° YX-LiNbO₃ 晶体特性和 64° YX-LiNbO₃ 相似, 其 Christoffel 矩阵和 64° YX-LiNbO₃ 的相同, 晶体中同时有 Rayleigh 波和漏波两种模式。在 SAW 器件中主要用其漏波模式。自由表面漏波 $V_{OL}=4752.85\text{ m/s}$, 衰减系数 $\alpha_o=2.420e^{-4}$; 金属化表面漏波 $V_{mL}=4378.28\text{ m/s}$, 衰减系数 $\alpha_m=1.420e^{-2}$ 。Euler 角为 $(0^\circ, -49^\circ, 0^\circ)$ 。有文献报道这种晶体有最大的机电耦合系数, 自由表面上的传播损耗几乎为零。 41° YX-LiNbO₃ 有效介电常数 $\varepsilon_s(s)$ 曲线如图 2.13(a)所示, 图 2.13(b) 和图 2.13(c)分别给出了在零极点附近 $\varepsilon_s(s)$ 的变化, 如前所述, 在零点 $e_s(s)$ 的实部和虚部无法同时为零, 极点 $e_s(s)$ 的实部和虚部均有极大的幅度, 但不是无限。

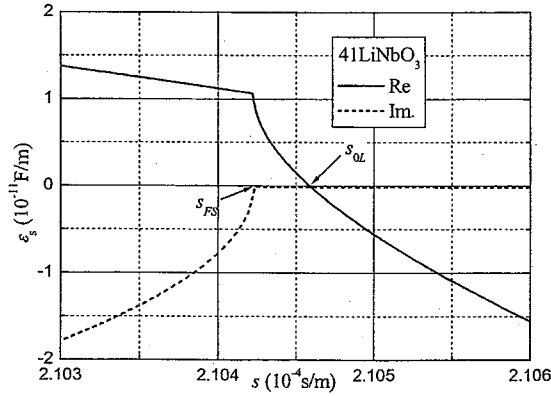


图 2.13(b) 41° YX-LiNbO₃ 晶体的 $\varepsilon_s(s)$ 曲线在漏波零点附近与慢度的关系, 其中实线为实部, 虚线为虚部。

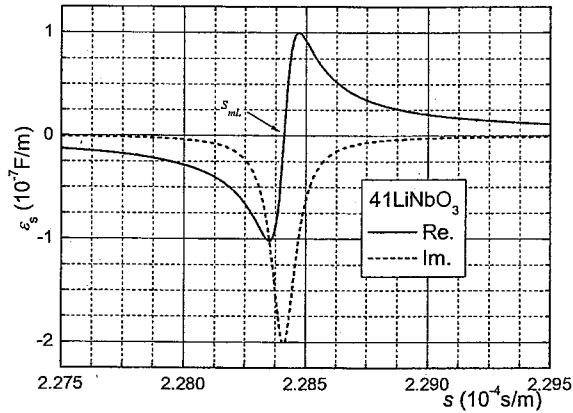


图 2.13(c) 41° YX-LiNbO₃ 晶体的 $\varepsilon_s(s)$ 曲线在漏波极点附近与慢度的关系, 其中实线为实部, 虚线为虚部。

§ 2.3.2 钽酸锂

和铌酸锂一样，钽酸锂也是铁电体，晶体对称性同为三角 $3m$ ，也用提拉法生长。钽酸锂除了介电常数和压电效应很大外，还有很强的热电效应和光电效应。虽然这些值比铌酸锂要小，但他们的温度稳定性很好。 LiTaO_3 广泛用于电视中频滤波器^[84]及其它滤波器中。

在旋转 Y 切向上， LiTaO_3 的各项参数与旋转角的关系和 LiNbO_3 很相似，只是有两点明显不同：①、非漏 SAW 的机电耦合系数很小；②、在所有旋转角都有漏波。另外，对 Y 切 LiTaO_3 Rayleigh 波没有特别令人感兴趣的切向。

(1)、 $X-112^\circ Y \text{LiTaO}_3$

$X-112^\circ Y \text{LiTaO}_3$ 也写为 $X\text{-cut } 112^\circ Y\text{-off } \text{LiTaO}_3$ ， $X-112^\circ Y \text{LiTaO}_3$ 晶体没有波束偏向和有足够的 BAW 寄生响应抑制，它常用作 Rayleigh 波基片。慢剪切 SSBW 的假响应很小，另外，频率温度系数(Temperature Coefficient of Frequency, TCF)也相对较小。对应自由边界条件的 Rayleigh 波 $V_{OR}=3303.06 \text{ m/s}$ ，金属化表面的 Rayleigh 波 $V_{mR}=3284.07 \text{ m/s}$ 。

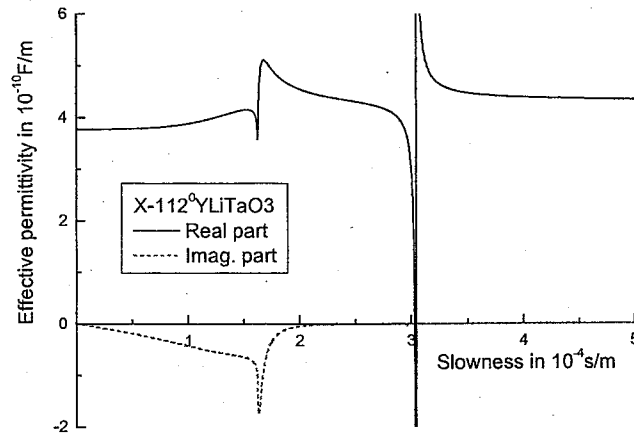


图 2.14 $X\text{-cut } 112^\circ Y\text{-off}(X-112^\circ Y)\text{LiTaO}_3$ 晶体表面有效介电常数与慢度的关系，其中实线为实部，虚线为虚部。

(2)、 $36^\circ YX\text{-LiTaO}_3$

$36^\circ YX\text{-LiTaO}_3$ 机电耦合系数大，传播损耗可以忽略不计。存在漏波模式，这种漏波高压电性切型的 LiTaO_3 基片已广泛用于移动通信中。

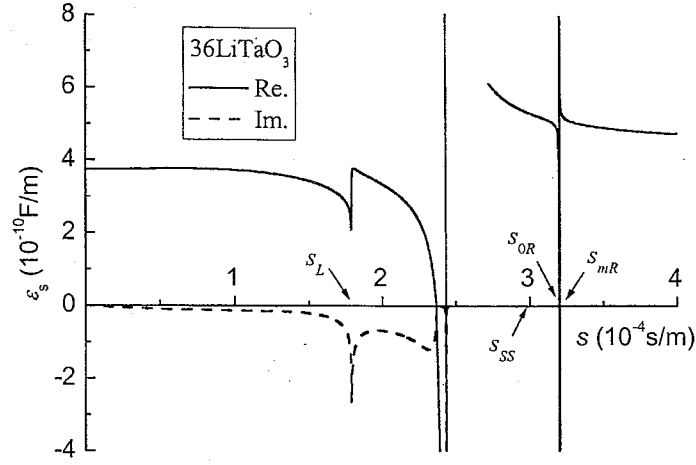


图 2.15(a) 36° YX-LiTaO₃ 晶体表面有效介电常数与慢度的关系，其中实线为实部，虚线为虚部。

其 Christoffel 矩阵如 (2.3.2) 式，自由表面漏波 $V_{OL}=4225.63 \text{ m/s}$ ，衰减系数 $\alpha_o = 2.052 e^{-4}$ ；金属化表面漏波 $V_{mL}=4108.46 \text{ m/s}$ ，衰减系数 $\alpha_m = 2.621 e^{-4}$ 。Euler 角为 $(0^\circ, -54^\circ, 0^\circ)$ 。 36° YX-LiTaO₃ 有效介电常数 $\varepsilon_s(s)$ 曲线如图 2.15(a,b,c) 所示。

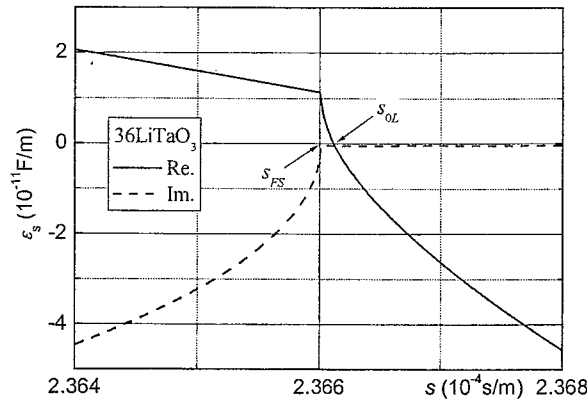


图 2.15(b) 36° YX-LiTaO₃ 晶体的 $\varepsilon_s(s)$ 曲线在漏波零点附近与慢度的关系，其中实线为实部，虚线为虚部。

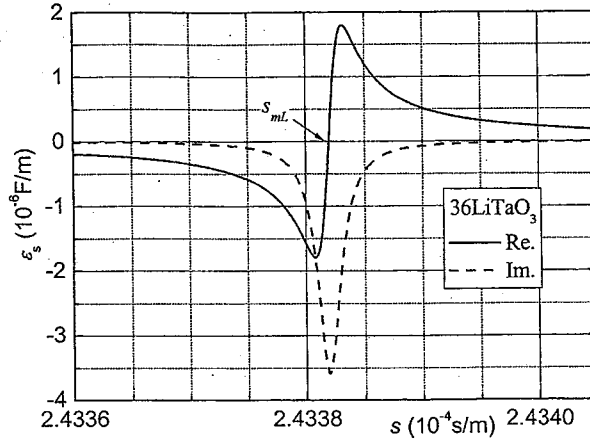


图 2.15(c) 36° YX-LiTaO₃ 晶体的 $\varepsilon_s(s)$ 曲线在漏波极点附近与慢度的关系，其中实线为实部，虚线为虚部。

§ 2.3.3 石英

石英晶体对称性为三角 32，用水热合成法生长 α -石英的技术已经很成熟，是电中性的，介电常数和压电常数都很小，只能用于窄带器件中。正因为 α -石英的压电性很弱，它的波速 V ，机电耦合系数 K^2 和速度温度系数 TCV 等参数极少受电学表面边界的影响。

ST-X 石英是石英单晶经过 Euler 角为 $(0^\circ, \theta+90^\circ, \varphi)$ 的旋转后的取向， $\theta = 42.75^\circ$ ，它是单晶材料中最好的温度稳定材料，可以得到零频率温度系数 (Temperature Coefficient of Frequency TCF)，常用于高稳定性器件中。另一种切向 AT 切 (35.3° YX-) 石英广泛用于高稳定性的体声波 (BAW) 谐振器中^[58,84]。

(1)、AT-X 石英

AT-X 石英的 Euler 角为 $(0^\circ, -54.7^\circ, 0^\circ)$ ^[65-68]，Christoffel 矩阵如 (2.3.2) 式，它的 $\varepsilon_s(s)$ 曲线如图 2.9，只有 Rayleigh 波模式。 $V_{OR} = 3151.10 \text{ m/s}$ ，金属化表面的 Rayleigh 波 $V_{mR} = 3148.12 \text{ m/s}$ ，可见两种边界表面下速度相差很小。

(2)、AT-90° X 石英

AT-90° X 石英的 Euler 角为 $(0^\circ, -54.7^\circ, 90^\circ)$ ，它的 Christoffel 矩阵如 (2.3.3) 式，说明该材料中对应着两种独立的解耦模式：上半对角的非压电模式和下半对

角的压电耦合模式。上半对角的非压电模式是一种纯力学模式，由于石英的机电耦合系数很小，晶体中激励的主要是 SSBW 而不是 BG 波。SSBW 波速

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{13} & 0 & 0 \\ \Gamma_{13} & \Gamma_{33} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \Gamma_{22} & \Gamma_{24} \\ 0 & 0 & \Gamma_{24} & \Gamma_{44} \end{bmatrix} \quad (2.3.3)$$

快，理论计算值是 $V_L = 5094.24 \text{ m/s}$ ，有效介电常数曲线如图 2.16 所示。同时它的 TCF 为零，所以引起了人们的极大关注^[84-86]。不过 SSBW 的传播衰减很大，这严重影响了它的实际应用。

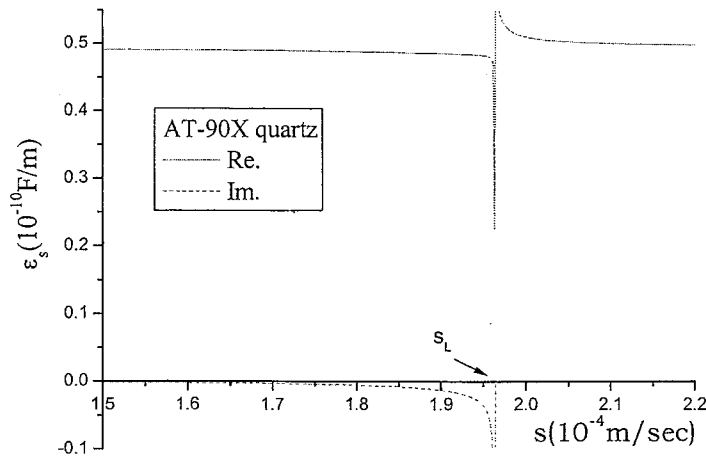


图 2.16 AT-90° X 石英晶体表面有效介电常数与慢度的关系，其中实线为实部，虚线为虚部。

为了克服 SSBW 传播衰减大而带来的问题，现在的做法是把栅阵放在传播表面上，使 SSBW 受到限制(trapped)，栅阵的微扰可以将 SSBW 转化为一个简正模式(Eigenmode)，这个简正模式就是表面横波(Surface Transverse Wave STW)，STW 是波速很大的剪切波而传播损耗又很小，因此可以实现 GHz 频率上的高 Q 值谐振器。

(3)、ST-90° X 石英

ST-90° X 石英的 Euler 角为 $(0^\circ, 132.75^\circ, 90^\circ)$ ^[65-68]，Christoffel 矩阵也是

(2.3.3) 式, SH 型表面波速 $V_L = 4991.27 \text{ m/s}$, 它的有效介电常数曲线如图 2.17 所示。

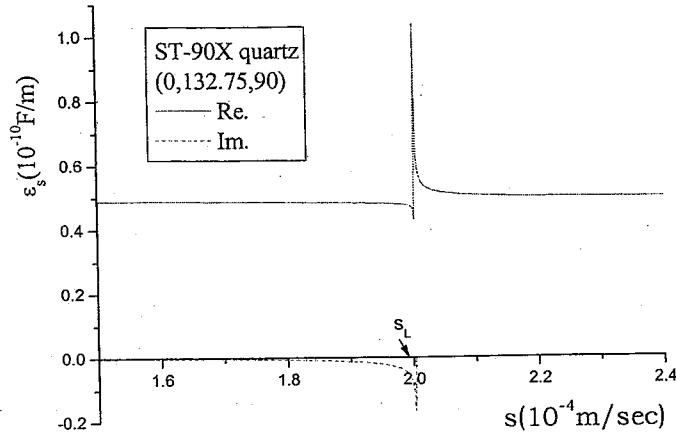


图 2.17 ST-90° X (0°, 132.75°, 90°) 石英晶体表面有效介电常数与慢度的关系, 其中实线为实部, 虚线为虚部。

另一种 ST-90° X 石英的 Euler 角为 (0°, 128°, 90°) ^[51,52], 表面漏波 $V_L = 5067.14 \text{ m/s}$, Christoffel 矩阵如 (2.3.3) 式。M. Kadota^[51]报道了在这个材料基底上镀一层重金属栅条 (如金、钨等) 时, 晶体中的声表面波仅有 SH 成分且无传输衰减, 这种 SH 型表面波有较大的机电耦合系数 ($k^2 = 0.28 - 0.34 \%$)

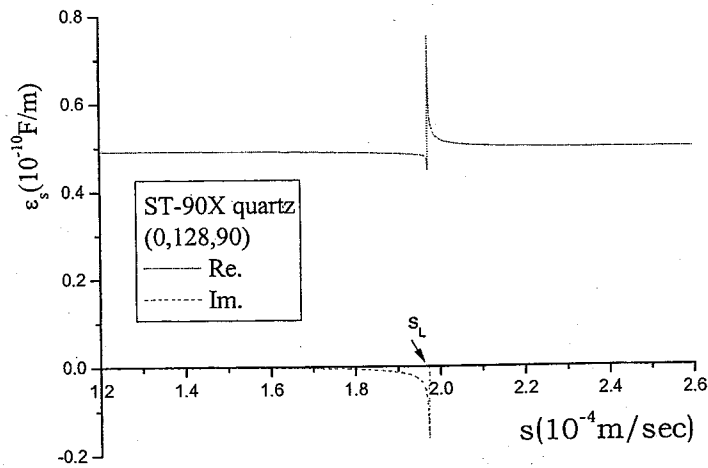


图 2.18 ST-90° X (0°, 128°, 90°) 石英晶体表面有效介电常数与慢度的关系, 其中实线为实部, 虚线为虚部。

和很大的反射系数,在指条厚度很大时,重金属栅条的反射系数是铝指条的30~35倍。M. Kadota 利用晶体这些优异特性制作了中心频率在 200~400 MHz 全球移动通信系统(Global System for Mobil Communication GSM)中频(intermediate frequency IF)滤波器,该滤波器除了有非常好的温度特性外,更重要的是体积小($3 \times 3 \text{ mm}^2$),满足了移动通信中小型化要求。

§ 2.3.4 四硼酸锂 ($\text{Li}_2\text{B}_4\text{O}_7$) ($0^\circ, 47.3^\circ, 90^\circ$)

四硼酸锂是电中性晶体,但它有较大的压电常数和零 YCF, 可用于谐振器。 $\text{Li}_2\text{B}_4\text{O}_7$ 属于 $4mm$ 点群, Christoffel 矩阵和 YZ- LiNbO_3 相同为 (2.3.1)式。

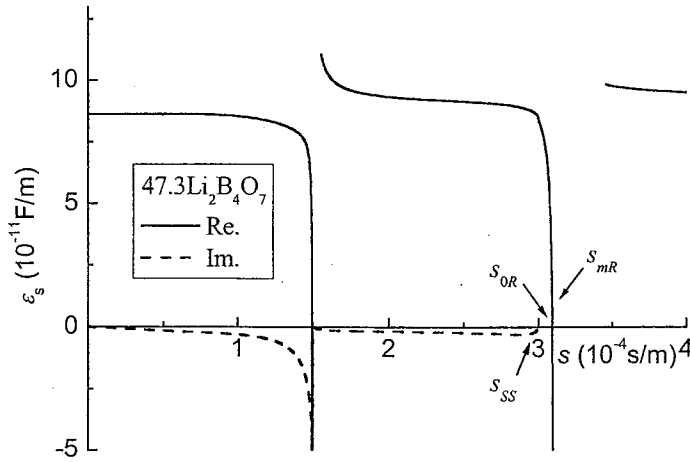


图 2.19(a) 四硼酸锂晶体表面有效介电常数与慢度的关系, 其中实线为实部, 虚线为虚部。

这种晶体材料常用极大的各向异性, 图 2.19 给出了 $(0^\circ, 47.3^\circ, 90^\circ)\text{Li}_2\text{B}_4\text{O}_7$ 的有效介电常数, 除了有一个 Rayleigh 波 (Rayleigh 波 $V_{OR}=3222.69 \text{ m/s}$, 金属化表面的 Rayleigh 波 $V_{mR}=3208.73 \text{ m/s}$,) 激励外, 在有一个漏 SAW 激发 (自由边界上漏波 $V_{OL}=6911.988 \text{ m/s}$, $\alpha_o = 6.663 e^{-4}$; 金属化表面漏波 $V_{mL}=6864.09 \text{ m/s}$, $\alpha_m = 1.320 e^{-2}$) 的峰值。这种情况下, SH 分量从其它分量中分离出来, 漏 SAW 和 Rayleigh 波都是 L 和 SV 分量组成的。各分量的相互耦合也很小, Rayleigh 波是 SV 型 SAW, 而漏 SAW 是 L 型 SAW, 因此这个漏 SAW 称为纵向漏 SAW(Longitudinal-type leaky SAW)

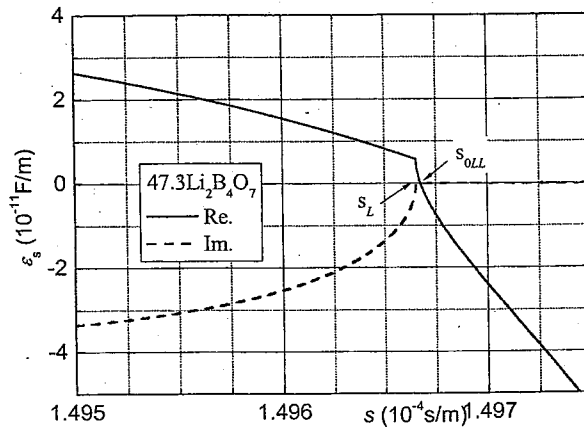


图 2.19(b) 四硼酸锂晶体的 $\varepsilon_s(s)$ 曲线在漏波零点附近与慢度的关系，其中实线为实部，虚线为虚部。

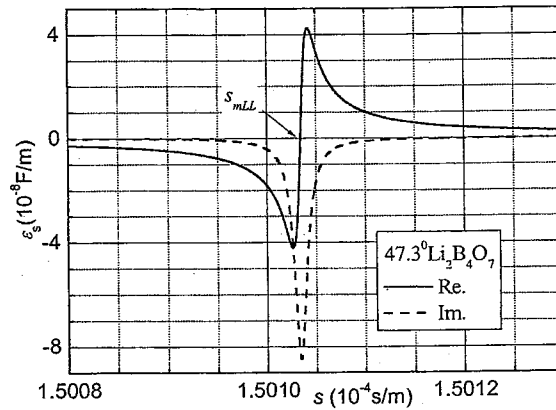


图 2.19(c) 四硼酸锂晶体的 $\varepsilon_s(s)$ 曲线在漏波极点附近与慢度的关系，其中实线为实部，虚线为虚部。

§ 2.3.5 小结

基片材料是影响 SAW 器件性能的一个决定因素。SAW 器件常用的是压电材料基片，它有固有的各向异性，因此器件特性不仅与切向有关，而且与 SAW 的传播方向有关。压电介质中的声表面波存在三个方向的质点位移分量，并且在一般情况下，这些质点位移分量既不与波的传播方向平行，也不与波的传播方向垂直，但是他们彼此却一定是相互垂直的。压电介质中声表面波的速度是传播方向的函数，并且波的相速和能量传播速度在不同方向上，只是在某些特殊的方向上两者才同向，这些方向称为纯模方向。由于介质的压电性使介质变硬，从而使表

面波的相速变大。在压电介质中，表面波的速度不仅依赖于介质的弹性性质，而且还依赖于介质的压电性质和介电特性。现将 SAW 器件常用晶体的材料参数及声表面波模式主要物理量列表如下：

表 2.2 SAW 器件常用晶体声表面波模式的特征参数

晶体 (对称性)	切向	Euler 角	声表面波 模式	Christoffel 矩阵	波速(m/s) free surface
铌酸锂 (三角 3m)	Y-Z	$(0^\circ, 90^\circ, 90^\circ)$	Rayleigh 波	Type-3	3487.35
	128° YX	$(0^\circ, 37.86^\circ, 0^\circ)$	Rayleigh 波	Type-1	3980.89
	64° YX	$(0^\circ, -26^\circ, 0^\circ)$	漏波	Type-1	4692.63
	41° YX	$(0^\circ, -49^\circ, 0^\circ)$	漏波	Type-1	4752.85
钽酸锂 (三角 3m)	X-112° Y		Rayleigh 波		3303.06
	36° YX	$(0^\circ, -54^\circ, 0^\circ)$	漏波	Type-1	4225.63
石英 (三角 32)	AT-X	$(0^\circ, -54.7^\circ, 0^\circ)$	Rayleigh 波	Type-1	3151.10
	AT-90° X	$(0^\circ, -54.7^\circ, 90^\circ)$	SSBW	Type-4	5094.24
	ST-90° X	$(0^\circ, 132.75^\circ, 90^\circ)$		Type-4	4991.27
		$(0^\circ, 128^\circ, 90^\circ)$	SH	Type-4	5067.14
四硼酸锂 (4mm)		$(0^\circ, 47.3^\circ, 90^\circ)$	漏波	Type-3	6911.99

本章小结

这一章是本文的基础理论部分，我们从耦合波动方程出发讨论了半无限空间声表面波传播特性，详细阐明了表面有效介电常数在半无限空间声表面波特性分析中的作用，即表面有效介电常数包含所有可能声表面波模式的全部信息，对常用 SAW 器件晶体材料作了具体分析，这为我们以后各章声表面波在栅阵中传播特性的变分原理分析与研究奠定了理论基础。在这一章里，我们要注意以下几点：

- (1)、 Rayleigh 波是普遍存在的，漏（表面）波只有在某些晶体的特定切向上才存在。
- (2)、 无论是 Rayleigh 波还是漏（表面）波都满足介质表面边界条件，即一个力学边界条件和两个电学边界条件。

- (3)、Rayleigh 波和漏（表面）波都有 $\Delta V/V$ 效应，也就是自由表面和金属化表面的速度不同。
- (4)、Rayleigh 波传播速度满足 $V_R < 1/s_{ss}$ ，而漏波速度满足 $1/s_{ss} < V_L < 1/s_{fs}$ ，漏纵波满足 $1/s_{fs} < V_{LL} < 1/s_L$ ，这一特性直接为自由表面和金属化声表面波模式速度搜索提供了搜索范围。
- (5)、Rayleigh 波有效介电常数曲线零点对应自由表面传播的慢度，极点对应金属化表面的慢度，Rayleigh 波传播在传输过程中无衰减，所以它的衰减系数始终为零。
- (6)、对于漏波和漏纵波，由于传播损耗的存在，对应的 $e_s(s)$ 零极点偏离实轴，慢度是一复数。
- (7)、不同的晶体或同一个晶体不同切向上存在的声表面波模式往往不同。波速 V ，衰减系数 α ，机电耦合系数 K^2 ，速度温度系数 TCV 等材料的物理参数也有很大的差异，并受边界条件（如自由表面、金属表面、指条的材料与形状）的影响。

第三章 压电晶体基片短路栅反射系数的变分原理研究

引言

EerNisse^[87]首先将变分方法用于压电器件分析, 随后 Sinha 和 Tiersten^[88]用变分方法分析金属栅条声表面波反射特性的研究, 但是, 他们的分析没有利用耦合模公式, 因此没有得到金属栅条反射系数的具体表达式。

1985 年陈东培和 H. A. Haus^[14]从波动方程出发, 导出声表面波在栅阵结构中的变分表达式, 并将此变分表达式与耦合模方程结合起来, 得到仅与晶体材料参数有关的反射系数表达式。包含压电短路效应与力学负载效应。然后, 在假设晶体是各向同性的近似情况下, 计算出几种常用晶体的反射系数(reflection coefficient)。该方法的主要优点是绕开复杂的格林函数, 不必满足所求问题的精确边界条件, 尝试解中相对大的误差在所求的量中引起较小的误差。此后何世堂^[36, 43, 89]将此方法推广到各向异性晶体, 在不考虑晶体的压电性近似情况下, 得出反射系数是一个复数, 并获得了实验验证。进而由该理论出发, 提出了单指无内反射滤波器理论, 使得在相同工艺条件下可将器件工作频率提高一倍, 并已运用到实际器件中。

但是, 陈东培和 H. A. Haus 以及何世堂的理论结果是在假设晶体是各向同性或不考虑晶体压电性下得出的, 而实际声表面波器件所用晶体是各向异性的压电晶体, 各向同性和向异性的弹性常数是不同的。同时, 由于压电性声波在压电晶体中传播会产生伴随电势, 这个伴随电势会与声波发生耦合, 且这种耦合在不同晶体中表现是不一样的, 即使在同一个晶体中也会随着晶体的切向不同而不同。这些现象都会使声波在三个方向的振动位移发生改变。根据陈东培、H. A. Haus 和何世堂由变分原理得到的理论公式, 当振动位移发生改变时反射系数也要发生变化。为此, 我们将他们的工作推广到压电晶体, 在压电晶体中用该理论方法计算栅条的反射系数。

另外, 无论是文献^[14]在各向同性晶体中还是文献^[36]在各向异性晶体中都只给出了立方 $m3m$ (如金、铝、银等) 金属栅条的反射系数计算公式, 而没给出四方 $4/mmm$, 六角 $6/mmm$ (如钽、钛) 金属栅条和三角 $3m$ (如 $LiNbO_3$ 、 $LiTaO_3$ 、石英) 沟槽等反射系数计算公式, 他们都用立方 $m3m$ (如金、铝、银等) 金属栅条的反射系数计算公式去计算三角 $3m$ (如 $LiNbO_3$ 、 $LiTaO_3$ 、石英) 沟槽等不同晶体对称类的栅条反射系数。本文详细推导了不同晶体对称类的栅条反射系数的理论计算公式。根据理论分析计算了常用 SAW 器件晶体基片上的金、银、铝、铬等短路反射栅和沟槽反射栅 Rayleigh 波的反射系数。

由于我们考虑了晶体的压电性和不同金属栅条的晶体对称性, 我们的理论分析更接近实际情况, 应而我们有理由相信我们给出的栅条反射系数理论计算值更精确。

§ 3.1 压电晶体的变分原理

声表面器件的理论分析是非常繁杂的, 必须同时求解 Newton 运动方程和 Maxwell 方程, 结果得到的是一个满足电学边界条件和力学边界条件的二阶非齐

次线性偏微分方程, 为此, 学者们建立了多种 Green 函数去解这个微分方程, 代表性的有 Milsom 的一维 Green 函数, 汪承灏的广义 Green 函数, Pleesky 的周期 Green 函数和 Hashimoto 提出的离散 Green 函数, 他们的工作为 SAW 器件理论发展作出了巨大贡献。与此同时, Sinha, H. A. Haus 和陈东培等人另辟蹊径, 采用变分方法对声表面器件进行理论分析并获得了成功。

§ 3.1.1 变分原理的定义

讨论一个连续介质的“变分原理”首先要建立一个标量泛函(也称变分表达式) Π , 它由积分形式确定

$$\Pi = \int_{\Omega} \mathbf{F}\left(\mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}, \dots\right) d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{E}\left(\mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}, \dots\right) d\Gamma$$

其中 $\mathbf{u}$ 是未知函数, $\mathbf{F}$ 和 $\mathbf{E}$ 是特定的算子, Ω 是求解域, Γ 是 Ω 的边界。 Π 称为未知函数 $\mathbf{u}$ 的泛函, 随函数 $\mathbf{u}$ 的变化而变化。连续介质问题的解 $\mathbf{u}$ 使泛函 Π 对于微小的变化 $\delta \mathbf{u}$ 取驻值, 即泛函的“变分”等于零

$$\delta \Pi = 0$$

这种求得连续介质问题解答的方法称为变分原理或变分方法。

§ 3.1.2 压电晶体的变分表达式

我们研究压电晶体中的声表面波, 除了要考虑声波在各向异性晶体中传播时所有因素外, 要考虑晶体压电性带来的影响, 另外还要考虑指条对声波的“扰动”, 这个扰动一是因为与声波一起传播的电场在金属区域被短路引起的, 二是栅条本身的质量改变了基底的力学边界条件而引起的。我们首先看弹性介质的运动方程

$$-\omega^2 \rho u_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(c_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) + e_{ijk} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right] \quad (3.1.1)$$

这里 c_{ijkl} 是弹性常数, e_{ijk} 是压电常数, u_i 是声波的振动位移, ϕ 是准静态电势, 在压电晶体中, 电位移矢量由压电方程表示为

$$D_i = e_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \varepsilon_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \quad (3.1.2)$$

式中 ε_{ij} 是介电常数, 用 $\partial \phi^* / \partial x_i$ 乘以 (3.1.2) 式并对整个空间积分得

$$\int \frac{\partial \phi^*}{\partial x_i} D_i dV = \int dV \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial x_i} e_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{\partial \phi^*}{\partial x_i} \varepsilon_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) \quad (3.1.3)$$

(3.1.3) 式的左边

$$\int \frac{\partial \phi^*}{\partial x_i} D_i dV = \int \frac{\partial}{\partial x_i} (\phi^* D_i) dV - \int \phi^* \frac{\partial}{\partial x_i} D_i dV \quad (3.1.4)$$

(3.1.4) 式右边第一项为零, 因为 D_i 和 ϕ 在无穷远处为零而在周期边界两端相互抵消, 另外在压电晶体中 $(\partial/\partial x_i)D_i = 0$, 在金属栅上 $\phi = 0$, 所以 (3.1.4) 式右边第二项也为零。我们将 (3.1.1) 式乘以 u_i^* 并对整个空间积分再与 (3.1.3) 式相加得

$$\begin{aligned} \omega^2 \int dV \rho u_i^* u_i = \int dV & \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} c_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} e_{ijk} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right. \\ & \left. + \frac{\partial \phi^*}{\partial x_i} e_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{\partial \phi^*}{\partial x_i} \epsilon_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

对于短路金属栅 (3.1.5) 式具有变分特性, 也就是说 (3.1.5) 式是压电基片上短路金属栅的变分表达式。下面我们根据变分原理来具体说明 (3.15) 式具有变分特性。

§ 3.1.3 变分表达式的变分特性

取位移 u_i 和电势 ϕ 的试解为

$$u_i = u_i^0 + \delta u_i \quad (3.1.6)$$

$$\phi = \phi^0 + \delta \phi \quad (3.1.7)$$

用上标“0”表示未扰动时的解, 我们要确定在什么条件下, 一阶近似时微小的变化 δu_i 和 $\delta \phi$ 对 (3.1.5) 式的贡献为零, 即泛函的“变分”等于零。根据定义,

将未扰动时的解 u_i^0 和 ϕ^0 代入 (3.1.5) 式得到 Bragg 频率 ω_0 , 即

$$\begin{aligned} \omega_0^2 \int dV \rho u_i^0 u_i^0 = \int dV & \left(\frac{\partial u_i^{0*}}{\partial x_j} c_{ijkl} \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_i^{0*}}{\partial x_j} e_{ijk} \frac{\partial \phi^0}{\partial x_k} \right. \\ & \left. + \frac{\partial \phi^{0*}}{\partial x_i} e_{ijk} \frac{\partial u_j^0}{\partial x_k} - \frac{\partial \phi^{0*}}{\partial x_i} \epsilon_{ij} \frac{\partial \phi^0}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

取频率试解

$$\omega = \omega_0 + \delta \omega \quad (3.1.9)$$

将 (3.1.6)、(3.1.7)、(3.1.9) 三式代入 (3.1.5) 式并考虑 (3.1.8) 式、且仅考虑

一阶扰动(first order perturbation)得

$$\begin{aligned}
 & \omega_0^2 \int dV \rho [u_i^{0*} \delta u_i + \delta u_i^* u_i^0] + 2\omega_0 \delta \omega \int \rho |u_i^0|^2 dV \\
 &= \int \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \delta u_i^* \right) c_{ijkl} \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_i^{0*}}{\partial x_j} c_{ijkl} \left(\frac{\partial}{\partial x_l} \delta u_k \right) \right. \\
 &+ \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \delta u_i^* \right) e_{ijk} \frac{\partial \phi^0}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i^{0*}}{\partial x_j} e_{ijk} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \delta \phi \right) \\
 &+ \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \delta \phi^* \right) e_{ijk} \frac{\partial u_j^0}{\partial x_k} + \frac{\partial \phi^{0*}}{\partial x_i} e_{ijk} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \delta u_j \right) \\
 &\left. - \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \delta \phi^* \right) \varepsilon_{ij} \frac{\partial \phi^0}{\partial x_j} - \frac{\partial \phi^{0*}}{\partial x_i} \varepsilon_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \delta \phi \right) \right] dV \quad (3.1.10)
 \end{aligned}$$

此外, 在压电晶体中, 对于未扰动时的解 u_i^0 、 ϕ^0 和 ω_0 , 有运动方程

$$-\omega_0^2 \rho u_i^0 = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(c_{ijkl} \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + e_{ijk} \frac{\partial \phi^0}{\partial x_k} \right) \quad (3.1.11)$$

因为压电晶体是绝缘体, 不存在自由电荷, 所以电位移矢量 D_i^0 的散度必须为零, 即

$$\frac{\partial}{\partial x_i} D_i^0 = 0 \quad (3.1.12)$$

其中电位移矢量满足压电方程

$$D_i^0 = e_{ijk} \frac{\partial u_j^0}{\partial x_k} - \varepsilon_{ij} \frac{\partial \phi^0}{\partial x_j} \quad (3.1.13)$$

因为 $E_i = -\partial \Phi / \partial x_i$, 由 (3.1.4) 式可得

$$\int \mathbf{E}_i^0 \cdot \mathbf{D}_i^0 dV = 0 \quad (3.1.14)$$

考虑 (3.1.11) ~ (3.1.14) 式, (3.1.10) 式可写为

$$2\delta\omega\omega_0 \int \rho |u_i^0|^2 dV = \int da_j \delta u_i^* \left[c_{ijkl} \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + e_{ijk} \frac{\partial \phi^0}{\partial x_k} \right]$$

$$+ \int da_i \delta \phi^* \left[e_{ijk} \frac{\partial u_j^0}{\partial x_k} - \varepsilon_{ij} \frac{\partial \phi^0}{\partial x_j} \right] + c.c. \quad (3.1.15)$$

上式中 $[c_{ijkl} \partial u_k^0 / \partial x_l + e_{ijk} \partial \phi^0 / \partial x_k]$ 表示在没有栅阵扰动时声表面波在压电晶体内部产生的应力，而在晶体表面应力为零，所以 (3.1.15) 式第一项积分为零。因为在导体上满足边界条件 $\delta \phi = 0$ ，第二项积分也为零，这就是说扰动项 $\delta \omega = 0$ ，满足变分条件，所以说 (3.1.5) 式是压电基片上短路金属栅的变分表达式。

§ 3.1.4 变分表达式的求解

变分表达式 (3.1.5) 式给出了具有传输常数 k 试解的频率 ω 的表达式，由此可建立频率 ω 对于波数 k 的色散关系。这儿，我们感兴趣的是反射系数和有栅条引起的声表面波速度变化 (velocity shift)。用于变分表达式的试解有两个，一是不考虑栅阵扰动的声表面波振动位移，另一个是满足短路金属栅边界条件的准静态电势。取在正方向和反方向传输的非耦合声波的线性叠加作为变分方程的试解，即

$$u_i = A_1 u_i^{(1)} \exp(-jkx) + A_2 u_i^{(2)} \exp(jkx) \quad (3.1.16)$$

$$\phi = A_1 \phi^{(1)} \exp(-jkx) + A_2 \phi^{(2)} \exp(jkx) \quad (3.1.17)$$

式中 $u_i^{(1)}$, $u_i^{(2)}$ 分别代表正、反两个方向波的归一化位移，其中不含指数项 $\exp(-jkx)$ 、 $\exp(jkx)$ ， $\phi^{(1)}$ 、 $\phi^{(2)}$ 是相应的归一化电势。将试解 (3.1.16)、(3.1.17) 两式代入变分表达式 (3.1.5) 整理后得

$$\omega^2 = \frac{\mathbf{A}^+ \mathbf{H} \mathbf{A}}{\mathbf{A}^+ \mathbf{W} \mathbf{A}} \quad (3.1.18)$$

其中 $\mathbf{A}$ 是一个列向量，上标 “+” 表示对向量转置后再复数共轭。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \quad (3.1.19)$$

而 $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{W}$ 是二阶矩阵，其中的各个元素为 ($m=1,2$ 和 $n=1,2$)

$$H_{mn} = \int dV \left(\frac{\partial u_i^{(m)*}}{\partial x_j} c_{ijkl} \frac{\partial u_k^{(n)}}{\partial x_l} + \frac{\partial u_i^{(m)*}}{\partial x_j} e_{ijk} \frac{\partial \phi^{(n)}}{\partial x_k} + \frac{\partial \phi^{(m)*}}{\partial x_i} e_{ijk} \frac{\partial u_k^{(n)}}{\partial x_l} - \frac{\partial \phi^{(m)*}}{\partial x_i} \varepsilon_{ij} \frac{\partial \phi^{(n)}}{\partial x_j} \right) \exp 2j(1 - \delta_{mn})kx \quad (3.1.20)$$

$$W_{mn} = \int dV \rho u_i^{(m)*} u_i^{(n)} \exp 2j(1 - \delta_{mn})kx \quad (3.1.21)$$

δ_{mn} 是 Kronecker delta 函数, 根据变分原理对于未扰动时的解来说, 将 (3.1.18)

式分别对 A_1 和 A_2 微分使其极小可得到 ω^2 的值。(3.1.18) 式可写为

$$\omega^2 \begin{bmatrix} A_1^* (W_{11} A_1 + W_{12} A_2) \\ + A_2^* (W_{21} A_1 + W_{22} A_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^* (H_{11} A_1 + H_{12} A_2) \\ + A_2^* (H_{21} A_1 + H_{22} A_2) \end{bmatrix}$$

(3.1.22) 对 A_1^* 和 A_2^* 微分得

$$\omega^2 (W_{11} A_1 + W_{12} A_2) = H_{11} A_1 + H_{12} A_2 \quad (3.1.23)$$

$$\omega^2 (W_{21} A_1 + W_{22} A_2) = H_{21} A_1 + H_{22} A_2 \quad (3.1.24)$$

这就是通过变分原理得到的声表面波频率平方 ω^2 表达式。现在来看看 H_{mn}

和 W_{mn} 的物理意义。由声学理论可知, 声波的传输过程也是能量的传输过程, 声表面波能量包括动能和势能, 而势能又分为电势能和弹性势能, 它们分别表示为

$$\text{波动能: } U^K = \frac{1}{2} \omega^2 \int \rho u_i^* u_i dV \quad (3.1.25)$$

$$\begin{aligned} \text{弹性势能: } U^m &= \frac{1}{2} \int T_{ij} S_{ij}^* dV \\ &= \frac{1}{2} \int dV \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} \left(c_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + e_{ijk} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right) \end{aligned} \quad (3.1.26)$$

$$\begin{aligned} \text{电势能: } U^e &= \frac{1}{2} \int E_i D_i^* dV \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \left(e_{ijk} \frac{\partial u_j^*}{\partial x_k} - \epsilon_{ij} \frac{\partial \phi^*}{\partial x_j} \right) dV \end{aligned} \quad (3.1.27)$$

因此

$$H_{mn} = 2[U_{mn}^m - (U_{mn}^e)^*] \quad (3.1.28)$$

$$W_{mn} = \frac{2}{\omega^2} U_{mn}^K \quad (3.1.29)$$

由以上分析可以看到 W_{mn} 反映了声表面波动能的大小, 而 H_{mn} 反映了声表面波势能的大小。

§ 3.1.5 用变分原理确定金属短路栅的色散关系

在没有栅阵时,相反方向传输的两列声表面波是解耦的,它们的动能是正交的,也就是说矩阵 $\mathbf{W}$ 和 $\mathbf{H}$ 是对角矩阵。这样 (3.1.23) 和 (3.1.24) 式在未扰动的 Bragg 频率 ω_0 (此时波数为 $\pm k_g/2$, 其中 $k_g = 2\pi/\Lambda$, Λ 是栅周期) 并且解耦的情况下变为

$$\omega_0^2 W_{ii}^{(0)} = H_{ii}^{(0)} \quad i=1 \text{ or } 2 \quad (3.1.30)$$

上式中用上标“0”表示无栅阵的情况。现在我们假定栅阵存在时对矩阵 $\mathbf{W}$ 和 $\mathbf{H}$ 扰动为 $\delta\mathbf{W}$ 和 $\delta\mathbf{H}$ (这里的扰动项 $\delta\mathbf{W}$ 和 $\delta\mathbf{H}$ 与变分原理中的微小变化量 δu_i 和 $\delta\phi$ 在物理意义上有本质区别, $\delta\mathbf{W}$ 和 $\delta\mathbf{H}$ 是栅阵对基底中传播的声表面波“扰动”而使 $\mathbf{W}$ 和 $\mathbf{H}$ 产生的改变,是客观存在的; δu_i 和 $\delta\phi$ 实际是变分原理中的“虚位移”和“虚电势”), 因此可将矩阵 $\mathbf{W}$ 和 $\mathbf{H}$ 写成如下形式

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}^{(0)} + \delta\mathbf{W} \quad (3.1.31)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^{(0)} + \delta\mathbf{H} \quad (3.1.32)$$

我们同时假定栅阵对声波频率的扰动为 $\delta\omega$, 则栅阵中传输的声波频率可表示为未扰动的 Bragg 频率 ω_0 与扰动项 $\delta\omega$ 之和, 即

$$\omega = \omega_0 + \delta\omega \quad (3.1.33)$$

将 (3.1.31)、(3.1.32) 和 (3.1.33) 式代入 (3.1.23) 和 (3.1.24) 式, 忽略二阶项得

$$2\omega_0\delta\omega W_{11}^{(0)}A_1 = (\delta H_{11} - \omega_0^2\delta W_{11})A_1 + (\delta H_{12} - \omega_0^2\delta W_{12})A_2 \quad (3.1.34)$$

$$2\omega_0\delta\omega W_{22}^{(0)}A_2 = (\delta H_{21} - \omega_0^2\delta W_{21})A_1 + (\delta H_{22} - \omega_0^2\delta W_{22})A_2 \quad (3.1.35)$$

上面两式变形为

$$[2\omega_0\delta\omega W_{11}^{(0)} - (\delta H_{11} - \omega_0^2\delta W_{11})]A_1 = (\delta H_{12} - \omega_0^2\delta W_{12})A_2 \quad (3.1.36)$$

$$[2\omega_0\delta\omega W_{22}^{(0)} - (\delta H_{22} - \omega_0^2\delta W_{22})]A_2 = (\delta H_{21} - \omega_0^2\delta W_{21})A_1 \quad (3.1.37)$$

将 (3.1.36) 式和 (3.1.37) 式相比消除 A_1 和 A_2 得

$$\begin{aligned}
(\delta\omega)^2 - \left(\frac{\delta H_{11} - \omega_0^2 \delta W_{11}}{4\omega_0 W_{11}^{(0)}} + \frac{\delta H_{22} - \omega_0^2 \delta W_{22}}{4\omega_0 W_{22}^{(0)}} \right) \delta\omega \\
- \frac{(\delta H_{12} - \omega_0^2 \delta W_{12})(\delta H_{21} - \omega_0^2 \delta W_{21})}{4\omega_0^2 W_{11}^{(0)} W_{22}^{(0)}} + \frac{(\delta H_{11} - \omega_0^2 \delta W_{11})(\delta H_{22} - \omega_0^2 \delta W_{22})}{4\omega_0^2 W_{11}^{(0)} W_{22}^{(0)}} = 0
\end{aligned} \quad (3.1.38)$$

我们可以看到 (3.1.38) 式实际上是 $\delta\omega$ 的一元二次方程, 解方程得

$$\begin{aligned}
\delta\omega = & \left(\frac{\delta H_{11} - \omega_0^2 \delta W_{11}}{4\omega_0 W_{11}^{(0)}} + \frac{\delta H_{22} - \omega_0^2 \delta W_{22}}{4\omega_0 W_{22}^{(0)}} \right) \\
& \pm \sqrt{\left(\frac{\delta H_{11} - \omega_0^2 \delta W_{11}}{4\omega_0 W_{11}^{(0)}} - \frac{\delta H_{22} - \omega_0^2 \delta W_{22}}{4\omega_0 W_{22}^{(0)}} \right)^2 + \frac{(\delta H_{12} - \omega_0^2 \delta W_{12})(\delta H_{21} - \omega_0^2 \delta W_{21})}{4\omega_0^2 W_{11}^{(0)} W_{22}^{(0)}}}
\end{aligned} \quad (3.1.39)$$

从上式中可以知道频率的变化是表达式中平方根项的两倍, 其第一项给出向前、向后两个波都有的频率变化, 从而给出两个波的速度偏移。由于栅阵对向前、向后两个波的扰动是相同的, 因此有

$$\delta H_{11} = \delta H_{22} \quad (3.1.40)$$

$$\delta W_{11} = \delta W_{22} \quad (3.1.41)$$

$$W_{11} = W_{22} \quad (3.1.42)$$

从而 (3.1.39) 式变为

$$\delta\omega = \frac{\delta H_{11} - \omega_0^2 \delta W_{11}}{2\omega_0 W_{11}^{(0)}} \pm \frac{\delta H_{12} - \omega_0^2 \delta W_{12}}{2\omega_0 W_{11}^{(0)}} \quad (3.1.44)$$

另外, 由 COM 理论得到的色散关系为^[14]

$$\frac{\Delta\omega}{V_R} = \frac{\omega_0}{V_R} \frac{\Delta V}{V_R} \pm |\kappa_{12}| \quad (3.1.45)$$

比较 (3.1.44) 式和 (3.1.45) 式可得

$$\frac{\Delta V}{V_R} = \frac{\delta H_{11} - \omega_0^2 \delta W_{11}}{2\omega_0^2 W_{11}^{(0)}} \quad (3.1.46)$$

$$\kappa_{12} = k_R \frac{\delta H_{12} - \omega_0^2 \delta W_{12}}{2\omega_0^2 W_{11}^{(0)}} \quad (3.1.47)$$

(3.1.46) 式和 (3.1.47) 式就是根据变分原理和 COM 色散关系得到的速度变化和反射系数的理论计算公式。实际上 $\Delta V/V_R$ 总是一个实数量，而 κ_{12} 通常是一个复数变量，对于常用的大部分晶体 κ_{12} 的虚部很小、接近实数。

§ 3.2 压电晶体基片和金属栅条的材料特性

由晶体的对称性知道，晶体分为 7 个晶系共有 14 种布拉伐格子，常用的 SAW 器件晶体基片和金属指条的对称性是不一样的，它们通常属于立方 $m3m$ 晶体、六角 $6/mmm$ 、四方 $4/mmm$ 及三角 $3m$ 晶体。这些晶体的弹性常数是不一样的。具体是^[54]：

(1)、立方 $m3m$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix}$$

(2)、六角 $6/mmm$ 、四方 $4/mmm$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}$$

(3)、三角 $3m$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & -c_{14} & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ c_{14} & -c_{14} & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{14} & c_{66} \end{bmatrix}$$

立方 $m3m$ 是三个常数，三角 $3m$ 和四方 $4/mmm$ 是六个常数，六角 $6/mmm$ 是五个常数。在这里我们把六角 $6/mmm$ 和四方 $4/mmm$ 归为一类、是因为它们的弹性常数矩阵元素中除了 c_{66} 以外形式上其它均相同。而在下一节的理论推导中，各种类型栅条反射系数的理论推导中都不用 c_{66} 。晶体的弹性常数不一样会导致栅条反

射系数的理论计算公式不同，下面从理论上详细说明这个问题。

§ 3.3 短路栅反射系数的变分原理求解

由变分原理推到的 SAW 器件短路金属栅反射系数的计算公式由 (3.1.47) 式表示。

$$\kappa_{12} = k_R \frac{\delta H_{12} - \omega_0^2 \delta W_{12}}{2\omega_0^2 W_{11}^{(0)}} \quad (3.1.47)$$

其中 κ_{12} 表示短路金属栅的反射系数， k_R 是声表面波波数， ω_0 表示 Bragg 频率，

δ 表示由栅阵引起的扰动， W_{12} 反映了声表面波动能的大小， H_{12} 反映了声表面波势能的大小。

取自由表面 Rayleigh 波解作为 (3.1.16) 式中的位移尝试函数，(3.1.17) 式中的电势尝试函数取为

$$\phi = \phi_f + \Delta\phi \quad (3.3.1)$$

ϕ_f 是自由表面的解， $\Delta\phi$ 为栅阵引起的 Floquet 散射分量，将尝试函数代入

(3.1.47) 式，并用下标 “m” 表示与机械能相联系的量，下标 “ps” 表示与电势能相联系的量，(3.1.47) 式可进一步变为

$$\kappa_{12} = \frac{(\delta H_{12} - \omega_0^2 \delta W_{12})_m + (\delta H_{12})_{ps}}{2\omega_0^2 W_{11}^{(0)}} \cdot k_R \quad (3.3.2)$$

其中

$$\begin{aligned} (\delta H_{12})_{ps} = \int_{V'} dV \left\{ \frac{\partial u_i^{(1)*}}{\partial x_j} e_{ijk} \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial x_k} + \frac{\partial \Delta\phi^{(1)*}}{\partial x_i} e_{ijk} \frac{\partial u_j^{(2)}}{\partial x_k} - \frac{\partial \phi^{(1)*}}{\partial x_i} \varepsilon_{ij} \frac{\partial \Delta\phi^{(2)}}{\partial x_j} \right. \\ \left. - \frac{\partial \Delta\phi^{(1)*}}{\partial x_i} \varepsilon_{ij} \frac{\partial \phi_f^{(2)}}{\partial x_j} - \frac{\partial \Delta\phi^{(1)*}}{\partial x_i} \varepsilon_{ij} \frac{\partial \Delta\phi^{(2)}}{\partial x_j} \right\} \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

$$(\delta H_{12} - \omega_0^2 \delta W_{12})_m = \int_{\Delta V} dV \frac{\partial u_i^{(1)*}}{\partial x_j} c_{ijkl} \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial x_l} - \omega_0^2 \rho \int_{\Delta V} dV u_i^{(1)} u_i^{(2)} \quad (3.3.4)$$

$$W_{11}^{(0)} = \rho \int_{V'} dV |u_i^{(1)}|^2 \quad (3.3.5)$$

式中积分区间 V' 指栅条以外所有空间， ΔV 指栅条所占据的空间， ρ 和 c_{ijkl} 是栅

条的质量密度和弹性常数。从 (3.3.3) 式可见， $(\delta H_{12})_{ps}$ 是因为栅条引起晶体表

面压电场短路，从而引起准静态电势的变化而引起的，为压电短路的贡献；而 $(\delta H_{12} - \omega_0^2 \delta W_{12})_m$ 则是包含在栅条中的动能和纯弹性势能（总称为力学负载的贡献）的量度。文献 [14] 已给出由压电短路贡献的反射系数 $(\kappa_{12})_{ps}$ 的具体表达式，本文不再讨论。

下面我们来看力学负载的贡献（本章后面说到的反射系数都是指力学负载的贡献，不含压电短路的贡献）。栅条的结构如图 3.1 所示， Λ 表示栅阵周期， h 表示指条厚度。因为栅条的厚度与波长相比一般很小，我们假设栅条的振动位

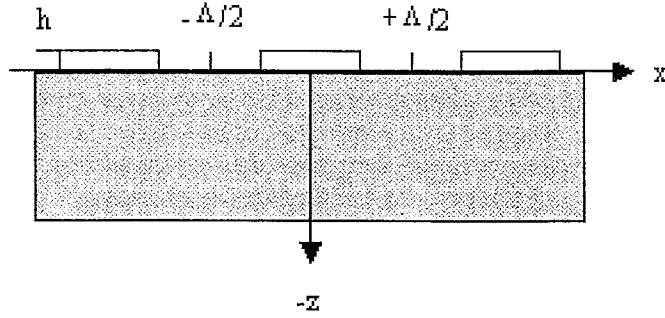


图 3.1 SAW 器件机构示意图

移和应力在厚度方向是均匀的，且等于晶体表面的值，并考虑栅条长度比波长大很多，假设所有的场量在 y 方向是均匀的，注意到这些假设，我们有

$$(\kappa_{12}\Lambda)_m = \frac{(\delta H_{12} - \omega_0^2 \delta W_{12})_m}{2\omega_0^2 W_{11}^{(0)}} \cdot 2\pi = R_m \frac{h}{\lambda} \quad (3.3.6)$$

其中

$$R_m = 2\pi \left[\frac{1}{k_R^2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\partial u_x^{(1)*}}{\partial x} c'_{11kl} \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial x_l} dx - V_R^2 \rho' \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} u_i^{(1)*} u_i^{(2)} dx \right]_{z=0} \div 2V_R^2 \rho \int_0^\infty |u_i^{(1)}|^2 dz \quad (3.3.7)$$

V_R 是表面波速度， ρ 是基片的密度， u 表示振动位移， a 是指条的宽度。 ρ' 和 c'_{11kl}

是栅条的密度和弹性常数。上式中的 $\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\partial u_x^{(1)*}}{\partial x} c'_{11kl} \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial x_l} dx$ 项展开后为

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\partial u_x^{(1)*}}{\partial x} c_{11kl}' \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial x_l} dx = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left\{ \frac{\partial u_x^{(1)*}}{\partial x} c_{11}' \frac{\partial u_x^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial u_x^{(1)*}}{\partial x} c_{12}' \frac{\partial u_y^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial u_x^{(1)*}}{\partial x} c_{13}' \frac{\partial u_z^{(2)}}{\partial z} \right. \\ \left. + \frac{\partial u_x^{(1)*}}{\partial x} c_{14}' \left(\frac{\partial u_y^{(2)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(2)}}{\partial y} \right) + \frac{\partial u_x^{(1)*}}{\partial x} c_{15}' \left(\frac{\partial u_x^{(2)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(2)}}{\partial x} \right) + \frac{\partial u_x^{(1)*}}{\partial x} c_{16}' \left(\frac{\partial u_x^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial u_y^{(2)}}{\partial x} \right) \right\} dx \quad (3.3.8)$$

在压电晶体中，我们并取振动位移的尝试函数为

$$u_j^{(1)} = \sum_{n=1}^4 X_{jn} e^{-j\alpha_n k_R z} e^{-jk_R x} \quad (3.3.9)$$

$$u_j^{(2)} = \sum_{n=1}^4 X_{jn}^* e^{j\alpha_n^* k_R z} e^{jk_R x} \quad (3.3.10)$$

将(3.3.9)式和(3.3.10)式及立方 $m3m$ 晶体(如金、银、铝)的弹性常数代入(3.3.7)式得到晶体对称性为立方 $m3m$ 金属栅条的反射系数:

$$R_{m1} = - \frac{c_{11}' X^{*2} + c_{12}' F^* X^* + V_R^2 \rho (X^{*2} + Y^{*2} + Z^{*2})}{2V_R^2 \rho \sum_{n=1}^4 \sum_{n=1}^4 \frac{X_m X_n^* + Y_m Y_n^* + Z_m Z_n^*}{j(\alpha_m - \alpha_n^*)}} \cdot 2\pi \sin\left(\frac{2k_R}{k_g} \eta \pi\right) \quad (3.3.11)$$

上式文献[14]已给出。其中 $F = \sum_{n=1}^4 \alpha_n Z_n$, $X = \sum_{n=1}^4 X_n$, $Y = \sum_{n=1}^4 Y_n$, $Z = \sum_{n=1}^4 Z_n$,

$\eta = a/\Lambda$ 为栅条的金属化比。

将(3.3.9)式、(3.3.10)式和四方 $4/mmm$ ，六角 $6/mmm$ 晶体(如铌、钛)的弹性常数代入(3.3.7)式首次得到晶体对称性为四方 $4/mmm$ ，六角 $6/mmm$ 金属栅条的反射系数:

$$R_{m2} = - \frac{c_{11}' X^{*2} + c_{13}' F^* X^* + V_R^2 \rho (X^{*2} + Y^{*2} + Z^{*2})}{2V_R^2 \rho \sum_{n=1}^4 \sum_{n=1}^4 \frac{X_m X_n^* + Y_m Y_n^* + Z_m Z_n^*}{j(\alpha_m - \alpha_n^*)}} \cdot 2\pi \sin\left(\frac{2k_R}{k_g} \eta \pi\right) \quad (3.3.12)$$

将(3.3.9)式、(3.3.10)式和三角 $3m$ 晶体(如 LiNbO_3 、 LiTaO_3 、石英)的弹性常数代入(3.3.7)式首次得到晶体对称性为三角 $3m$ 沟槽的反射系数:

$$R_{m3} = - \frac{c_{11}' X^{*2} + c_{13}' F^* X^* + c_{14}' D^* X^* + V_R^2 \rho (X^{*2} + Y^{*2} + Z^{*2})}{2V_R^2 \rho \sum_{n=1}^4 \sum_{n=1}^4 \frac{X_m X_n^* + Y_m Y_n^* + Z_m Z_n^*}{j(\alpha_m - \alpha_n^*)}} \cdot 2\pi \sin\left(\frac{2k_R}{k_g} \eta \pi\right) \quad (3.3.13)$$

其中 $D = \sum_{n=1}^4 \alpha_n Y_n$ 。我们注意到 (3.3.11) 式、(3.3.12) 式和 (3.3.13) 式各不一样。在 Bragg 频率处, $k_R = k_g/2$, 其中 $k_g = 2\pi/\Lambda$ 。我们计算了几种常用晶体材料和栅条材料组合的 Rayleigh 波的 R_m , 计算时取金属化比 $\eta = 0.5$, 计算结果列于表 3.1。

表 3.1 压电晶体中 Rayleigh 波反射系数 (力学负载贡献)

	YZ-LiNbO ₃	128° YX-LiNbO ₃	X-112° YLiTaO ₃	AT-X 石英
Al	-0.3177+0.1204i	-0.9844-0.0159i	-0.1180+0.0004i	-0.6718
Au	0.5995-0.2231i	-0.7350-0.0119i	0.6496+0.0000i	-11.6471
沟槽	0.6878-0.2603i	1.9966+0.0322i	0.2124-0.0000i	-0.8665
Ag	0.2305-0.0831i	-0.6087+0.098i	0.3034+0.0000i	-6.1197
Cr	-1.1830+0.4778i	-3.3591+0.054i	-4927+0.0000i	-1.1684

从表 3.1 反射系数的计算结果可以知道, 在一般的压电晶体中, Rayleigh 波的金屬短路栅和沟槽栅的反射系数是一个复数, 其虚部都很小。而 AT-X 石英的各种栅条的反射系数都是实数, 这可能与石英晶体压电性弱、机电耦合系数小有关。

本章小结

在这一章里, 我们首先简单回顾了陈东培和 H. A. Haus 用变分原理分析 SAW 器件栅阵反射特性的理论工作, 结合何世堂在这方面的研究, 用陈东培和 H. A. Haus 理论具体分析了压电晶体中栅阵的反射特性。我们创新性的工作有:

- (1)、 将陈东培和 H. A. Haus 以及何世堂的理论工作推广到压电晶体, 压电晶体都是各向异性的, 各向同性和各向异性的弹性常数是不一样的。同时, 由于压电性声波在压电晶体中传播会产生伴随电势, 这个伴随电势会与声波发生耦合, 这些现象都会改变栅阵的反射特性。我们首次在用变分原理分析栅阵的反射特性时考虑了晶体压电性。
- (2)、 文献[14]和文献[36]都只给出了立方 m3m 金属栅条的反射系数计

算公式, 而没给出四方 4/mmm, 六角 6/mmm 金属栅条和三角 3m 沟槽等反射系数计算公式, 栅条的对称性不同也影响其反射特性。我们详细推导了不同晶体对称性的栅条反射系数的理论计算公式, 首次给出四方 4/mmm, 六角 6/mmm 金属栅条和三角 3m 沟槽等反射系数计算公式, 根据理论分析计算了常用 SAW 器件基片上的金、银、铝、铬等短路金属反射栅和沟槽反射栅 Rayleigh 波的反射系数。

由于我们考虑了晶体的压电性和不同金属栅条的晶体对称性, 我们的理论分析更接近实际情况, 应而我们有理由相信我们给出的栅条反射系数理论计算值更精确。

第四章 压电晶体基片短路栅 SH 型声表面波

的变分原理研究

引言

前两章我们从波动方程出发,利用有效介电常数曲线表征了半无限空间声表面波模式的传播特性,讨论了半无限空间声表面波模式的传播特点,阐明了压电晶体中声表面波传播特征参数的提取方法。我们用陈东培和 H. A. Haus 理论研究了压电晶体基片短路反射栅的反射特性。给出了不同晶体对称性栅条反射系数的理论计算公式和相应的理论计算结果。本章在前面工作基础上将陈东培和 H. A. Haus 理论从压电晶体中 Rayleigh 波推广到 SH 型表面波(包括漏波、BG 波、SSBW、STW 等)。

SH 型表面波和传统 Rayleigh 波相比有几个重要的不同特性,例如,在相同基片上传播的 SH 型表面波有比 Rayleigh 波更强的压电性。当 SV 型 BAW 为慢剪切波时,SH 型表面波通常是漏表面波,不过当它与 SV 分量耦合作用很小时,它的传播损耗可以忽略不计,这时它的波速接近于快剪切 BAW,因此 SH 型表面波传播速度大于 Rayleigh 波传播速度。这种特性在高频应用领域是很有意义的。

近年来,声表面波滤波器在移动通信中作为关键器件起重要作用,在移动通信中,急需使声表面波滤波器体积减小, Rayleigh 波器件难以实现这点,现在主要用 SH 型声表面波和重金属栅条使声表面波滤波器体积减小^[42,90]。

由于声表面波滤波器都有周期性栅阵,SH 型声表面波的研究主要集中在 STW 器件上^[90~96, 38],STW 谐振器与传统 Rayleigh 波谐振器的主要区别在于前者需要在谐振器腔内放置栅以获得表面波模式,而后者通过光滑表面就可自动获得 Rayleigh 波模式。

另外,在栅结构 Bragg 频率处,STW 波显示截止特性(cut-off nature),因此 STW 速度和机电耦合系数本身固有频率色散(Frequency Dispersive)特性。STW 器件特性比较复杂,不同于传统的声表面波,在 STW 器件模拟时必须考虑它的色散特性,因此 Rayleigh 波器件的模拟方法对 STW 器件是无效的^[38]。

表面横波(STW)除了有较高的传播速度(一般大于 5,000m/sec)外,另外还有低传输损耗、极好的温度稳定性以及极好的功率处理能力(power handling capability)。这些特性在频率控制应用中都是十分有益的。

为了利用 SH 型表面波设计 SAW 器件,Plessky 提出了一个关于周期性栅阵中传播 SH 型表面波的耦合模理论^[95],他给出了有两个参数的 SH 型表面波色散关系。但是,Plessky 的耦合模理论不能直接应用于 SH 型表面波器件的设计中。为此,B.P.Abbott 和 K.Hashimoto 提出了另一个 SH 型表面波器件 COM 分析方法^[96],这个方法假定传统声表面波 COM 模型形式能满足 SH 型表面波特性,他们提出了一个新的唯象(phenomenological)色散关系,这个唯象色散关系需要五个参数,通过在 Plessky 的色散关系和 Abbott 的 COM 模型色散关系之间建立一个解析等同关系来决定这五个新的参数。

本章的基本任务是将陈东培和 H. A. Haus 理论从压电晶体中 Rayleigh 波推广到 SH 型表面波。利用变分原理和 SH 型声表面波 COM 模型去分析栅阵中 SH 型声表面波的传播特性。

由于传统 Rayleigh 波 COM 色散曲线和 Plessky 的 SH 型表面波 COM 色散曲线在禁带上边缘(the upper stopband edge)和禁带下边缘(the lower stopband edge)处吻合较好^[84], 在分析中我们认为这两种 COM 色散关系曲线在禁带上边缘和禁带下边缘是一致的。通过理论推导我们可以将传统 Rayleigh 波 COM 色散关系与文献[14]中由变分原理得到的表达式结合起来, 确定短路栅色散曲线禁带上边缘和禁带下边缘频率。

为此, 我们首先介绍 V.P.Plessky 关于 SH 型表面波 COM 模型理论和 B.P.Abbott 相应的 COM 模型理论, 给出这两种 COM 模型理论的 COM 方程和它们的色散关系表达式, 说明 Plessky 色散关系的两个参数和 Abbott 色散关系的五个参数物理意义, 以及这两个 COM 模型参数之间的解析等同关系。然后根据陈东培和 H. A. Haus 理论, 利用变分原理得到的理论公式通过数值计算求出 SH 型表面波短路栅色散曲线禁带上边缘和禁带下边缘频率。最后由禁带上边缘和禁带下边缘频率确定两个 Plessky's COM 参数和五个 Abbott's COM 参数。

§ 4.1 Plessky 的 COM 理论

考虑压电晶体在 $z < 0$ 半无限空间, 位移矢量与 y 轴平行, 传输方向沿 x 轴, 见图 3.1, 选取这样的坐标适用于 BGW, 表面横波 (STW), 表面掠面体波 (SSBW) 以及某些情况下的漏波等 SH 型表面波。我们知道周期性栅阵中传输的谐波满足 Floquet 定理, 当频率接近反射栅禁带时, 取分别对应入射和反射两个基频谐波之和表示栅阵中传输的波^[15], 即

$$\begin{aligned} u = & u_+ \exp(k_+ z + j(Q/2 + \delta)x) \\ & + u_- \exp(k_- z + j(-Q/2 + \delta)x) \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

其中波数 $k = Q/2 + \delta$, 而 $|\delta| \ll Q/2$, $Q/2 = \pi/\Lambda$ 是 Bragg 波数, Λ 是栅周期, 声表面波频率接近于 Bragg 频率, 即

$$\omega = \omega_b + \Delta\omega, \quad \Delta\omega \ll \omega_b \quad (4.1.2)$$

$\omega_b = V \cdot (Q/2)$, V 是在非常弱扰动极限情况下的波速, 衰减常数 $k_{\pm}$ 表示表面附近声波的局限深度(localization depth), 表示为

$$k_{\pm} = \sqrt{(Q/2 \pm \delta)^2 - k_t^2} \quad (4.1.3)$$

其中 $k_t = \omega/V$ 是剪切体波的波数, 对于这个问题可以建立相应的 COM 模型方程为

$$\left(k_+ - \eta_0(Q/2 + \delta) - 2\varepsilon_0 \frac{k_t^2}{Q} \right) u_+ = \varepsilon_1 \frac{2k_t^2}{Q} u_- \quad (4.1.4)$$

$$\left(k_- - \eta_0(Q/2 + \delta) - 2\varepsilon_0 \frac{k_t^2}{Q}\right)u_- = \varepsilon_1^* \frac{2k_t^2}{Q}u_+ \quad (4.1.5)$$

η_0 : 压电耦合系数, ε_0 : 由均匀负载确定的参数, ε_1 : 周期边界扰动的参数, 在包含禁带一个窄的频率范围内, 上面两式可以简化为

$$(k_+ - \eta(Q/2))u_+ = \varepsilon(Q/2)u_- \quad (4.1.6)$$

$$(k_- - \eta(Q/2))u_- = \varepsilon^*(Q/2)u_+ \quad (4.1.7)$$

其中 $\eta = \eta_0 + 4\varepsilon_0 \frac{k_t^2}{Q^2}$ 对应于波的局限深度 (localization depth), $\varepsilon = \varepsilon_1$ 描述两个相

反方向传输波的相互作用, 这两个参数都认为很小 ($\eta < 1$, $\varepsilon \ll 1$)。引进归一化波数变化 q (normalized wavenumber deviation) 和归一化频率变化 Δ (normalized frequency shift)

$$\xi = (Q/2 + \delta)/(Q/2) = 1 + q \quad (4.1.8)$$

$$\Delta = (\Delta\omega/\omega_b) \quad (4.1.9)$$

这样 (4.1.6)、(4.1.7) 两式可写为

$$(\sqrt{2(q - \Delta)} - \eta)u_+ = \varepsilon \cdot u_- \quad (4.1.10)$$

$$(\sqrt{2(q - \Delta)} - \eta)u_- = \varepsilon^* \cdot u_+ \quad (4.1.11)$$

从 (4.1.10)、(4.1.11) 两式得到

$$(\sqrt{2(q - \Delta)} - \eta) * (\sqrt{2(-q - \Delta)} - \eta) = |\varepsilon|^2 \quad (4.1.12)$$

上式可以通过解析方法求解, 先考虑波数等于 Bragg 波数 $Q/2$ 这个特殊频率点, 此时波数变化 $q=0$, 这样 (4.1.12) 式变为

$$\sqrt{-2\Delta} = \eta \pm |\varepsilon| \quad (4.1.13)$$

由此给出禁带下边缘 (the lower stopband edge) 频率为

$$\Delta_- = -\frac{1}{2}(\eta + |\varepsilon|)^2 \quad (4.1.14)$$

禁带上边缘 (the upper stopband edge) 频率为

$$\Delta_+ = -\frac{1}{2}(\eta - |\varepsilon|)^2 \quad (4.1.15)$$

上面两式仅在 $|\varepsilon| < 0.5\eta$ 成立, 假如 $|\varepsilon| > \eta$, 禁带上边缘不能从产生体波散射频率

范围分离出来, 在 $|\varepsilon| > 0.5\eta$ 时就会出现这种情况, 在 $|\varepsilon| < 0.5\eta$ 时, 禁带中心(the stop band center)频率为

$$\Delta_c = \frac{1}{2}(\Delta_- + \Delta_+) = -\frac{\eta^2 + |\varepsilon|^2}{2} \quad (4.1.16)$$

禁带宽度为

$$\Omega = (\Delta_+ - \Delta_-) = 2\eta|\varepsilon| \quad (4.1.17)$$

由 (4.1.12) 式的解得到 Plessky COM 理论的色散关系为

$$q = \sqrt{(\Delta)^2 - \frac{1}{4} \left(|\varepsilon|^2 \pm \eta \sqrt{2|\varepsilon|^2 - \eta^2 - 4\Delta} \right)^2} \quad (4.1.18)$$

在 $|\varepsilon| < 0.5\eta$ 时, 禁带上边缘的频率为 $\Delta = \Delta_+ < \Delta_B$, (这里 $\Delta_B = -\frac{\eta^2 - 2\varepsilon^2}{4}$), 假

如 $|\varepsilon| > 0.5\eta$, 禁带上边缘的频率为 Δ_b , 这时禁带不能从体波散射频率中分离出来。SH 型表面波和 SSBW 相互作用的截止频率为

$$\Delta_B = -\frac{\eta^2 - 2\varepsilon^2}{4} \quad (4.1.19)$$

通过上面的分析, 我们建立了关于 SH 型表面波的 COM 方程, 给出了 Plessky COM 理论的色散关系, 在这个色散关系中有两个参数 η 和 $|\varepsilon|$, 同时给出了禁带上边缘频率及下边缘频率与这两个参数的关系。

§ 4.2 Abbott 的 COM 理论

在上一节中我们分析了 Plessky 的 COM 理论, 但是 Plessky's COM 模型不能直接用于 SAW 器件的设计。由于传统 SAW 器件的 COM 理论已经非常成熟, 若能将 Plessky 的色散关系合并到传统 COM 方程中去会带来很大的方便。Abbott 的 COM 理论就是基于这个思想。在传统 COM 方程中色散关系和考虑栅阵扰动时波数分别是 (详见 § 4.3.1)

$$\theta_p = \sqrt{\theta_u^2 - |\kappa_{12}|^2} \quad (4.2.1)$$

$$k' = \theta_p + M\pi/\Lambda \quad (4.2.2)$$

式中 $\theta_u = k - \pi M/\Lambda$ 是与 Bragg 条件得到的波数 k 的偏移, 称为失谐系数。 θ_p 是

与反射波相互耦合的被干扰模的波数, $k' = \theta_p + M\pi/\Lambda$ 等于第 M 级谐振附近被

干扰模的波数。这里被干扰模的波数 θ_p 类似于上一节中归一化波数偏移 $q(\Delta)$,

当传播方向相反的两列波解耦时得到未扰动的波数 k 。

若将 Plessky 的色散关系应用到传统 COM 方程中, 需要用 Plessky 色散关系中的两个参数 η 和 ϵ 以及归一化频率变化 Δ 等参数去决定已扰动的波数 k' , 未扰动的波数 k 及反射系数 κ_{12} 。Plessky 的色散关系和传统 COM 理论色散关系的不同使我们难以决定未扰动波数及反射系数。为此, Abbott 提出了一种新的唯象色散关系^[96], 这个色散关系不仅考虑传播方向相反的两个表面波模式 (SH 型表面波), 而且还同时考虑了两个相反方向传播的体声波 (BAW) 模式。Abbott 的 COM 模型中有五个参数, 通过在 Plessky 的色散关系和 Abbott 的色散关系之间建立一个解析等同关系来确定这五个新的参数。

§ 4.2.1 Abbott 的 COM 方程

质点运动不同对器件结构有不同的意义。Rayleigh 波器件中基片边界的反射可以通过涂吸声材料得到抑制, 但是这种方法对 SH 型 SAW 器件几乎不起作用。这就需要为 SH 型 SAW 器件建立一个新的 COM 模型, 在这个 COM 模型中必须考虑背向散射的 BAW 作用。

这里我们用 $R_L(x)$, $S_L(x)$, $R_B(x)$, $S_B(x)$ 代表 +x 和 -x 方向传输的 SH 型声表面波模式, 以及 +x 和 -x 方向传输的 BAW 模式, 对于短路栅 COM 方程为

$$\frac{\partial R_L(x)}{\partial x} = -jk_L R_L(x) + j\kappa_L S_L(x)e^{-j2\pi x/\Lambda} + j\zeta S_B(x)e^{-j2\pi x/\Lambda} \quad (4.2.3)$$

$$\frac{\partial S_L(x)}{\partial x} = jk_L S_L(x) - j\kappa_L^* R_L(x)e^{j2\pi x/\Lambda} - j\zeta^* R_B(x)e^{j2\pi x/\Lambda} \quad (4.2.4)$$

$$\frac{\partial R_B(x)}{\partial x} = -jk_B R_B(x) + j\kappa_B S_B(x)e^{-j2\pi x/\Lambda} + j\zeta S_L(x)e^{-j2\pi x/\Lambda} \quad (4.2.5)$$

$$\frac{\partial S_B(x)}{\partial x} = jk_B S_B(x) - j\kappa_B^* R_B(x)e^{j2\pi x/\Lambda} - j\zeta^* R_L(x)e^{j2\pi x/\Lambda} \quad (4.2.6)$$

式中 $k_L = \omega/V_L$, $k_B = \omega/V_B$, 分别是未扰动 SH 型表面波和 BAW 的波数。 V_L 和 V_B 分别是 SH 型表面波和 BAW 的波速。若每个波用调制模式的幅度表示, 如 $R_L = \bar{R}(x)\exp(-j\pi x/\Lambda)$, 则 COM 方程可写为

$$\frac{\partial \bar{R}_L(x)}{\partial x} = -j\delta_L \bar{R}_L(x) + j\kappa_L \bar{S}_L(x) + j\zeta \bar{S}_B(x) \quad (4.2.7)$$

$$\frac{\partial \bar{S}_L(x)}{\partial x} = j\delta_L \bar{S}_L(x) - j\kappa_L^* \bar{R}_L(x) - j\zeta^* \bar{R}_B(x) \quad (4.2.8)$$

$$\frac{\partial \bar{R}_B(x)}{\partial x} = -j\delta_B \bar{R}_B(x) + j\kappa_B \bar{S}_B(x) + j\zeta \bar{S}_L(x) \quad (4.2.9)$$

$$\frac{\partial \bar{S}_B(x)}{\partial x} = j\delta_B \bar{S}_B(x) - j\kappa_B^* \bar{R}_B(x) - j\zeta^* \bar{R}_L(x) \quad (4.2.10)$$

其中 $\delta_L = k_L - \pi/\Lambda$, $\delta_B = k_B - \pi/\Lambda$, 取微分算符 $D = -j\partial/\partial x$, 我们使 (4.2.7) ~ (4.2.9) 式的系数行列式等于零得到色散关系

$$\begin{vmatrix} \delta_L + D & -\kappa_L & 0 & -\zeta \\ -\kappa_L^* & \delta_L - D & -\zeta^* & 0 \\ 0 & -\zeta & \delta_B + D & -\kappa_B \\ -\zeta^* & 0 & -\kappa_B^* & \delta_B - D \end{vmatrix} = 0 \quad (4.2.11)$$

从上式得到

$$\begin{aligned} & D^4 - D^2(\delta_L^2 + \delta_B^2 - |\kappa_L|^2 - |\kappa_B|^2 - 2|\zeta|^2) + \{(\delta_L^2 - |\kappa_L|^2)(\delta_B^2 - |\kappa_B|^2) \\ & + |\zeta|^2(|\zeta|^2 - 2\delta_L\delta_B - 2|\kappa_B||\kappa_L|\cos(\varphi))\} = 0 \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

这里 $\varphi = \arg(\kappa_L) + \arg(\kappa_B) - 2\arg(\zeta)$, 当 SH 型表面波低于 BAW 的截止频率 (cut-off) 时, 由 SH 型表面波携带的一部分声能量当作 BAW 临时储存于栅阵中, BAW 不含净的 (net) 声能量, 但在栅结构中谐振, 这是能量储存效应的一个典型情况。

由于 BAW 不含净的声能量, $D=0$ 必存在多个根, 这需要 (4.2.12) 式的零阶项等于零, 这使 ζ 和 δ_B 分别满足下列两式

$$|\zeta|^2 = 2\delta_L\delta_B + 2|\kappa_B||\kappa_L|\cos(\varphi) \quad (4.2.13)$$

$$\delta_B = \pm|\kappa_B| \quad (4.2.14)$$

满足物理意义的解通常对应于

$$\delta_B = -|\kappa_B|$$

(4.2.12) 式得到另两个解是

$$D = \pm\sqrt{\delta_L^2 - |\kappa_L|^2 - 2|\zeta|^2}$$

令 $\varphi = n\pi$, 色散关系 (dispersion relation) 简化为

$$D = \sqrt{(\delta_L - 2\delta_B)^2 - (|\kappa_L| \pm 2|\kappa_B|)^2} \quad (4.2.15)$$

我们用 $\Delta - \Delta_\nu$ 代替 δ_L , κ 代替 κ_L , 每一个 κ_B 用 $\nu(\Delta)$ 伴随, (4.2.15) 式与传

统 COM 方程中色散关系 (4.2.1) 式相同, 即下式

$$\theta_p = k' - M\pi/\Lambda = \sqrt{\theta_u^2 - |\kappa_{12}|^2} \quad (4.2.1)$$

在 (4.2.1) 式中, 各个参数可分别取以下值

$$k' = \frac{\pi}{\Lambda} \pm \theta_p \quad (4.2.16)$$

$$k = \frac{\pi}{\Lambda} \pm (\Delta - \Delta_v) - 2\delta_B v(\Delta) \quad (4.2.17)$$

$$\kappa_{12} = \kappa + 2\kappa_B v(\Delta) \quad (4.2.18)$$

$$\kappa_{12}^* = \kappa^* + 2\kappa_B^* v(\Delta) \quad (4.2.19)$$

$$\delta_B = -|\kappa_B| \quad (4.2.20)$$

$v(\Delta)$ 是 SH 型表面波与背向散射的 BAW 耦合作用的色散关系, 具体表达式为

$$v(\Delta) = \frac{\eta_B}{\sqrt{\Delta_B - \Delta + \eta_B}} \quad (4.2.21)$$

这样就建立了一个关于 SH 型表面波器件新的色散关系, 在这个色散关系中考虑了散射体波的作用, 有五个 COM 参数, 它在形式上它与传统 Rayleigh 波色散关系是一致的。

§ 4.2.2 Abbott 的 COM 参数和 Plessky 的 COM 参数之间的关系

通过上面分析, 我们可以看到只要满足下面两式, Abbott 色散关系与传统 Rayleigh 波色散关系 (4.2.1) 式在形式上是相同的

$$\{\Delta - \Delta_v + 2|\kappa_B|v(\Delta)\} \Rightarrow \theta_u$$

$$\{\kappa + 2\kappa_B v(\Delta)\} \Rightarrow \kappa_{12}$$

这个唯象色散关系需要 5 个 COM 参数 Δ_v , Δ_B , κ , κ_B 和 η_B , 它们的物理意义分别是

Δ_v : 禁带消失点(the vanishing point of the stop band), 假如与相反方向传播的波解藕, 在这点上禁带消失, 这包括 SH 型表面波与 SH 表面波以及 SH 型表面波与 SSBW 的相互作用,

κ : 表示向前与向后传播的 SH 型表面波相互作用的耦合系数,

κ_B : 表示 SH 型表面波与背向散射的 BAW 相互作用的耦合系数,

Δ_B : 表示 SH 型表面波散射成 SSBW 的截止频率(cut-off frequency), 用 (4.1.19) 式表示。

η_B : 表示边界条件对 SSBW 传播影响的参数。

确定这五个 COM 参数是这个唯象色散关系实际应用的基本问题。首先 (4.2.21) 式不能任意选择, 而使它与 Plessky 两个参数 COM 模型直接等同。 Δ_B 已经由 (4.1.19) 式确定, 禁带消失点 Δ_V 可以这样确定, 在表示禁带中心频率 (4.1.16) 式中, 当与相反方向传播的波相互作用消失时, 即 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时禁带中心频率就是禁带消失点 Δ_V

$$\Delta_V = -\frac{\eta^2}{2} \quad (4.2.22)$$

假定 κ 与 κ_B 的相位差不超过 π , 即

$$\arg(\kappa) = \arg(\kappa_B) + n\pi \quad (4.2.23)$$

κ 的幅度代表消失点 (vanishing point) 与禁带的上边缘或下边缘之差

$$|\kappa| = \Delta_V - \Delta_- \quad \text{or} \quad |\kappa| = \Delta_+ - \Delta_V \quad (4.2.24)$$

由禁带中心频率 (4.1.16) 式和禁带消失点 (4.2.22) 式可知, 消失点 Δ_V 要么等于禁带中心频率 Δ_C (when $\varepsilon = 0$); 要么大于禁带中心频率 Δ_C (when $|\varepsilon| > 0$), 这导致在消失点以上的禁带宽度小于在消失点以下的禁带宽度, 由于 SSBW 和禁带上边缘接近, 有人认为 SH 型表面波与 SSBW 的相互作用导致禁带上边缘过早的 (premature) 崩塌 (collapse), 这样禁带上边缘与消失点之差必小于 κ 的幅度。所以 $|\kappa|$ 定义为消失点 (vanishing point) 与禁带下边缘之差

$$\kappa = \pm |\varepsilon| \frac{2\eta + |\varepsilon|}{2} \exp(j\theta_\kappa) \quad (4.2.25)$$

通过使 $D(\Delta_B) = q(\Delta_B)$ 和 $D(\Delta_+) = q(\Delta_+)$ 来确定 κ_B 和 η_B

$$\kappa_B = \mu \frac{|\varepsilon|^2}{2} \frac{\eta}{\eta + 2|\varepsilon|} \exp(j\theta_\kappa) \quad (4.2.26)$$

因为 $\delta_B = -|\kappa_B|$, 所以 δ_B 可确定为

$$\delta_B = \mu \frac{|\varepsilon|^2}{2} \frac{\eta}{\eta + 2|\varepsilon|} \quad (4.2.27)$$

$$\eta_B = \frac{\eta + 2|\varepsilon|}{2} \quad (4.2.28)$$

在 (4.2.25) 式中, 若 κ 是正的, (4.2.26) 式的 κ_B 就是负的, 同样 κ 是负的, κ_B 就选正的。相位 θ_κ 的存在表示反射系数可能是复数, 实际上反射系数复数值能出现在任何各向异性压电晶体中。

等式 (4.1.19)、(4.2.22)、(4.2.25)、(4.2.26) 和 (4.2.28) 分别表示了五个 Abbott's COM 参数 (Δ_V , Δ_B , κ , κ_B 和 η_B) 和两个 Plessky's COM 参数 (η 和 ε) 之间的联系。也就是说在知道 Plessky's COM 参数 η 和 ε 后, 通过这些等式就能求得 5 个 Abbott's COM 参数 Δ_V , Δ_B , κ , κ_B 和 η_B 。

§ 4.3 SH 型表面波变分原理的研究

现在我们从传统 Rayleigh 波的 COM 理论出发, 首先回顾 COM 方程和短路栅的色散关系, 根据波的扰动理论和分析理论^[84, 97], 说明短路栅色散关系与禁带上边缘和禁带下边缘之间的联系, 结合陈东培和 H. A. Haus 理论说明如何利用变分方法确定禁带上边缘频率和禁带下边缘频率, 进而求得 Plessky 的两个 COM 参数和 Abbott 的五个 COM 参数。

§ 4.3.1 传统 Rayleigh 波的 COM 理论

图 4.1 是 IDT 的一部分, V 是加在 IDT 上的电压。

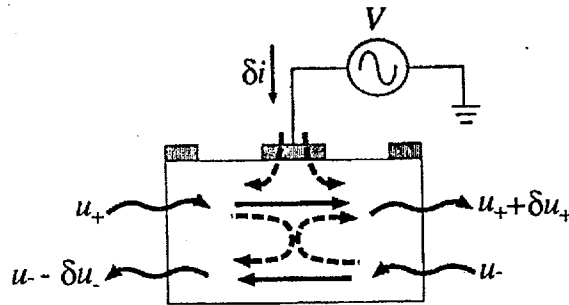


图 4.1 SAW 器件的一个单元

传统 Rayleigh 波的 COM 方程可写为

$$\frac{\partial u_+(x)}{\partial x} = -jku_+(x) - j\kappa_{12}u_-(x)\exp(-2\pi jMx/\Lambda) + j\zeta V \exp(-\pi jMx/\Lambda) \quad (4.3.1)$$

$$\frac{\partial u_-(x)}{\partial x} = jku_-(x) + j\kappa'_{12}u_+(x)\exp(+2\pi jMx/\Lambda) - j\zeta' V \exp(+\pi jMx/\Lambda) \quad (4.3.2)$$

式中 $u_\pm(x)$ 是沿 $\pm x$ 方向传播的模的振幅, κ_{12} 和 κ'_{12} 是互耦系数, ζ 表示激励效率

的一个系数，称为换能系数。

令 $u_{\pm}(x) = U_{\pm}(x) \exp(\mu j M x / \Lambda)$ ，得

$$\frac{\partial U_+(x)}{\partial x} = -j\theta_u U_+(x) - j\kappa_{12} U_-(x) + j\zeta V \quad (4.3.3)$$

$$\frac{\partial U_-(x)}{\partial x} = +j\theta_u U_-(x) + j\kappa_{12}' U_+(x) - j\zeta' V \quad (4.3.4)$$

如前所述，式中 $\theta_u = k - \pi M / \Lambda$ 是与 Bragg 条件得到的波数 k 的偏移，称为失谐系数。

下面计算总线电流 $I(x)$ 。由图 4.2 可知它在一个 IDT 周期 P_1 （一个 IDT 周

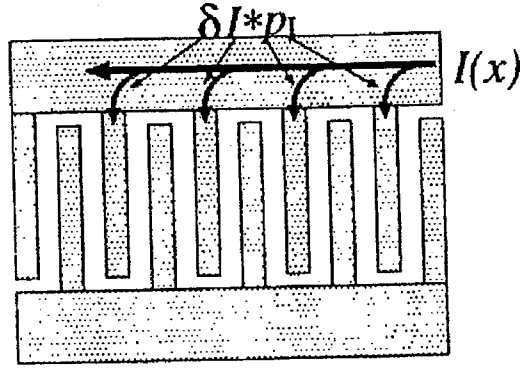


图 4.2 总线电流

期 P_1 等于两倍的栅周期 Λ ， $P_1 = 2\Lambda$ ）内的增量为

$$I(x + P_1) - I(x) = P_1 \{-j\eta U_+(x) - j\eta' U_-(x) + j\omega C V\} \quad (4.3.5)$$

式中 C 是单位长度的静电容， η 和 η' 是接收效率系数。在 P_1 长度内得

$$\frac{\partial I(x)}{\partial x} = -j\eta U_+(x) - j\eta' U_-(x) + j\omega C V \quad (4.3.6)$$

注意 $u_{\pm}$ 是有效值，而 V 和 $I(x)$ 是最大值，根据能量守恒关系

$$\frac{\partial (|u_+(x)|^2 - |u_-(x)|^2)}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial \Re [VI(x)^*]}{\partial x} \quad (4.3.7)$$

得到 $\Im(\beta) = 0$ ， $\kappa_{12}' = \kappa_{12}^*$ ， $\eta = 4\zeta$ ， $\eta' = 4\zeta'$ 。另外，当 IDT 由单相激励源驱动

时， $\zeta' = \zeta^*$ 。因此得到最终的 COM 方程为

$$\frac{\partial U_+(x)}{\partial x} = -j\theta_u U_+(x) - j\kappa_{12} U_-(x) + j\zeta V \quad (4.3.8)$$

$$\frac{\partial U_-(x)}{\partial x} = +j\theta_u U_-(x) + j\kappa_{12}^* U_+(x) - j\zeta^* V \quad (4.3.9)$$

$$\frac{\partial I(x)}{\partial x} = -4j\zeta^* U_+(x) - 4j\zeta U_-(x) + j\omega CV \quad (4.3.10)$$

当 $V = 0$ 时, IDT 等效于周期为 $P_1/2$ 的短路栅, 这时 COM 方程为

$$\frac{\partial U_+(x)}{\partial x} = -j\theta_u U_+(x) - j\kappa_{12} U_-(x) \quad (4.3.11)$$

$$\frac{\partial U_-(x)}{\partial x} = +j\theta_u U_-(x) + j\kappa_{12}^* U_+(x) \quad (4.3.12)$$

下面求解方程(4.3.11)和(4.3.12), 令 $\partial/\partial x \rightarrow \Omega$, 得

$$\begin{pmatrix} \Omega + j\theta_u & j\kappa_{12} \\ -j\kappa_{12}^* & \Omega - j\theta_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1(x) \\ U_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

当矩阵左边的系数行列式等于零时, 得到方程的非零解, 即

$$\Omega^2 + \theta_u^2 - |\kappa_{12}|^2 = 0$$

将上式进一步写为

$$\Omega = \mu j \sqrt{\theta_u^2 - |\kappa_{12}|^2} \equiv \mu j \theta_p$$

上式中 θ_p 的物理意义与前所述, 它代表与反射波相互耦合的被干扰模的波数,

$$\theta_p = k' - M\pi/P = \sqrt{\theta_u^2 - |\kappa_{12}|^2} \quad (4.2.1)$$

这就是短路栅阵中 Rayleigh 波的色散关系, 这个色散关系已广泛用于 SAW 器件的设计与研究中。

§ 4.3.2 变分原理和色散关系

根据微扰理论, 可令

$$\theta_u = k - \pi/\Lambda = \omega/V_{ref} - \pi/\Lambda + \Delta k \quad (4.3.13)$$

上式中 V_{ref} 常选用自由表面上 Rayleigh 波速 V_R , Δk 表示短路栅没有反射时, 即

$V = 0$ 且 $\kappa_{12} = 0$ 时, 在 Bragg 频率上一个周期内的相移。根据文献[14]有

$$k_R = \frac{\omega}{V_R} = \frac{\omega - \omega_0}{V_R} + \frac{\omega_0}{V_R} = \frac{\Delta\omega}{V_R} + \frac{k_g}{2} \quad (4.3.14)$$

$$\Delta k = \frac{\omega}{V_R + \Delta V} - \frac{\omega}{V_R} \approx -\frac{\omega}{V_R} \frac{\Delta V}{V_R} \approx -\frac{\omega_0}{V_R} \frac{\Delta V}{V_R} \quad (4.3.15)$$

式中 $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ 是在传输常数固定时栅阵对频率的扰动, Δk 是在频率固定时栅阵对传输常数的扰动, V_R 是 Rayleigh 波的速度, ΔV 表示栅阵对波速的扰动, 未扰动的传输常数 k_R 在 Bragg 频率 ω_0 等于 $k_g/2$, 即

$$k_R = \frac{\omega_0}{V_R} = \frac{k_g}{2} = \frac{\pi}{\Lambda} \quad (4.3.16)$$

由上面 (4.3.14)、(4.3.15)、(4.3.16) 三式可得

$$\theta_u = \frac{\omega}{V_R} - \frac{\pi}{\Lambda} - \frac{\omega_0}{V_R} \frac{\Delta V}{V_R} \quad (4.3.17)$$

用不同的波分析理论得到的表面波在短路栅中传播时的色散关系如图 4.3 所示, 从图中可以看到, 当频率等于短路栅禁带上边缘频率 ω_s^+ 或短路栅禁带下边缘频率 ω_s^- 时 $\theta_p = 0$ 。此时, 由 (4.2.1) 式得

$$\theta_u = \pm |\kappa_{12}| \quad (4.3.18)$$

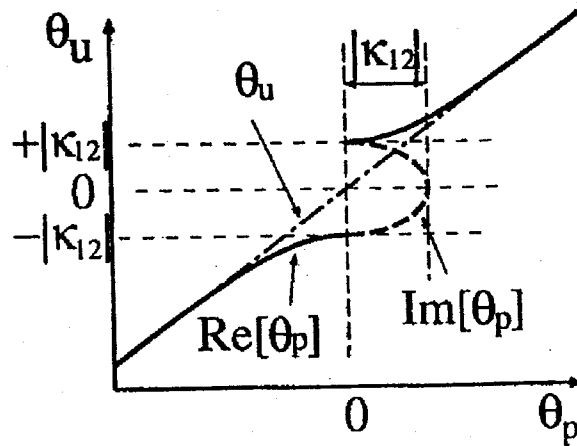


图 4.3 栅模的色散特性

由 (4.3.17) 和 (4.3.18) 两式得

$$\frac{\omega_s^\pm}{V_R} - \frac{\pi}{\Lambda} = \frac{\omega_0}{V_R} \frac{\Delta V}{V_R} \pm |\kappa_{12}| \quad (4.3.19)$$

如式 (4.1.9) 那样引入归一化的频率变化(normalized frequency shift)参数 Δ , 则有

$$\Delta_\pm = \left(\frac{\omega_s^\pm}{V_R} - \frac{\pi}{\Lambda} \right) / \frac{\pi}{\Lambda} = \frac{\Delta V}{V_R} \pm \frac{\Lambda}{\pi} |\kappa_{12}| \quad (4.3.20)$$

根据陈东培和 H. A. Haus 理论由变分原理推导的色散关系表达式为^[14]

$$\delta\omega = \omega - \omega_0 = \frac{\delta H_{11} - \omega_0^2 \delta W_{11}}{2\omega_0 W_{11}^{(0)}} \pm \frac{\delta H_{12} - \omega_0^2 \delta W_{12}}{2\omega_0 W_{11}^{(0)}} \quad (4.3.21)$$

两边同时除以 V_R 得

$$\frac{\omega - \omega_0}{V_R} = \frac{\delta H_{11} - \omega_0^2 \delta W_{11}}{V_R 2\omega_0 W_{11}^{(0)}} \pm \frac{\delta H_{12} - \omega_0^2 \delta W_{12}}{V_R 2\omega_0 W_{11}^{(0)}} \quad (4.3.22)$$

将 (4.3.19) 式和 (4.3.22) 式比较, 我们可以看出式 (4.3.22) 中的 ω 就是禁带上边缘频率 ω_s^+ 或禁带下边缘频率 ω_s^- , 因此有

$$\frac{\omega_s^\pm}{V_R} - \frac{\pi}{\Lambda} = k_R \left(\frac{\delta H_{11} - \omega_0^2 \delta W_{11}}{2\omega_0^2 W_{11}^{(0)}} \pm \frac{\delta H_{12} - \omega_0^2 \delta W_{12}}{2\omega_0^2 W_{11}^{(0)}} \right) \quad (4.3.23)$$

这样就可以利用变分原理的色散关系求得禁带上、下边缘归一化频率

$$\Delta_R^\pm = \frac{\delta H_{11} - \omega_0^2 \delta W_{11}}{2\omega_0^2 W_{11}^{(0)}} \pm \frac{\delta H_{12} - \omega_0^2 \delta W_{12}}{2\omega_0^2 W_{11}^{(0)}} \quad (4.3.24)$$

上式就是根据陈东培和 H.A.Haus 理论通过变分原理求得 Rayleigh 波色散曲线的禁带上、下边缘频率 $\Delta_\pm$ 。因此我们也得出一个结论: 由变分原理确定的色散关系 (4.3.21) 式是表示色散曲线上禁带上、下边缘频率与 Bragg 频率之差。

根据 K.Hashimoto 和 B.P.Abbott 等人的理论研究^[84], 我们知道传统 Rayleigh 波 COM 色散曲线和 Plessky 的 SH 型表面波 COM 色散曲线在禁带上边缘和禁带下边缘处几乎重合, 我们可以假定这两种 COM 色散关系曲线在禁带上边缘和禁带下边缘是一致的。因此, 上面利用变分原理求解色散曲线禁带上、下边缘频率也同样适用于 SH 型表面波。也就是说无论是 Rayleigh 波还是 SH 型表面波 (4.3.21) 式中的 $\delta\omega$ 都是相应色散曲线禁带上、下边缘频率 $\omega_s^\pm$ 与 Bragg 中心频率 ω_0 之差。

对于 SH 型表面波, 在 (4.3.21) 式的两边除以快剪切 SSBW 波速 V_B 得

$$\frac{\omega_s^\pm}{V_B} - \frac{\pi}{\Lambda} = k_B \left(\frac{\delta H_{11} - \omega_0^2 \delta W_{11}}{2\omega_0 W_{11}^{(0)}} \pm \frac{\delta H_{12} - \omega_0^2 \delta W_{12}}{2\omega_0 W_{11}^{(0)}} \right) \quad (4.3.25)$$

两边同除以 k_B 得 SH 型表面波色散曲线禁带上、下边缘频率为

$$\Delta_{SH}^\pm = \frac{\Lambda}{\pi} \frac{\omega_s^\pm}{V_B} - 1 = \frac{\delta H_{11} - \omega_0^2 \delta W_{11}}{2\omega_0 W_{11}^{(0)}} \pm \frac{\delta H_{12} - \omega_0^2 \delta W_{12}}{2\omega_0 W_{11}^{(0)}} \quad (4.3.26)$$

通过上式我们可以看出, 对于 SH 型表面波利用变分原理的色散关系求得禁带上、下边缘归一化频率的理论公式与 Rayleigh 波在形式上一样。在知道禁带上、下边缘频率后, 再由 (4.1.14)、(4.1.15) 两式确定 Plessky's COM 理论两个色散参数 η 和 $|\varepsilon|$, 即

$$\eta = (\sqrt{-2\Delta_-} + \sqrt{-2\Delta_+})/2 \quad (4.3.27)$$

$$|\varepsilon| = (\sqrt{-2\Delta_-} - \sqrt{-2\Delta_+})/2 \quad (4.3.28)$$

利用上面两式可求出 Plessky COM 理论的两个色散参数 η 和 $|\varepsilon|$, 通过 Plessky COM 理论色散关系中两个参数和 Abbott 色散关系中五个参数之间解析等同关系 (4.1.19)、(4.2.22)、(4.2.25)、(4.2.26) 和 (4.2.28) 式可确定 Abbott 的五个 COM 参数 Δ_V , Δ_B , κ , κ_B 和 η_B 。

§ 4.3.3 理论计算与结果

根据我们上面的理论分析, 要通过变分方法的色散关系去求 SH 型表面波 COM 参数, 必须求解 (4.3.26) 式, 在 Rayleigh 波 COM 模型中 (4.3.24) 式右边两项分别对应速度变化和反射系数。但是, 对于 SH 型表面波来说, 由于 COM 模型变了, 等式 (4.3.26) 右边两项的物理意义也就变了。把 (4.3.26) 式右边第二项写为

$$R = \frac{\delta H_{12} - \omega_0^2 \delta W_{12}}{2\omega_0 W_{11}^{(0)}} = \frac{1}{\pi} \left(R_m \frac{h}{\lambda} + R_e \right) \quad (4.3.29)$$

h 是指条厚度, λ 是波长。由文献[14]知道

$$R_e = -\frac{K^2}{4} \pi \left(\cos(\eta\pi) + \frac{P_{0.5}(-\cos\eta\pi)}{P_{-0.5}(-\cos\eta\pi)} \right) \quad (4.3.30)$$

上式中 $P_{\pm 0.5}(-\cos\eta\pi)$ 是 Legendre 函数, K^2 是机电耦合系数。至于 R_m 的计算方法在第三章中已作了详细的讨论。这里我们要具体说明的是 (4.3.26) 式右边第

一项如何计算, 将该项记为

$$\Pi = \frac{\delta H_{11} - \omega_0^2 \delta W_{11}}{2\omega_0^2 W_{11}^{(0)}} \quad (4.3.31)$$

用下标“m”表示与机械能量相联系的量, 下标“ps”表示与电位能变化相联系的量。

$$\Pi = \frac{(\delta H_{11} - \omega_0^2 \delta W_{11})_m + (\delta H_{11})_{ps}}{2\omega_0^2 W_{11}^{(0)}} = \Pi'_m + \Pi_e \quad (4.3.32)$$

其中

$$\Pi'_m = \frac{(\delta H_{11} - \omega_0^2 \delta W_{11})_m}{2\omega_0^2 W_{11}^{(0)}} \quad (4.3.33)$$

$$\Pi_e = \frac{(\delta H_{11})_{ps}}{2\omega_0^2 W_{11}^{(0)}} \quad (4.3.34)$$

分别表示质量负载和压电短路对 Π 的贡献, 由文献[14]知道

$$\Pi_e = -\frac{1}{4} \left(1 + \frac{P_{0.5}(-\cos \eta \pi)}{P_{-0.5}(-\cos \eta \pi)} \right) K^2 \quad (4.3.35)$$

现在我们看 Π'_m 如何求, 在 (4.3.33) 式中

$$\begin{aligned} (\delta H_{11})_{ps} = \int_{V'} dV \{ & \frac{\partial(u_i^{(1)})^*}{\partial x_j} e_{ijk} \frac{\partial(\Delta \phi^{(1)})}{\partial x_k} + \frac{\partial(\Delta \phi^{(1)})^*}{\partial x_i} e_{ijk} \frac{\partial(u_i^{(1)})}{\partial x_k} - \frac{\partial(\Delta \phi^{(1)})^*}{\partial x_j} \varepsilon_{ij} \frac{\partial(\phi_f^{(1)})}{\partial x_j} \\ & - \frac{\partial(\phi_f^{(1)})^*}{\partial x_i} \varepsilon_{ij} \frac{\partial(\Delta \phi^{(1)})}{\partial x_j} - \frac{\partial(\Delta \phi^{(1)})^*}{\partial x_i} \varepsilon_{ij} \frac{\partial(\Delta \phi^{(1)})}{\partial x_j} \} \end{aligned} \quad (4.3.36)$$

$$(\delta H_{11} - \omega_0^2 \delta W_{11})_m = \int_{\Delta V} dV \frac{\partial(u_i^{(1)})^*}{\partial x_j} c_{ijkl} \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial x_l} - \omega_0^2 \rho' \int_{\Delta V} dV (u_i^{(1)})^* u_i^{(1)} \quad (4.3.37)$$

$$W_{11}^{(0)} = \rho \int_{V'} dV |u_i^{(1)}|^2 \quad (4.3.38)$$

积分区间 V' 是指栅条以外的空间。 ΔV 是指栅条所占据的空间。

$$\Pi'_m = \left(\int_{\Delta V} dV \frac{\partial(u_i^{(1)})^*}{\partial x_j} c_{ijkl} \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial x_l} - \omega_0^2 \rho' \int_{\Delta V} dV (u_i^{(1)})^* u_i^{(1)} \right) \div \left(2\omega_0^2 \rho \int_{V'} dV |u_i^{(1)}|^2 \right) \quad (4.3.39)$$

因为栅条的厚度与波长相比一般很小, 在一阶近似条件下, 我们假设栅条中的振动位移和应力在厚度方向是均匀的且等于晶体表面的值, 并考虑栅条长度比

波长大得多, 假设所有场量在 y 方向是均匀的。注意到这些假设, 我们有

$$\Pi'_m = \left(\frac{1}{k_R^2} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{\partial (u_x^{(1)})^*}{\partial x} c_{11kl} \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial x_l} h dx - V_R^2 \rho \int_{-a/2}^{a/2} (u_i^{(1)})^* u_i^{(1)} h dx \right) \Big|_{z=0} \div 2V_R^2 \int_0^\infty |u_i^{(1)}|^2 P dz \quad (4.3.40)$$

上式中的 $\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\partial u_x^{(1)*}}{\partial x} c_{11kl} \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial x_l} dx$ 展开后为

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\partial u_x^{(1)*}}{\partial x} c_{11kl} \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial x_l} dx &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left\{ \frac{\partial u_x^{(1)*}}{\partial x} c_{11} \frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial u_x^{(1)*}}{\partial x} c_{12} \frac{\partial u_y^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial u_x^{(1)*}}{\partial x} c_{13} \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial z} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial u_x^{(1)*}}{\partial x} c_{14} \left(\frac{\partial u_y^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial y} \right) + \frac{\partial u_x^{(1)*}}{\partial x} c_{15} \left(\frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial x} \right) + \frac{\partial u_x^{(1)*}}{\partial x} c_{16} \left(\frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial u_y^{(1)}}{\partial x} \right) \right\} dx \end{aligned} \quad (4.3.41)$$

对于压电晶体仍按第三章那样取位移尝试函数

$$u_j^{(1)} = \sum_{n=1}^4 X_{jn} e^{-j\alpha_n K_R z} e^{-jK_R x} \quad (3.3.9)$$

$$u_j^{(2)} = \sum_{n=1}^4 X_{jn}^* e^{j\alpha_n^* K_R z} e^{jK_R x} \quad (3.3.10)$$

将 (3.3.9) 式和 (3.3.10) 式及立方 $m3m$ 晶体 (如金、银、铝) 的弹性常数代入 (4.3.40) 式得到晶体对称性为立方 $m3m$ 金属栅条引起的速度偏移

$$\Pi'_{m1} = \Pi_{m1} \frac{h}{\lambda} \quad (4.3.42)$$

$$\text{式中} \quad \Pi_{m1} = \frac{\pi}{2} \frac{c_{11}^* X^* X + c_{12}^* X^* F - V_R^2 \rho (X^* X + Y^* Y + Z^* Z)}{V_R^2 \rho \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 \frac{X_m X_n^* + Y_m Y_n^* + Z_m Z_n^*}{j(\alpha_m - \alpha_n^*)}} \quad (4.3.43)$$

将 (3.3.9) 式和 (3.3.10) 式及四方 $4/mmm$, 六角 $6/mmm$ 晶体 (如铟、钽) 的弹性常数代入 (4.3.40) 式得到晶体对称性为四方 $4/mmm$, 六角 $6/mmm$ 金属栅条引起的速度偏移计算公式

$$\Pi'_{m2} = \Pi_{m2} \frac{h}{\lambda} \quad (4.3.44)$$

$$\text{式中} \quad \Pi_{m2} = \frac{\pi}{2} \frac{c_{11}^* X^* X + c_{13}^* X^* F - V_R^2 \rho (X^* X + Y^* Y + Z^* Z)}{V_R^2 \rho \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 \frac{X_m X_n^* + Y_m Y_n^* + Z_m Z_n^*}{j(\alpha_m - \alpha_n^*)}}$$

(4.3.45)

将 (3.3.9) 式和 (3.3.10) 式及三角 3m 晶体(如 LiNbO₃、LiTaO₃、石英)的弹性常数代入 (4.3.40) 式得到晶体对称性为三角 3m 沟槽引起的速度偏移

$$\Pi_{m3} = \Pi_{m3} \frac{h}{\lambda} \quad (4.3.46)$$

$$\text{式中} \quad \Pi_{m3} = \frac{\pi}{2} \frac{c_{11}' X^* X + c_{13}' X^* F + c_{14}' X^* E - V_R^2 \rho (X^* X + Y^* Y + Z^* Z)}{V_R^2 \rho \sum_{n=1}^3 \sum_{n=1}^3 \frac{X_m X_n^* + Y_m Y_n^* + Z_m Z_n^*}{j(\alpha_m - \alpha_n^*)}} \quad (4.3.47)$$

$$\text{其中 } E = \sum_{n=1}^4 \alpha_n Y_n, \quad F = \sum_{n=1}^3 \alpha_n Z_n, \quad X = \sum_{n=1}^3 X_n, \quad Y = \sum_{n=1}^3 Y_n, \quad Z = \sum_{n=1}^3 Z_n.$$

由 (4.3.33) ~ (4.3.47) 式可以求得 (4.3.32) 式, 结合 (4.3.29) 式就可根据 (4.3.26) 式得到短路栅禁带上边缘频率或禁带下边缘频率 $\Delta_{\pm}$

$$\begin{aligned} \Delta_{\pm} &= \frac{\Lambda}{\pi} \frac{\omega_s^{\pm}}{V_B} - 1 \\ &= \Pi_m \frac{h}{\lambda} + \Pi_e \pm \frac{1}{\pi} \left(R_m \frac{h}{\lambda} + R_e \right) \\ &= \Pi_m \frac{h}{2\Lambda} + \Pi_e \pm \frac{1}{\pi} \left(R_m \frac{h}{2\Lambda} + R_e \right) \end{aligned} \quad (4.3.48)$$

将上式计算结果代入 (4.3.27)、(4.3.28) 两式即可确定 Plessky COM 理论的两个色散参数 η 和 $|\varepsilon|$, 然后 Plessky COM 理论色散关系中两个参数和 Abbott 色散关系中五个参数之间解析等同关系确定 Abbott 的五个 COM 参数。下面是我们求得 Plessky 的两个参数。

(1)、36° YX-LiTaO₃, Al 指条

$$K^2 = 0.056$$

$$\Pi_e = -\frac{1}{4} \left(1 + \frac{P_{0.5}(-\cos \eta \pi)}{P_{-0.5}(-\cos \eta \pi)} \right) K^2 = -0.020398$$

$$R_e = -\frac{K^2}{4} \pi \left(\cos(\eta \pi) + \frac{P_{0.5}(-\cos \eta \pi)}{P_{-0.5}(-\cos \eta \pi)} \right) = -0.02008972$$

$$R_m = -0.306; \quad \Pi_m = -0.158$$

$$\Delta_{\pm} = \Pi_m \frac{h}{2\Lambda} + \Pi_e \pm \frac{1}{\pi} \left(R_m \frac{h}{2\Lambda} + R_e \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\Pi_m \pm \frac{R_m}{\pi} \right) \frac{h}{2\Lambda} + \Pi_e \pm \frac{1}{\pi} R_e \\
&= - \left(0.158 \pm \frac{0.306}{3.14} \right) \frac{h}{2\Lambda} + \left(-0.023854 \pm \frac{-0.023498}{3.14} \right) \\
&\Delta_- = -0.0303 \frac{h}{\Lambda} - 0.0140 \\
&\Delta_+ = -0.1277 \frac{h}{\Lambda} - 0.026796 \\
&\eta = \left(\sqrt{-2\Delta_-} + \sqrt{-2\Delta_+} \right) / 2 \\
&|\varepsilon| = \left(\sqrt{-2\Delta_-} - \sqrt{-2\Delta_+} \right) / 2
\end{aligned}$$

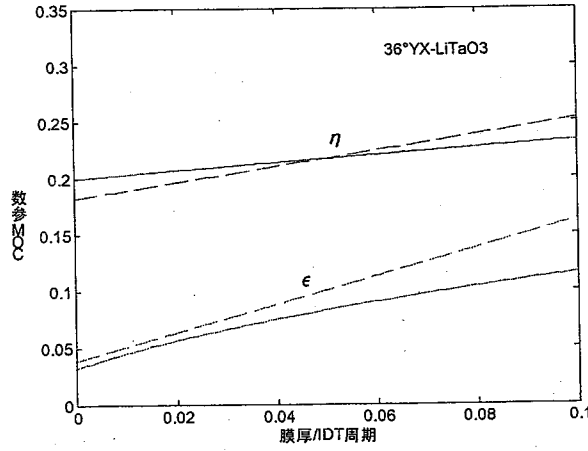


图 4.4 36° YX-LiTaO₃, Al 指条 COM 参数与膜厚/IDT 周期 ($h/2\Lambda$) 的关系曲线

在图 4.4 中, 实线表示的 COM 参数 η , ε 是由我们的理论分析计算得到的, 而虚线表示的 COM 参数 η , ε 是由日本 Chiba 大学 Hashimoto 等人开发的有限元程序得到的。在以后各图中均是表示。

(2)、41° YX-LiNbO₃, Al 指条

$$K^2 = 0.157$$

$$\Pi_e = -\frac{1}{4} \left(1 + \frac{P_{0.5}(-\cos \eta \pi)}{P_{-0.5}(-\cos \eta \pi)} \right) K^2 = -0.0571873$$

$$R_e = -\frac{K^2}{4} \pi \left(\cos(\eta \pi) + \frac{P_{0.5}(-\cos \eta \pi)}{P_{-0.5}(-\cos \eta \pi)} \right) = -0.056323$$

$$R_m = -0.0525; \quad \Pi_m = -0.0263$$

$$\Delta_- = -0.00479 \frac{h}{\Lambda} - 0.03925$$

$$\Delta_+ = -0.02155 \frac{h}{\Lambda} - 0.075125$$

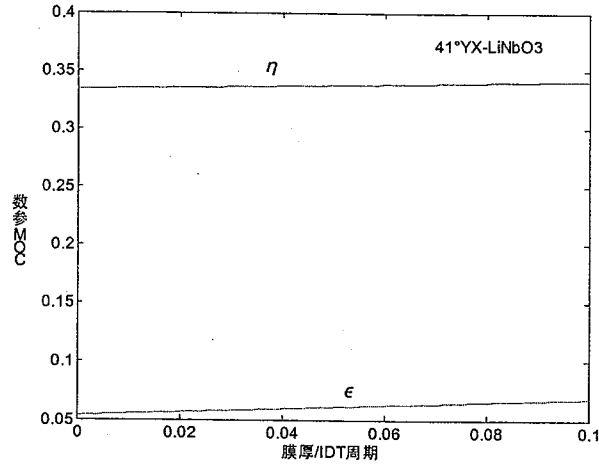


图 4.5 41° YX-LiNbO₃, Al 指条 COM 参数与膜厚/IDT 周期 ($h/2\Lambda$) 的关系曲线

(3)、64° YX-LiNbO₃, Al 指条

$$K^2 = 0.103$$

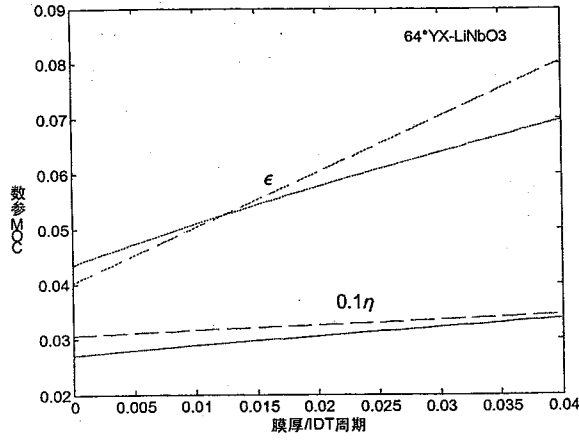
$$\Pi_e = -\frac{1}{4} \left(1 + \frac{P_{0.5}(-\cos \eta \pi)}{P_{-0.5}(-\cos \eta \pi)} \right) K^2 = -0.03752$$

$$R_e = -\frac{K^2}{4} \pi \left(\cos(\eta \pi) + \frac{P_{0.5}(-\cos \eta \pi)}{P_{-0.5}(-\cos \eta \pi)} \right) = -0.03695$$

$$R_m = -0.2308 \quad \Pi_m = -0.1372$$

$$\Delta_- = -0.03185 \frac{h}{\Lambda} - 0.02575$$

$$\Delta_+ = -0.10535 \frac{h}{\Lambda} - 0.04929$$


 图 4.6 $64^\circ \text{YX-LiNbO}_3$, Al 指条 COM 参数与膜厚/IDT 周期 ($h/2\Lambda$) 的关系曲线

 (4)、AT- 90°X 石英, Al 指条

$$K^2 = 0.000045849$$

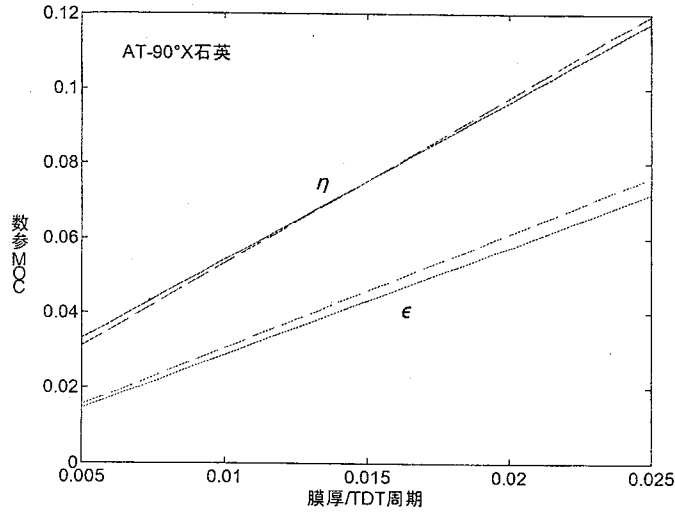
$$\Pi_e = -\frac{1}{4} \left(1 + \frac{P_{0.5}(-\cos \eta \pi)}{P_{-0.5}(-\cos \eta \pi)} \right) K^2 = -0.00001670$$

$$R_e = -\frac{K^2}{4} \pi \left(\cos(\eta \pi) + \frac{P_{0.5}(-\cos \eta \pi)}{P_{-0.5}(-\cos \eta \pi)} \right) = -0.000016448$$

$$R_m = -0.3373 \quad \Pi_m = -0.1919$$

$$\Delta_- = -0.04224 \frac{h}{\Lambda} - 0.000011462$$

$$\Delta_+ = -0.14966 \frac{h}{\Lambda} - 0.000021938$$


 图 4.7 AT-90°X 石英, AI 指条 COM 参数与膜厚/IDT 周期 ($h/2\Lambda$) 的关系曲线

 (5)、ST-90°X 石英 (0° , 128° , 90°), AI 指条

$$K^2=0.00159$$

$$\Pi_e = -\frac{1}{4} \left(1 + \frac{P_{0.5}(-\cos \eta \pi)}{P_{-0.5}(-\cos \eta \pi)} \right) K^2 = -0.0005792$$

$$R_e = -\frac{K^2}{4} \pi \left(\cos(\eta \pi) + \frac{P_{0.5}(-\cos \eta \pi)}{P_{-0.5}(-\cos \eta \pi)} \right) = -0.00057$$

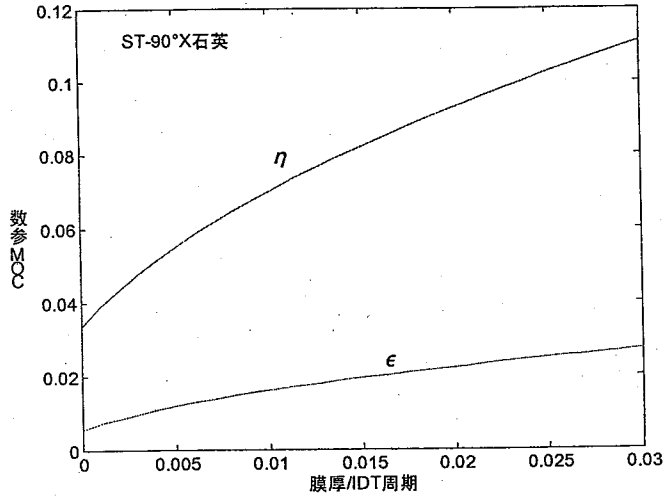
$$R_m = -0.5932 \quad \Pi_m = -0.3967$$

$$\Delta_{\pm} = \Pi_m \frac{h}{2\Lambda} + \Pi_e \pm \frac{1}{\pi} \left(R_m \frac{h}{2\Lambda} + R_e \right)$$

$$= \left(\Pi_m \pm \frac{R_m}{\pi} \right) \frac{h}{2\Lambda} + \Pi_e \pm \frac{1}{\pi} R_e$$

$$\Delta_- = -0.10389 \frac{h}{\Lambda} - 0.0003977$$

$$\Delta_+ = -0.29281 \frac{h}{\Lambda} - 0.0007607$$

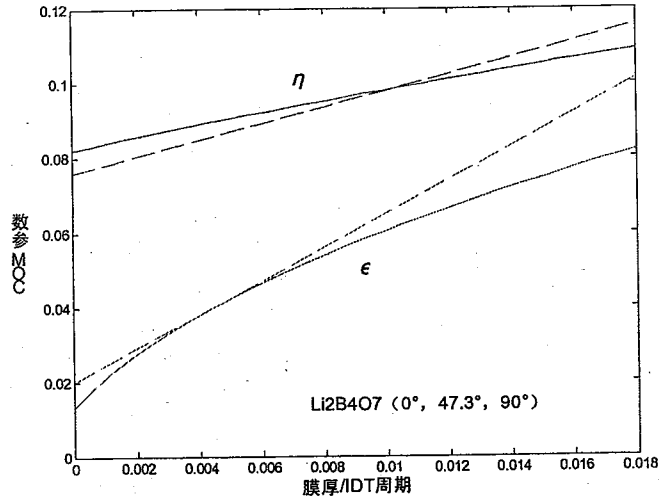

 图 4.8 ST-90°X 石英, Al 指条 COM 参数与膜厚/IDT 周期 ($h/2\Lambda$) 的关系曲线

 (6)、 $\text{Li}_2\text{B}_4\text{O}_7$ (0° , 47.3° , 90°), Al 指条

$$K^2=0.0095$$

$$\Pi_e = -\frac{1}{4} \left(1 + \frac{P_{0.5}(-\cos \eta \pi)}{P_{-0.5}(-\cos \eta \pi)} \right) K^2 = -0.003460$$

$$R_e = -\frac{K^2}{4} \pi \left(\cos(\eta \pi) + \frac{P_{0.5}(-\cos \eta \pi)}{P_{-0.5}(-\cos \eta \pi)} \right) = -0.0034069$$


 图 4.9 $\text{Li}_2\text{B}_4\text{O}_7$, Al 指条 COM 参数与膜厚/IDT 周期 ($h/2\Lambda$) 的关系曲线

$$R_m = -0.6618 \quad \Pi_m = -0.3411$$

$$\Delta_- = -0.06515 \quad \frac{h}{\Lambda} = 0.002375$$

$$\Delta_+ = -0.27595 \frac{h}{\Lambda} - 0.004545$$

从以上各图中可以看出, 我们的理论分析结果与 Hashimoto 有限元程序运算结果十分接近, 平均相差不到 10%。因此, 我们有理由相信我们的理论研究的正确的。

本章小结

本章涉及到如下内容:

B.P.Plessky's COM 理论适用于在周期栅阵中传播的剪切声表面波, 包括 BGW, STW、SSBW 和 leaky waves 等 SH 型声表面波。这个 COM 理论考虑了栅阵中相互反射的波(也包括散射的体波)在空间结构(也就是波的局限深度 the depth of localization of the wave)上的变化。当归一化扰动波数偏移为零时得到短路栅禁带上边缘频率或禁带下边缘频率, 并由此确定该 COM 理论的两个参数。

由于在 SH 型表面波器件设计不能直接应用 Plessky 的色散关系, B.P.Abbott 和 K.Hashimoto 提出了另一个 SH 型表面波器件 COM 分析方法, 在该 COM 理论中不仅考虑了两个向前和向后传播的声表面波模式, 而且还考虑了前、后方向传播的两个体声波模式, COM 方程由传统的两个变为四个且有五个 COM 参数, 通过在 Plessky's COM 色散关系和新的唯象色散关系之间建立一个解析等同关系来决定这五个参数。

在此以前, 利用陈东培和 H. A. Haus 理论求解 COM 参数方法只局限于压电晶体、各向异性及各向同性晶体中传播的 Rayleigh 波, 而不适用于 SH 型声表面波, 这是因为传统的 COM 模型对 SH 型声表面波不适用。本章创新性工作在于:

- (1)、首次将陈东培和 H.A.Haus 理论应用于 SH 型声表面波, 利用变分原理和 SH 型表面波 COM 模型分析了栅阵中 SH 型声表面波的传播特性, 通过我们的理论分析和数值计算得到了几种压电材料的 Plessky's COM 参数和 Abbott's COM 参数。
- (2)、根据 COM 理论, 我们首次解释了由陈东培和 H.A.Haus 理论得到的色散关系表达式的物理意义, 即该表达式表示的是色散曲线禁带上边缘和禁带下边缘频率与 Bragg 中心频率之差。

由此看到, 我们的工作丰富了变分原理分析声表面波在栅阵中传播特性的理论体系, 为 SH 型表面波器件的理论分析和设计提供了一个新途径。

第五章 厚金属栅的有限元方法与二指栅阵

静电场的理论分析

引言

为考虑指间多次反射效应,提取 COM 模型参数,也需要详细分析声表面波模式在周期金属栅格阵中的传播特性。从理论上讲,需要一种求解周期栅格阵下各种声表面模式传播问题的严格理论计算方法。

进入上个世纪九十年代以来人们在这方面做了大量工作,最具代表性的有:一是 K.Hashimoto 等人在 Bløtekjær 理论基础上,利用栅阵有效介电常数(Effective permittivity for grating)和离散格林函数(Discrete Green function)概念来分析栅阵表面波传播特性。二是 P. Ventura、V. P. Pleesky 和 Y. W. Zhang 等人利用周期格林函数(Periodic Green's function)和谐波导纳(Harmonic admittance)概念来研究栅阵表面波。这两个理论体系都涵盖了各种声表面模式传播特性分析;有限膜厚金属栅的有限元方法分析和 SAW 器件一周期内多电极等情况。这是我们自然想到能否将陈东培和 H. A. Haus 变分原理与有限元方法相结合去分析有限膜厚金属栅,他们的理论是否也适用于二指栅阵(Double-Electrode Grating)。

本章工作就是基于上述想法展开的,我们通过 Poynting 定理将陈东培和 H. A. Haus 理论公式的二维积分问题转为平面有限元问题。采用有限元方法使我们能用陈东培和 H. A. Haus 理论分析厚电极栅阵。另外,我们试图用陈东培和 H. A. Haus 理论分析二指栅阵,为此我们对二指栅阵电场分布作了理论分析,将二指栅阵中总电势表示为未扰动波表面电势和由栅条引起 Floquet 扰动项之和,讨论其具体理论计算方法。

§ 5.1 有限元方法在陈东培和 H. A. Haus 理论中的实现

前面我们用变分原理分析栅阵声表面波传播特性时,为了分析问题方便假设栅条很薄,其中质点振动位移和应力在厚度方向是均匀的,而实际上 SAW 器件的金属栅条总是有厚度的,尤其是在用石英基底制作小型化 SAW 谐振滤波器(small-size resonator filter)时栅条厚度一般都很大。栅条中质点振动位移和应力在厚度方向是不一致的。为了解决这个问题最为有效的方法就是有限元分析。

1992 年 Reichinger 和 Baghai-wadji 提出一种分析 SAW 在有限厚周期金属栅中传播时色散关系的方法^[98],他用有限元法(Finite Element Method, FEM)分析栅电极区,用边界元法(Boundary Element Method, BEM)分析基片区。FEM 对分析任意形状的电极都十分有效, BEM 则可以明显减少数值计算时间。但是这种方法对集中在电极边缘的电荷没有加以特殊考虑。

随后 Ventura 等人用 SDA 法(Spectral Domain Analysis, SDA)分析基片区声波的色散特性,这种方法与 BEM 相比要简单得多^[99, 100]。SDA 在分析有限长栅阵时十分有效。

1995 年 Endoh 和 Hashimoto 提出了计算 SAW 在周期性有限厚金属中传播时色散特性的另一种方法^[101]。这种方法同时用 FEM 和 SDA 两种方法分析栅电极

的电荷分布,并把栅间隙上电荷分布作为基片内电量的一部分来考虑,从而可以应用 Bløtekjær 理论,而 Bløtekjær 理论能够很快分析出各种声表面波在金属栅中的传播特性。Hashimoto 等人又把这种方法推广到声表面波在金属栅中斜向传播情况和多电极栅阵^[102~104]。并根据这种方法设计的软件 FEMSDA, OBLIQ 和 MULTI 已经在 SAW 研究人员中得到了广泛应用^[105, 106]。

陈东培和 H. A. Haus 理论是在压电晶体中根据变分原理的 Rayleigh-Ritz 方法推导的结果,而有限元方法是基于变分原理的 Rayleigh-Ritz 方法的另一种形式^[107]。因此我们要在陈东培和 H. A. Haus 理论中应用有限元方法解决栅条中质点振动位移和应力在厚度方向不一致的问题并不难。在这个过程中需要用到声场的 Poynting 定理。

§ 5.1.1 声场的 Poynting 定理

声场的 Poynting 定理是与电磁场的 Poynting 定理类比而来^[54],是描述声波在固体中传播时能量守恒关系的,这个理论把声波源提供的功率、经耗散机制损耗的功率、波场贮能的变化率和波的功率流相互联系起来。

固体中的声场理论建立在两个基本声场方程之上,即应变-位移关系和运动方程,即

$$\mathbf{S} = \nabla_s \mathbf{u} \quad (5.1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \mathbf{F} \quad (5.1.2)$$

其中 $\mathbf{S}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{T}$ 分别是应变张量、位移张量和应力张量, $\mathbf{F}$ 是体力场。因为质点速度

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \quad (5.1.3)$$

动量密度为

$$\mathbf{p} = \rho \mathbf{v} \quad (5.1.4)$$

这样 (5.1.1) 式和 (5.1.2) 式可变为

$$\nabla_s \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} \quad (5.1.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} - \mathbf{F} \quad (5.1.6)$$

— $\mathbf{T}$ 双点乘 (5.1.5) 式

$$-\mathbf{T} : \nabla_s \mathbf{v} = -\mathbf{T} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} \quad (5.1.7)$$

— $\mathbf{v}$ 单点乘 (5.1.6) 式

$$-\mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{T}) = -\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} \quad (5.1.8)$$

(5.1.7) 式+ (5.1.8) 式得

$$-\mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{T}) - \mathbf{T} : \nabla_s \mathbf{v} = -\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} - \mathbf{T} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} \quad (5.1.9)$$

利用恒等式

$$\nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}) = \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{T}) + \mathbf{T} : \nabla_s \mathbf{v} \quad (5.1.10)$$

(5.1.9) 式变为

$$-\nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}) = -\mathbf{T} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} - \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} \quad (5.1.11)$$

对声波经过的体积 V 积分, 并利用散度定理引入整个界面的积分

$$\oint (-\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}) \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = - \int_V \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} dV - \int_V \mathbf{T} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} dV + \int_V \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} dV \quad (5.1.12)$$

其中

$$\int_V \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} dV = P_s \quad (5.1.13)$$

是由声源供应给体积 V 的功率, 而

$$\int_V \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{\rho v^2}{2} dV \quad (5.1.14)$$

是体系中动能密度的变化率。在不考虑固体粘滞阻尼时

$$\int_V \mathbf{T} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} dV = \int_V c_{IJ} S_J \frac{\partial S_I}{\partial t} dV \quad (5.1.15)$$

是体系中弹性贮能(应变能)的变化率。声学的 Poynting 矢量定义为

$$\mathbf{P} = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{T} \quad (5.1.16)$$

Poynting 矢量被解释为在 $\hat{\mathbf{n}}$ 方向的功率流密度, (5.1.12) 式就是声场的 Poynting 定理的数学表达式, 其等式左边的面积分是通过闭合表面向外流出的总功率流。Poynting 定理说明声能—功率关系, 也就是说声源提供的功率、经耗散机制损耗的功率、声场贮能的变化率和声波的功率流是守恒的。

§ 5.1.2 有限元方法

在第三章里我们知道陈东培和 Haus 理论关于栅条力学负载贡献的反射系数为^[14, 36, 43]

$$(k_{12} \Lambda)_m = \frac{(\delta H_{12} - \omega_0^2 \delta W_{12})_m}{2\omega_0^2 W_{11}^{(0)}} \cdot \pi \quad (3.3.6)$$

其中

$$(\delta H_{12} - \omega_0^2 \delta W_{12})_m = \int_V dV \frac{\partial (u_i^{(1)})^*}{\partial x_j} c_{ijkl} \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial x_l} - \omega_0^2 \rho \int_V dV (u_i^{(1)})^* u_i^{(2)}$$

(3.3.4)

$$W_{11}^{(0)} = \rho \int_V dV |u_i^{(1)}|^2 \quad (3.3.5)$$

等式 (3.3.4) 右边第一项代表栅条内声波的弹性势能，第二项代表栅条内声波的动能。在压电晶体中，栅阵中沿 +x 方向传播的波和沿 -x 方向传播的波位移函数形式仍以 (3.3.9) 式和 (3.3.10) 式表示。

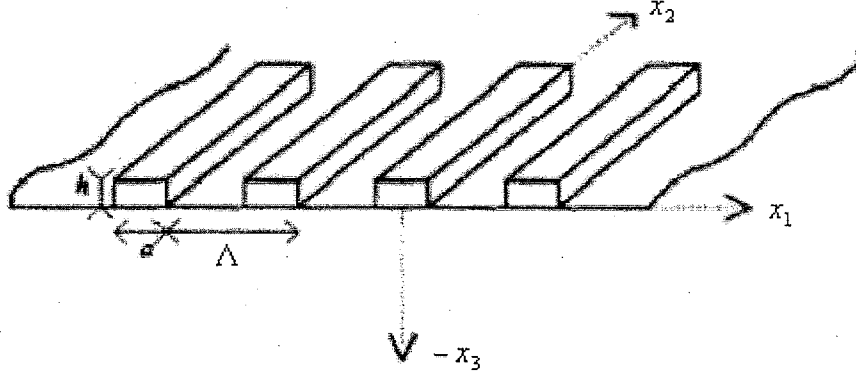


图 5.1 栅结构示意图

$$u_j^{(1)} = \sum_{n=1}^4 X_{jn} e^{-j\alpha_n K_R z} e^{-jK_R x} \quad (j=1,2,3) \quad (3.3.9)$$

$$u_j^{(2)} = \sum_{n=1}^4 X_{jn}^* e^{j\alpha_n^* K_R z} e^{jK_R x} \quad (j=1,2,3) \quad (3.3.10)$$

从上面两式可以看到栅阵中沿 +x 方向传播的波和沿 -x 方向传播的声波位移函数互为复数共轭，即

$$u_j^{(2)} = (u_j^{(1)})^* \quad (5.1.17)$$

所以，(3.3.4) 式右边第一项可写为

$$\int_{\Delta V} dV \frac{\partial (u_i^{(1)})^*}{\partial x_j} c_{ijkl} \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial x_l} = \int_{\Delta V} dV \mathbf{S}^* : \mathbf{c} : \mathbf{S} = \int_{\Delta V} dV \mathbf{T}^* : \mathbf{S} \quad (5.1.18)$$

第二项写为

$$\omega_0^2 \rho' \int_{\Delta V} dV (u_i^{(1)})^* u_i^{(2)} = \omega_0^2 \rho' \int_{\Delta V} dV (u_i^{(1)})^* \cdot (u_i^{(1)})^* \quad (5.1.19)$$

(3.3.4) 式变为

$$(\delta H_{12} - \omega_0^2 \delta W_{12})_m = \left(\int_{\Delta V} dV \mathbf{T} : \mathbf{S} - \omega_0^2 \rho' \int_{\Delta V} dV u_i^{(1)} u_i^{(1)*} \right) \quad (5.1.20)$$

为了使 (3.3.4) 式与 Poynting 定理联系起来，考虑声场是时间简谐场且 SAW 器件栅条中彻体力 $\mathbf{F} = 0$ ，(5.1.12) 式变为

$$\oint (-j\omega_0 \mathbf{u} \cdot \mathbf{T}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = - \int j\omega_0 \mathbf{u} \cdot j\omega_0 (\rho \cdot j\omega_0 \mathbf{u}) dV - \int \mathbf{T} : j\omega_0 \mathbf{S} dV$$

$$= j\omega_0(\omega_0^2 \rho \int \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} dV - \int \mathbf{T} : \mathbf{S} dV)$$

也就是

$$j\omega_0 \oint (-\mathbf{u} \cdot \mathbf{T}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = j\omega_0(\omega_0^2 \rho \int \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} dV - \int \mathbf{T} : \mathbf{S} dV) \quad (5.1.21)$$

对于 SAW 器件，平面声波在金属栅中沿 x_1 方向传播，栅电极周期为 Λ ，长度为 b ，厚度为 h ，如图 5.1。电极在 x_2 方向无限长， x_3 方向为电极厚度方向。因为栅条上表面受到的应力为零，四个侧面的法向与应力成 90° ，所以 (5.1.21) 式可表示为

$$b \int_{-\Lambda/2}^{+\Lambda/2} (-\mathbf{u} \cdot \mathbf{T}) \Big|_{x_3=0^+} dx_1 = (\omega_0^2 \rho \int \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} dV - \int \mathbf{T} : \mathbf{S} dV) \quad (5.1.22)$$

上式左边是在 $x_3 = 0^\pm$ 处基片传递给栅条的声能量 $P^\pm$ ，如图 5.2。

$$P^\pm = \mp b j \omega \int_{-\Lambda/2}^{+\Lambda/2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{T} \Big|_{x_3=0^\pm} dx_1 \quad (5.1.23)$$

从上面分析我们可以得出结论：表达式 $(\delta H_{12} - \omega_0^2 \delta W_{12})_m$ 实际上是 SAW 器件基片传递给金属栅能量（动能密度和弹性势能密度之和）复数共轭。由 (5.1.20) 和 (5.1.22) 两式得

$$(\delta H_{12} - \omega_0^2 \delta W_{12})_m = \left(-b \int_{-\Lambda/2}^{+\Lambda/2} (-\mathbf{u} \cdot \mathbf{T}) \Big|_{x_3=0^+} dx_1 \right)^* \quad (5.1.24)$$

结合电极栅具体力学边界条件，上式中 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{T}$ 分别是质点位移 $u_i(x_1)$ 和应力

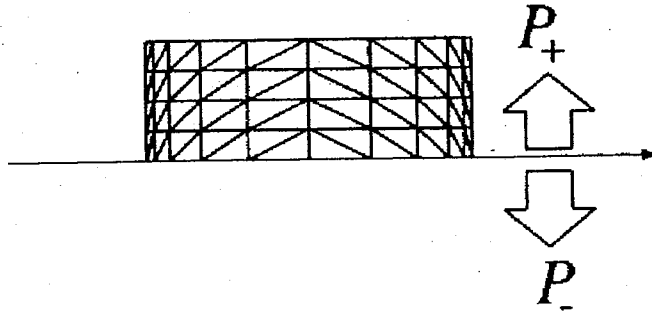


图 5.2 电极区的 FEM 分析和边界上的功率流

$T_{3i}(x_1)$ 构成的矢量

$$\mathbf{u}(x_1) = \{u_1(x_1), u_2(x_1), u_3(x_1)\} \quad (5.1.25)$$

$$\mathbf{T}(x_1) = \{T_{31}(x_1), T_{32}(x_1), T_{33}(x_1)\} \quad (5.1.26)$$

为了分析 $x_3 = 0^+$ 处的声场, 规定 $\hat{\mathbf{u}}$ 和 $\hat{\mathbf{T}}$ 分别是 $x_3 = 0^+$ 节点处质点位移积分和应力积分组成的矢量。如果驱动频率 ω 是给定的, 那么在栅电极区根据有限元法得到它们的关系为

$$\hat{\mathbf{T}} = -[\mathbf{F}]\hat{\mathbf{u}} \quad (5.1.27)$$

$[\mathbf{F}]$ 是有限元法推导出的矩阵。把 (5.1.27) 式代入 (5.1.23) 式得

$$P^+ = j\omega b \hat{\mathbf{u}} \cdot [\mathbf{F}]^t \hat{\mathbf{u}} \quad (5.1.28)$$

t 表示转置矩阵。把 (5.1.27) 式代入 (5.1.24) 式得

$$(\delta H_{12} - \omega_0^2 \delta W_{12})_m = (-b \hat{\mathbf{u}} [\mathbf{F}]^t \hat{\mathbf{u}})^* \quad (5.1.29)$$

力学负载贡献的反射系数 (3.3.6) 式的分子就可用 (5.1.29) 式表示的有限元方法计算, (3.3.6) 式的分母仍按以前的方法进行计算, (5.1.29) 式中指条长度 b 在该式代入 (3.3.6) 式时因为分母也有该量而消掉。这样利用 Poynting 定理和有限元法, 我们成功地把 (3.3.4) 式的三维积分问题转为用平面有限元法求解的数值计算问题。

这个理论分析过程中不再象以前那样假设在栅电极厚度方向质点振动位移是相同的, 而是用有限元法使各节点的质点位移互不一样, 使我们的理论分析更接近实际情况, 从而提高栅条反射系数理论计算结果的精确度。另外, 有限元方法使我们能够分析栅条横截面为任意形状栅条的质量加载效应, 而不是局限于规则几何形状的栅条。

注意我们只对电极区采用有限元方法分析, 基片区的分析方法仍同以前一样。

下面我们具体讨论栅条中节点处质点位移积分 $\hat{\mathbf{u}}$ 计算方法, 首先分析 $x_3 = 0^-$ 处的声场。因为场的变化满足 Floquet 定理, 则波数为 k_0 的栅振动模 $\mathbf{T}(x_1)$ 可以表示为

$$\mathbf{T}(x_1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{T}(k_n) \exp(-jk_n x_1) \quad (5.1.30)$$

这样, 我们就把应力张量从位移域转到波数域。

其中 $k_n = k_0 + 2n\pi/\Lambda$, 且

$$\mathbf{T}(k_n) = \frac{1}{\Lambda} \int_{-\Lambda/2}^{+\Lambda/2} \exp(jk_n x_1) \mathbf{T}(x_1) dx_1 \quad (5.1.30)$$

根据数值积分和 (5.1.27) 式, 又因为在栅间隙区 $T(x_1)=0$, 则上式可写为

$$T(k_n) = [G(k_n)]\hat{\mathbf{t}} = -[G(k_n)][F]\hat{\mathbf{u}} \quad (5.1.31)$$

$[G(k_n)]$ 是推导 (5.1.30) 式变换形式的一个矩阵。同样, 我们可以把位移 $u(x_1)$ 、表面电势 $\phi(x_1)$ 和电量 $q(x_1)$ 利用傅里叶变换分别转换为波数域的 $U(k_n)$ 、 $\Phi(k_n)$ 和 $Q(k_n)$ 的形式, 于是 (5.1.23) 式中的 P^- 改写为

$$P^- = j\omega\Lambda \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T(k_n)^* \cdot U(k_n) \Big|_{x_3=0^-} \quad (5.1.32)$$

可以用下面的公式把这些变量联系起来

$$U(k_n) = S_n k_n^{-1} \{ [R_{11}(k_n)]T(k_n) + [R_{12}(k_n)]Q(k_n) \} \quad (5.1.33)$$

$$\Phi(k_n) = S_n k_n^{-1} \{ [R_{21}(k_n)]T(k_n) + [R_{22}(k_n)]Q(k_n) \} \quad (5.1.34)$$

式中 R_{ij} 是有效声导纳矩阵, $S_n = \text{sgn}(k_n)$ 。

根据表面边界条件, $T(k_n)|_{x_3=0^+} = T(k_n)|_{x_3=0^-}$, 把 (5.1.31) 式和 (5.1.33) 式代入 (5.1.32) 式得

$$\begin{aligned} P^- = j\omega\Lambda \sum S_n k_n^{-1} \hat{\mathbf{u}}^* \cdot [F]^* [G(k_n)]^* \\ \times \{ [R_{11}(k_n)][G(k_n)][F]\hat{\mathbf{u}} - [R_{12}(k_n)]Q(k_n) \} \end{aligned} \quad (5.1.35)$$

边界总功率 P 等于 $P^+ + P^-$ 。因为 $u(x_1)$ 在边界处连续, 如果方程的解是精确的, P 应该为零。虽然经过数值计算, P 一般不为零, 但是 $\hat{\mathbf{u}}$ 的每一个分量 $u(x_1)$ 必须满足下面的驻波条件

$$\frac{\partial P}{\partial u(x_l)^*} = 0 \quad (5.1.36)$$

把 (5.1.28) 式和 (5.1.35) 式代入 (5.1.36) 式得

$$\hat{\mathbf{u}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [L(k_n)]Q(k_n) \quad (5.1.37)$$

其中

$$L(k_n) = [A]^{-1} [G(k_n)]^* [R_{12}(k_n)]$$

且

$$[\mathbf{A}] = \frac{S_n k_n}{\Lambda} [\mathbf{I}] + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\mathbf{G}(k_n)]^* [\mathbf{R}_{11}(k_n)] [\mathbf{G}(k_n)] [\mathbf{F}]$$

通过上面的理论分析我们可以看到, 由 (5.1.37) 式可求得节点处质点位移积分矢量。这样由 (5.1.27) 式可得节点处质点应力积分矢量 $\hat{\mathbf{T}}$ 。最后由 (5.1.24) 式可求得表达式 $(\delta H_{12} - \omega_0^2 \delta W_{12})_m$ 具体数值, 从而根据公式 (3.3.6) 式计算得到力学负载贡献的反射系数。

在这一小节里, 我们首先从固体声场基本理论, 即声场的应变-位移关系和运动方程出发回顾了声场 Poynting 定理的具体推导过程和其物理意义。根据力学负载贡献的反射系数计算公式, 并考虑栅条长度比波长大得多, 假设所有场量在栅条长度方向是均匀的, 从而可以将栅条的三维积分问题转为二维积分问题, 然后根据 Poynting 定理, 我们得出结论:

表达式 $(\delta H_{12} - \omega_0^2 \delta W_{12})_m$ 是 SAW 器件基片传递给金属栅能量 (动能密度和弹性势能密度之和) 的复数共轭, 由此我们首次利用 Poynting 定理将陈东培和 H.A.Haus 理论与有限元方法结合起来, 使栅条反射系数的二维积分问题转为平面有限元问题, 通过有限元方法我们可以考虑栅条中声波振动位移在厚度方向上是变化的这一实际情况。而无需象以前那样假设栅条中声波振动位移在厚度方向上是一致的, 使理论分析更接近实际, 提高计算结果精度。同时, 由于使用了有限元方法, 栅条横截面不再局限于规则几何形状, 有限元方法使我们能够分析横截面为任意形状栅条的力学负载效应。

我们对电极区采用有限元方法分析, 基片区的分析方法仍同以前一样, 这样可以明显节省计算时间。

在这里, 我们还利用傅里叶变换, 将应力张量、位移张量、电势和电荷从位移域转到波数域, 给出了在波数域中求出节点处质点位移积分矢量 $\hat{\mathbf{u}}$ 及节点处质点应力积分矢量 $\hat{\mathbf{T}}$ 的具体理论方法。

本小节中我们只给出了理论分析结果, 具体的数值计算和程序编写工作留待以后进一步进行。

§ 5.2 二指栅阵静电场的理论分析

在此之前, 我们将陈东培和 H. A. Haus 理论由各向异性晶体推广到压电晶体, 由一般 Rayleigh 波推广到 SH 型表面波。并且将有限模厚金属栅的有限元方法用于陈东培和 H. A. Haus 理论。但是这些理论分析都局限于单指栅阵 (一个周期内正、负电极各一根), 现在我们试图根据陈东培和 H. A. Haus 理论分析声表面波在二指栅阵 (Double-Electrode Gratings 也称分裂指 split strip) 中相关特性。

陈东培和 H. A. Haus 理论将栅条反射系数根据其产生的物理机制分为压电短路贡献反射系数和力学负载引起反射系数。在这一小节里我们只讨论压电短路贡献的反射系数。在第三章中我们将电势尝试函数取为如下形式

$$\phi = \phi_f + \Delta\phi \quad (3.3.1)$$

其中 ϕ_f 是未扰动波的表面电势, 简称未扰动电势 (Unperturbed Potential), $\Delta\phi$ 是 Floquet 散射分量 (scattered Floquet components), 其具体表达式是直接引用 Datta 理论^[35]。由于 Datta 理论分析方法只适用单指栅阵, 现在我们在讨论二指栅阵时就不能再使用该理论了。

Aoki 理论^[33,34]讨论的是二指栅阵静电场分布问题, 然而它将其未扰动的表面电势和 Floquet 散射电势合为一项, 由一个无穷级数表示。而不是将 Floquet 散射分量象 (3.3.1) 式那样单独表示, 因而从 Aoki 理论公式中不能知道 Floquet 散射分量 $\Delta\phi$ 。根据我们所掌握的资料^[24, 29-35, 108-110], 目前还没有学者在研究多

电极栅阵静电场问题时单独给出 Floquet 散射分量 $\Delta\phi$ 。而按照陈东培和 H. A. Haus 理论的变分方法确定压电短路反射特性时, 必须知道由栅条反射引起的 Floquet 散射分量。为了解决这个问题, 我们将 Datta 理论推广到二指栅阵, 给出声表面波在二指栅阵中传播时 Floquet 散射分量的理论计算公式。以便进一步用陈东培和 H. A. Haus 理论分析声波在分裂周期金属栅阵中传播特性。

§ 5.2.1 栅阵静电场的主要基础理论

声波在无限长周期栅阵中传播时, 它的相关场量如位移场、电势场都服从 Floquet 定理, 栅阵静电场理论都是建立在 Floquet 定理之上的。其中最为著名、重要的理论之一是 Bløtekjær 理论^[31,32], 它在 SAW 器件理论分析中有着广泛的应用, 例如 Hashimoto 的工作就是在 Bløtekjær 理论上开展的。Bløtekjær 给出一个周期内单指栅阵的电场表达式, Aoki 理论是 Bløtekjær 理论在二指栅阵情况下的推广。

这里, 对 Floquet 定理、Bløtekjær 理论、Aoki 理论和 Datta 理论作简单描述。为后面我们的工作——将 Datta 理论推广到双电极情况做好准备。

(1)、Floquet 定理

假设栅阵无限长 (见图 5.3), 且每一周期栅都与其它周期栅等效。如果存在称为栅模的简正模, 那么它们在任一周期内的场分布 $u(x)$ 与其它周期内的场分布必须相同, 即 $u(x)$ 必须满足下面条件

$$u(x + \Lambda) = u(x) \exp(-jk\Lambda) \quad (5.2.1)$$

这就是 Floquet 定理。 k 是栅模的波数, Λ 是栅阵周期。

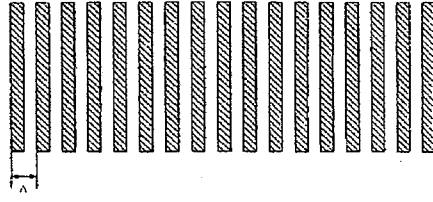


图 5.3 栅结构

定义一个函数 $U(x) = u(x) \exp(+jk\Lambda)$ ，由 Floquet 定理可知， $U(x)$ 必须是周期为 Λ 的周期性函数，这说明 $U(x)$ 可以用 Fourier 展开形式来表示

$$U(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \exp(-2\pi j n x / \Lambda) \quad (5.2.2)$$

于是得到

$$u(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \exp\{-j(k + 2n\pi / \Lambda)x\} \quad (5.2.3)$$

上面关系式说明在周期为 Λ 的周期性栅阵中，场可以用离散波数 $k_n = 2\pi n / \Lambda + k$ 的正弦项之和来表示。换句话说，空间频率为 $2\pi n / \Lambda + k$ 的波分量是由波数为 k 的入射波经空间调制 (spatial modulation) 产生的。

(2)、Bløtkekjaer 理论

Bløtkekjaer 等人^[31, 32]根据 Floquet 定理将一个周期内单指栅阵电场表示为正弦函数的无限多项之和，即

$$E_{1x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{1n} e^{-j(s+n)\theta} \quad (5.2.4)$$

其中 $\theta = 2\pi x / \Lambda$ ， $s = k\Lambda / 2\pi$ ，见图 5.4， A_{1n} 是待定系数，利用栅阵边界条件和 Legendre 多项式特性可确定

$$A_{1n} = \sum_{m=M_1}^{M_2} \alpha_{1m} S_{n-m} P_{n-m}(\cos \Delta) \quad (5.2.5)$$

$$\sum_{m=N_1}^{N_2+1} \alpha_{1m} S_{N_0-m} P_{N_0-m}(\cos \Delta) = A_0 \quad (5.2.6)$$

$$\sum_{m=N_1}^{N_2+1} \alpha_{1m} (S_{n-m} - \frac{\varepsilon_{\infty}}{\varepsilon_0} S_{n+N}) P_{n-m}(\cos \Delta) = 0 \quad (5.2.7)$$

其中 S_n 是符号函数， P_n 是 Legendre 多项式， $\Delta = \pi a / \Lambda$ ， α_{1m} 是待定系数。在

Bløttekjær 理论中, 先由 (5.2.6)、(5.2.7) 两式求得系数 α_{1m} , 代入 (5.2.5) 式求出系数 A_{1n} , 最后由 (5.2.4) 式得到电极间隙的电场

$$E_{1x} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{-j(\varepsilon_{\infty})^{-1} A_{1m} \operatorname{sgn}(x) \exp(-jk_{m-0.5}x)}{\sqrt{-\cos(k_g x) + \cos \Delta}} \quad (5.2.8)$$

电极上电荷 $q(x)$ 也能同时求出。

(3)、Aoki 理论

Aoki 等人^[33, 34]将 Bløttekjær 理论推广到二指栅阵, 在 Aoki 理论中, 二指栅阵中的电场仍由 (5.2.4) 式表示, 但系数 A_{1n} 表达式改为

$$A_{2n} = \sum_{m=M_1}^{M_2} \alpha_{2m} B_{n-m} \quad (5.2.9)$$

上式中系数 B_{n-m} 为

$$B_n = \sum_{m=0}^{|n|-1} P_m(\cos \Delta) P_{|n|-1-m}(\cos \Delta) \cos\{(2m - |n| + 1)\alpha\} \quad (5.2.10)$$

其中 $\alpha = \pi d / \Lambda$ (d 是两个电极间距, 见图 5.5), 系数 α_{2m} 由下式确定

$$\sum_{m=M_1}^{M_2} \alpha_{2m} (\varepsilon(n) S_{n+N} - \varepsilon_{\infty} S_{n-m}) B_{n-m} = 0 \quad (5.2.11)$$

最后由该理论给出二指栅阵的电场表达式为

$$E_{2x} = \{f_1(x)g_2(x) + f_2(x)g_1(x)\} \sum_{m=M_1}^{M_2} A_{2m} \exp(-jk_m x) \quad (5.2.12)$$

上式中 $f_i(x)$ 和 $g_i(x)$ ($i=1$ or 2) 是加权函数。

(4)、Datta 理论

Datta 等人^[35]在分析单指栅阵的电势时, 将一周期内有单指栅阵入射电势和扰动电势分开表示, 未扰动波的表面电势为

$$\phi_s = \phi_+ e^{-j(s+N)\theta} \quad (5.2.13)$$

由栅条产生的 floquet 项扰动电势为

$$\phi_e = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n e^{-j(s+n)\theta} \quad (5.2.14)$$

总电势为上面两项之和

$$\phi(\theta) = \phi_+ e^{-j(s+N)\theta} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n e^{-j(s+n)\theta} \quad (5.2.15)$$

由 (5.2.15) 式得到表面电场表达式为

$$E_{3x}(\theta) = \frac{j2\pi}{\Lambda} e^{-js\theta} (\phi_+ e^{-j(s+N)\theta} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n e^{-j(s+n)\theta}) \quad (5.2.16)$$

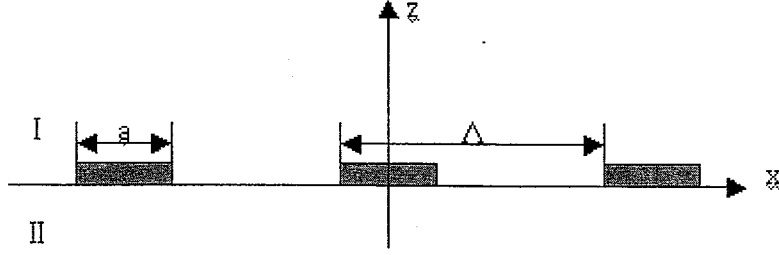


图 5.4 单指栅阵

栅阵的边界条件是在金属栅条上电场为零

$$E_x(\theta) = 0 \quad |\theta| < \Delta \quad (5.2.17)$$

在电极间隙内电位移连续

$$D_z(\theta) = 0 \quad \Delta < |\theta| < \pi \quad (5.2.18)$$

由 (5.2.15) ~ (5.2.18) 式得

$$e^{-jN\theta} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{3n} e^{-jn\theta} = 0 \quad |\theta| < \Delta \quad (5.2.19)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n A_{3n} e^{-jn\theta} = 0 \quad \Delta < |\theta| < \pi \quad (5.2.20)$$

上面两式系数 A_{3n} 为

$$\begin{aligned} A_{3n} &= (s+n)\phi_n / (s+N)\phi_+ \\ &= \sum_{m=0}^N \alpha_{3m} S_n P_{n+m-N-1}(\cos \Delta) + \alpha_{N+1} S_n P_n(\cos \Delta) \end{aligned} \quad (5.2.21)$$

其中系数 α_{3m} 的确定见文献[35], 具体是

$$\alpha_{30} = -\frac{1}{2} \quad (5.2.22)$$

$$\alpha_{3l} = -\sum_{m=0}^{l-1} \alpha_{3m} P_{l-m}(\cos \Delta) \quad l=1 \text{ to } N \quad (5.2.23)$$

由 (5.2.20)、(5.2.21) 两式确定 ϕ_n ，再将 ϕ_n 代入 (5.2.15) 式就可求得总电势 $\phi(\theta)$ 和代入 (5.2.14) 式可求得 Floquet 散射分量 $\Delta\phi$ 。

§ 5.2.2 Datta 理论在二指栅阵的推广

和 Datta 理论推导过程一样，我们首先也将二指栅阵中的总电势表示为未扰动波的表面电势和由栅条产生的 floquet 项扰动电势之和，

$$\phi(\theta) = \phi_+ e^{-j(s+N)\theta} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n e^{-j(s+n)\theta} \quad (5.2.15)$$

因此可得电场表达式为

$$E_x(\theta) = \frac{j2\pi}{\Lambda} e^{-js\theta} (\phi_+ e^{-j(s+N)\theta} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n e^{-j(s+n)\theta}) \quad (5.2.16)$$

电位移表达式为

$$D_z(\theta) = \frac{2\pi}{\Lambda} (\varepsilon_p + \varepsilon_0) e^{-js\theta} \times \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n (s+n) \phi_n e^{-jn\theta} \right) \quad (5.2.17)$$

上面三个表达式都与 Datta 论文中的电势、电场和电位移表达式在形式上完全一致。为的是求出二指栅阵 Floquet 散射分量。

根据 Aoki 理论和 Legendre 多项式特性，当 θ 的取值范围在指条上有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{n-m} e^{-jn\theta} = 0 \quad \alpha - \Delta < |\theta| < \alpha + \Delta \quad (5.2.24)$$

当 θ 的取值范围在指条间隙内有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} S_{n-m} B_{n-m} e^{-jn\theta} = 0 \quad |\theta| < \alpha - \Delta \text{ or } \alpha + \Delta < |\theta| \leq \pi \quad (5.2.25)$$

其中系数 B_n 在文献[34]已给出

$$B_n = \sum_{r=0}^{|n|-1} P_{|n|-r-1} P_r \cos[(2r - |n| + 1)\alpha] \quad (5.2.10)$$

$$B_0 = 0 \quad n = 0 \quad (5.2.26)$$

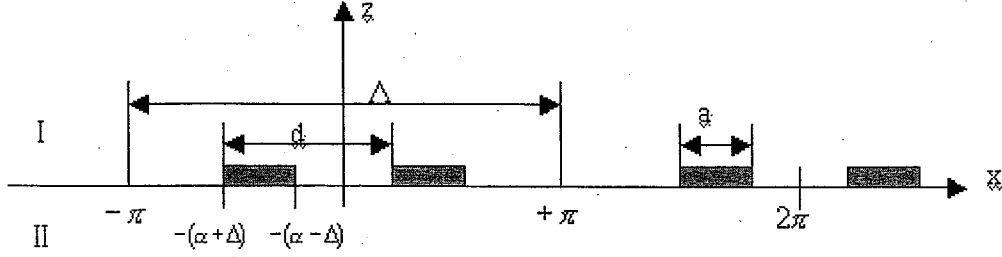


图 5.5 二指栅阵

对于金属栅阵, 不论其电极结构如何边界条件都是一样, 即在金属栅条上电场为零

$$E_z(\theta) = 0 \quad \alpha - \Delta < |\theta| < \alpha + \Delta \quad (5.2.27)$$

在栅条间隙内电位移连续

$$D_y(\theta) = 0 \quad |\theta| < \alpha - \Delta \text{ or } \alpha + \Delta < |\theta| \leq \pi \quad (5.2.28)$$

由边界条件 (5.2.27)、(5.2.28) 两式和电场、电位移表达式 (5.2.16)、(5.2.17) 两式得

$$e^{-jN\theta} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{-jn\theta} = 0 \quad \alpha - \Delta < |\theta| < \alpha + \Delta \quad (5.2.29)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{-jn\theta} = 0 \quad |\theta| < \alpha - \Delta \text{ or } \alpha + \Delta < |\theta| \leq \pi \quad (5.2.30)$$

式中

$$A_n = (s + n)\phi_n / (s + N)\phi_+ \quad (5.2.31)$$

根据 Datta 理论中 A_{3n} 的表达式 (5.2.21) 式, 结合 Legendre 多项式特性 (5.2.24) ~ (5.2.25) 式可令

$$A_n = \sum_{m=0}^{N+1} \alpha_m S_n S_{n+m-N-1} B_{n+m-N-1} \quad (5.2.32)$$

(5.2.32) 式主要是将 (5.2.21) 式中的 Legendre 多项式 $P_n(\cos \Delta)$ 改为系数 B_n , B_n 用 (5.2.10) 式表示。

下面我们讨论如何确定系数 α_m , 首先看 θ 取值范围在金属栅条上, 将 (5.2.32) 式代入 (5.2.29) 式得

$$e^{-jN\theta} + \sum_{m=0}^{N+1} \alpha_m \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n S_{n+m-N-1} B_{n+m-N-1} e^{-jn\theta} = 0$$

$$\alpha - \Delta < |\theta| < \alpha + \Delta \quad (5.2.33)$$

由 Legendre 多项式特性得

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{n-m} e^{-jn\theta} = 0 \quad \alpha - \Delta < |\theta| < \alpha + \Delta \quad (5.2.24)$$

我们再看 θ 取值范围在指条间隙内, 将 (5.2.32) 式代入 (5.2.30) 式得

$$\sum_{m=0}^{N+1} \alpha_m \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n S_{n+m-N-1} B_{n+m-N-1} e^{-jn\theta} = 0$$

$$|\theta| < \alpha - \Delta \quad \text{or} \quad \alpha + \Delta < |\theta| \leq \pi \quad (5.2.34)$$

由 Legendre 多项式特性得

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} S_{n-m} B_{n-m} e^{-jn\theta} = 0$$

$$|\theta| < \alpha - \Delta \quad \text{or} \quad \alpha + \Delta < |\theta| \leq \pi \quad (5.2.25)$$

从 (5.2.25) 式看, α_m 取任意值 (5.2.34) 式都能满足。因此在确定 α_m 时只需考虑 θ 取值范围在金属栅条上的情况。由 (5.2.33)、(5.2.24) 两式得

$$e^{-jN\theta} + \sum_{m=0}^{N+1} \alpha_m \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n S_{n+m-N-1} B_{n+m-N-1} e^{-jn\theta}$$

$$= \sum_{m=0}^{N+1} \alpha_m \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_{n+m-N+1} e^{-jn\theta} \quad (5.2.35)$$

$$e^{-jN\theta} + \sum_{m=0}^{N+1} \alpha_m \beta_m = 0 \quad (5.2.36)$$

上式中系数 β_m 为

$$\beta_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (S_n \cdot S_{n+m-N-1} - 1) B_{n+m-N-1} e^{-jn\theta} = 0 \quad \text{if } m=N+1 \quad (5.2.37)$$

$$= 2 \sum_{n=0}^{N-m} B_{n+m-N-1} e^{-jn\theta} \quad \text{if } m < N+1 \quad (5.2.38)$$

将系数 β_m 代入 (5.2.36) 式得

$$e^{-jN\theta} + \sum_{m=0}^N 2\alpha_m \sum_{n=0}^{N-m} B_{n+m-N-1} e^{-jn\theta} = 0 \quad (5.2.39)$$

通过适当变形得

$$e^{-jN\theta} + 2 \sum_{n=0}^N e^{-jn\theta} \sum_{m=0}^{N-n} \alpha_m B_{n+m-N-1} = 0 \quad (5.2.40)$$

对于上面等式比较级数各项系数得

$$\alpha_0 = -\frac{1}{2} \quad (5.2.41)$$

$$\sum_{m=0}^l \alpha_m B_{m-l-1} = 0 \quad l = 1 \text{ to } N \quad (5.2.42)$$

因为 $B_n = \sum_{r=0}^{|n|-1} P_{|n|-r-1} P_r \cos[(2r-|n|+1)\alpha]$ (5.2.10)

P_n 是勒让德多项式, 且 $P_{-1}(\cos \Delta) = 1$, 所以有 $B_{-1} = 1$, 因此由 (5.2.42) 式得

$$\alpha_l = -\sum_{m=0}^{l-1} \alpha_m B_{m-l-1} \quad l = 1 \text{ to } N \quad (5.2.43)$$

这样在 (5.2.43) 式中系数 α_m 在 $m=0 \sim N$ 时已有 (5.2.41) 和 (5.2.43) 两式给出, 只有 α_{N+1} 还没确定, 现在我们来看如何确定系数 α_{N+1}

$$\begin{aligned} E_z(\theta) &= j \frac{2\pi}{p} (s+N) \phi_+ e^{-js\theta} \left(e^{-jN\theta} + \sum_{m=0}^{N+1} \alpha_m \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n S_{n+m-N-1} B_{n+m-N-1} e^{-jn\theta} \right) \\ &= j \frac{2\pi}{p} (s+N) \phi_+ \sum_{m=0}^{N+1} \alpha_m \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{n+m-N-1} e^{-j(s+n)\theta} \end{aligned} \quad (5.2.44)$$

对上式积分得到电势表达式为

$$\phi(\theta) = (s+N) \phi_+ \times \sum_{m=0}^{N+1} \alpha_m \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{B_{n+m-N-1}}{s+n} \times e^{-j(s+n)\theta} \quad (5.2.45)$$

由于一根金属指条上电势是一样的, 指条上电压等于 $\phi(\alpha)$

$$V = (s+N) \phi_+ \times \sum_{m=0}^{N+1} \alpha_m \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{B_{n+m-N-1}}{s+n} \times e^{-j(s+n)\alpha} \quad (5.2.46)$$

因为 $B_n = \sum_{r=0}^{|n|-1} P_{|n|-r-1} P_r e^{-j(2r-|n|+1)\alpha}$ 代入上式得

$$V = (s+N) \phi_+ \times \sum_{m=0}^{N+1} \alpha_m \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sum_{r=0}^{|n|-1} P_{n+m-N-1-r-1} P_r}{s+n} \times e^{-j(2r+1+s)\alpha} \quad (5.2.47)$$

文献[34]将栅条上电压表示为

$$\begin{aligned}
V(\alpha) &= \frac{pe^{j\pi s}}{4j\pi \sin \pi s} \int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} E_z d\theta \\
&= \frac{pe^{j\pi s}}{4j\pi \sin \pi s} \int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} j \frac{2\pi}{p} (s+N)\phi_+ \sum_{m=0}^{N+1} \alpha_m \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{n+m-N-1} e^{-j(s+n)\theta} d\theta \\
&= \frac{(s+N)\phi_+ e^{j\pi s}}{\sin \pi s} \int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} \sum_{m=0}^{N+1} \alpha_m \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{n+m-N-1} e^{-j(s+n)\theta} d\theta \\
&= \frac{(s+N)\phi_+ e^{j\pi s}}{\sin \pi s} \sum_{m=0}^{N+1} \alpha_m \int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{n+m-N-1} e^{-j(s+n)\theta} d\theta \quad (5.2.48)
\end{aligned}$$

对于短路栅 $V(\alpha) = 0$ ，从而得到 α_{N+1} 的数学表达式为

$$\alpha_{N+1} = - \frac{\sum_{m=0}^N \alpha_m \int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{n+m-N-1} e^{-j(s+n)\theta} d\theta}{\int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{-j(s+n)\theta} d\theta} \quad (5.2.49)$$

这样，由(5.2.41)、(5.2.43)、(5.2.49)三式可确定系数 α_m ，将 α_m 代入(5.2.32)

求得系数 A_n ，再将 A_n 代入(5.2.31)式求得 ϕ_n ，最后由(5.2.15)式得到一周期内二指栅阵电势表达式，从而将 Datta 理论推广到分裂指栅阵。注意由(5.2.49)式求 α_{N+1} 时，必须通过数值计算，这是我们以后要做的工作。

本章小结

在这一章里我们进行了两个方面的理论分析，一是根据陈东培和 H.A.Haus 理论、利用有限元方法分析声波在厚电极栅阵中传播特性，二是为了能利用陈东培和 H.A.Haus 理论分析声波在二指栅阵中传播特性，我们对二指栅阵静电场问题进行了理论分析，给出了 Floquet 散射分量具体计算方法。本章我们创性的研究有：

- (1)、我们首次通过 Poynting 定理将陈东培和 H. A. Haus 理论公式中的二维积分转为平面有限元问题。采用有限元方法使我们能用陈东培和 H. A. Haus 理论分析厚电极栅阵。
- (2)、我们首次给出了二指栅阵 Floquet 散射分量具体理论计算方法，也就是将 Datta 理论推广到了二指栅阵。

本章理论分析中需要的数值计算将在以后进行，以完善我们的工作。

第六章 短路金属栅条反射系数的实验研究

在前面几章我们用变分原理的方法分析了压电晶体中 Rayleigh 波和 SH 型声表面波在短路金属栅阵中传播时的特性,用有限元方法分析了厚金属栅条的力学负载效应。同时我们还对双电极栅阵引起 Floquet 散射分量静电场问题作了理论分析。

这一章的目的是对反射栅的反射系数进行实验测量,并学习如何设计、制作 SAW 器件。文献[111,112]对 YZ-LiNbO₃ 上的金反射栅和 ST 石英上的沟槽填铝反射栅进行了实验研究,证实了 YZ-LiNbO₃ 上的金单指结构不可能实现完全无内反射。正确给出了 ST 石英上沟槽添铝单指无内反射结构的参数,并将此结构成功地应用于滤波器的设计中。

在此基础上,对 128° 旋转 Y 切, X 传 LiNbO₃ 基片上短路铝反射栅和 X 切 112° Y 传 LiTaO₃ 基片上短路铝反射栅及沟槽反射栅的反射系数随膜厚(或沟槽深度)的变化进行实验研究,得出了无内反射的条件。并将此结果应用于滤波器的设计中。

§ 6.1 反射系数的测量方法

采用我们实验室曾经用过的长脉冲和短脉冲两种方法测量反射系数^[43,113]。实验仪器装置如下图

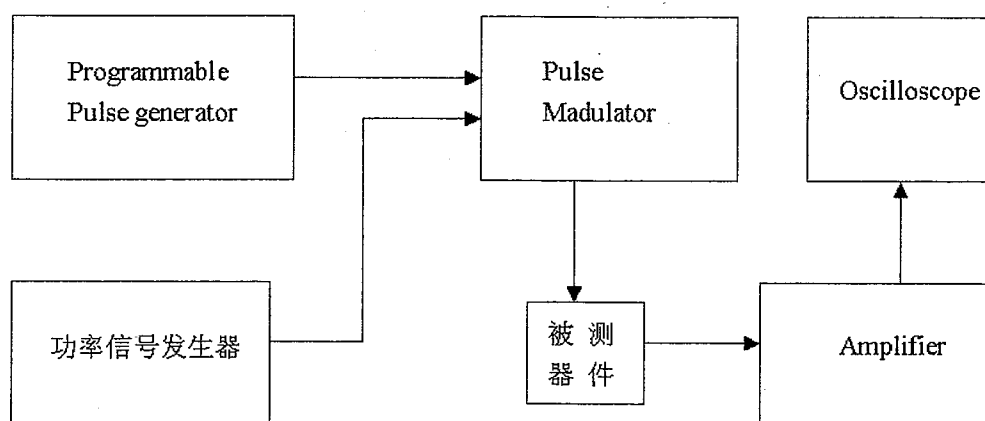


图 6.1. 测试装置示意图

短脉冲测量方法用来测量少数栅条的反射系数,因此可以直接给出单根栅条的反射系数,长脉冲方法给出的是整个栅条的反射系数,再求得单根栅条的反射系数。短脉冲和长脉冲方法各有其优、缺点,一般情况下,反射系数较大时用短脉冲方法,反射系数较小时用长脉冲方法。

实验是将脉冲发生器输出的脉冲信号和信号发生器输出的正弦信号输入调制器,输出的射频脉冲信号从声表面波滤波器的输入换能器输入,其输出换能器输出的信号经放大器放大后输入示波器,如图 6.2。

用示波器测出发射换能器到接收换能器延迟线响应幅度的峰值，同时测出反射信号的最大幅度，由相应的公式即可求得反射系数。

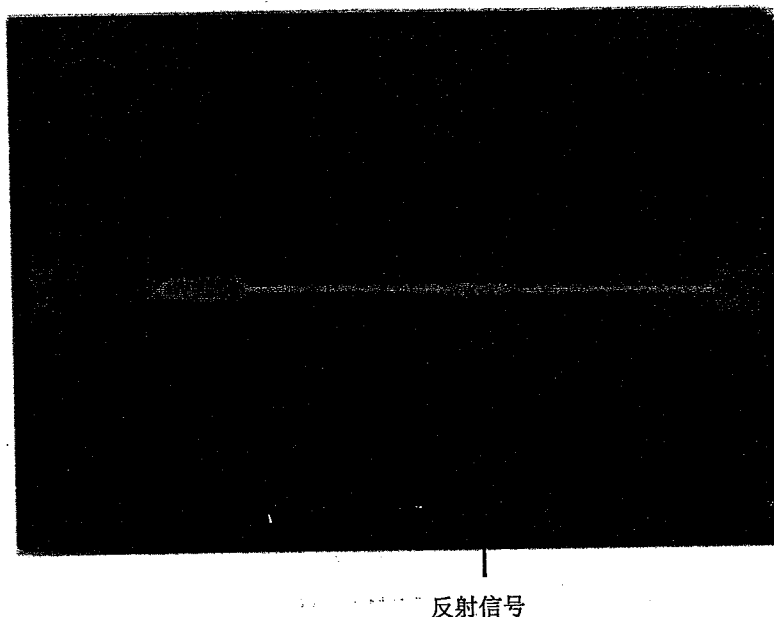


图 6.2 $112^\circ\text{YX-LiTaO}_3$ 基片上的沟槽填铝短路反射栅的反射信号

§ 6.2 反射系数的实验研究

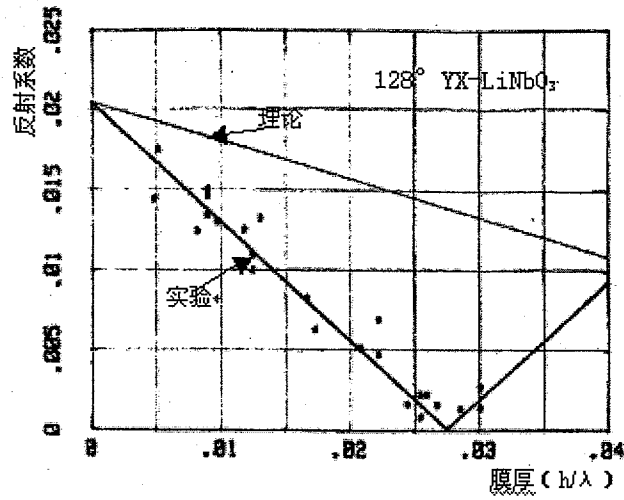
§ 6.2.1 $128^\circ\text{YX-LiNbO}_3$ 上的短路铝反射栅

按照我们的理论结果， $128^\circ\text{YX-LiNbO}_3$ 基片上的单根短路铝栅条的反射系数为 ($\eta=0.5$)

$$r_1 = 0.24 \frac{h}{\lambda} - 0.0204 \quad (6.2.1)$$

为了验证这一理论结果，采用短路脉冲测量方法测量反射系数，测量了 $128^\circ\text{YX-LiNbO}_3$ 上铝栅条构成的短路栅阵反射系数随膜厚的变化关系。实验结果如图 6.3 所示，图中理论曲线根据 (6.2.1) 式画出。从图中可见，反射系数幅度在一定范围内随膜厚的增加而减小，这一趋势与理论预计一致，从实验上验证了 $128^\circ\text{YX-LiNbO}_3$ 上的铝单指结果确实可以实现无内反射。

为了在制作单指无内反射滤波器时，比较准确地控制出现零反射的膜厚，用最小二乘法作出了拟合的实验曲线如图 6.3 所示


 图 6.3 128° YX-LiNbO₃ 基片上的短路铝反射栅的反射系数随膜厚的关系

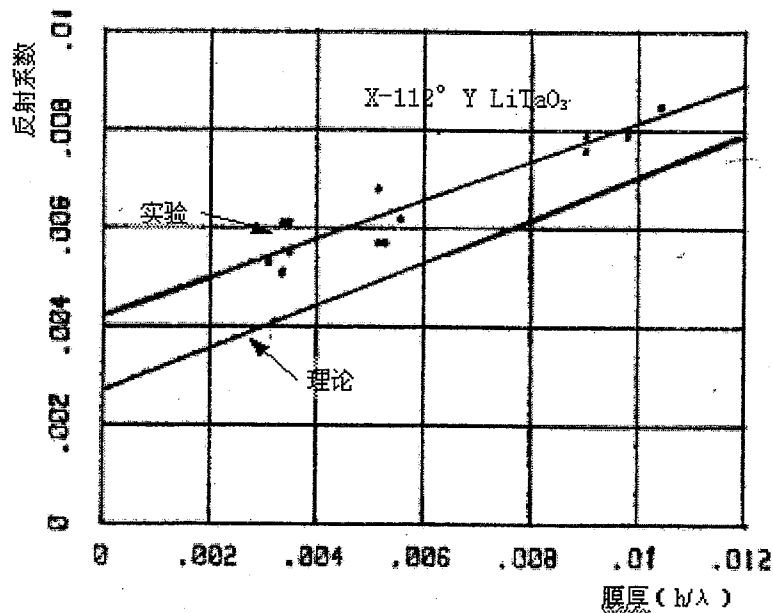
其表达式为

$$r_2 = 0.74 \frac{h}{\lambda} - 0.0204 \quad (6.2.2)$$

§ 6.2.2 X 切 112° Y 传 LiTaO₃ 基片上的短路铝反射栅和沟槽反射栅

同样我们可以分别得到 X-112° Y LiTaO₃ 基片上铝短路反射栅的反射系数 ($\eta=0.5$)

$$r_{s1} = -0.43 \frac{h}{\lambda} - 0.00268 \quad (6.2.3)$$


 图 6.4 X-112° Y LiTaO₃ 基片上的短路铝反射栅反射系数随膜厚的变化

对于沟槽栅, 其压电短路的反射系数为零, 根据前面的知识得到沟槽反射栅

的反射系数

$$r_{s2} = 1.19 \frac{h}{\lambda} \quad (6.2.4)$$

为了验证这一理论结果,我们采用反射系数短脉冲测量方法,分别测量了上述两种栅条反射系数随膜厚或沟槽深度的变化关系。实验结果分别如图 6.4 和图

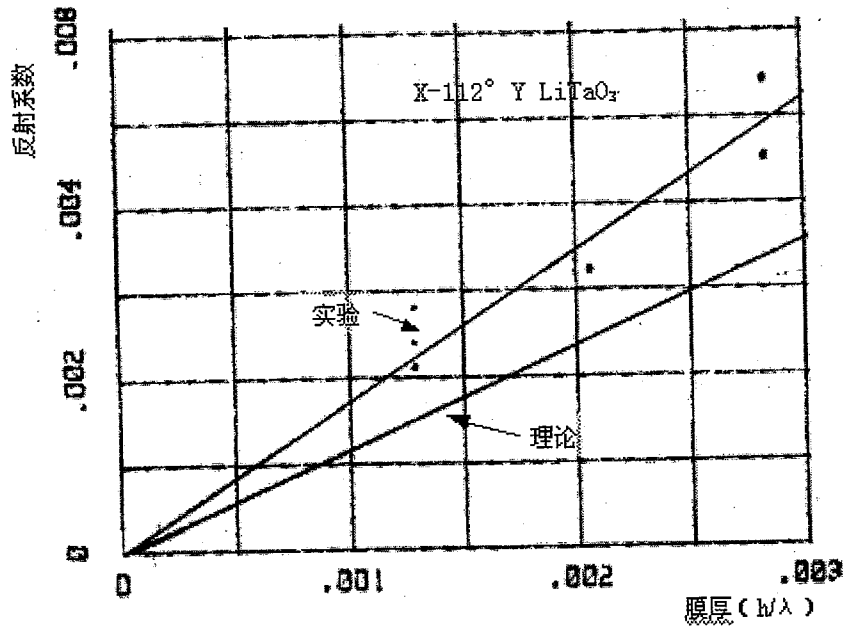


图 6.5 X-112° Y LiTaO₃ 基片上的沟槽反射栅反射系数随沟槽深度的变化

6.5 所示,根据 (6.2.3) 式和 (6.2.4) 式计算出的理论反射系数也分别在图 6.4 和图 6.5 中。

为了进一步验证沟槽反射栅与铝反射栅的反射相位确实相反,我们制作了一沟槽填铝短路反射栅(沟槽深度为 $h/\lambda=0.00283$, 铝膜厚度为 $h/\lambda=0.0016$, 金属化比为 $\eta=0.62$), 其反射系数幅度为 0.00026, 很明显这是铝条的反射和沟槽反射相消的结果,说明两者相位确实相反。

为了在制作单指无内反射滤波器时,比较准确地控制出现零反射膜厚,我们用最小二乘法作出了拟合的实验曲线如图 6.4 和图 6.5 所示,得出它们的表达式分别为

$$\text{铝栅条} \quad r_1' = -0.39 \frac{h}{\lambda} - 0.0042 \quad (6.2.5)$$

$$\text{沟槽} \quad r_2' = 1.74 \frac{h}{\lambda} \quad (6.2.6)$$

§ 6.3 单指无内反射滤波器

为了验证前面的理论和实验结果,我们在 128° YX-LiNbO₃ 和 X-112° Y

LiTaO₃上用单指无内反射结果研制了两种滤波器。

§ 6.3.1 在 128° YX-LiNbO₃基片上

设计了一单指结构滤波器，叉指周期为 $\lambda_0 = 24.32 \mu m$ (中心频率为 160MHz)

两换能器采用切指单加权。不加权换能器 4 对指。切指加权换能器 30 对指。根据 H. Skeie^[114]的理论考虑反射响应的频响可由下面的公式来计算

$$|H'(f)| = |H(f)W(f)| \quad (6.3.1)$$

$$W(f) = 1 + r \frac{N \sin X}{2 X} \quad (6.3.2)$$

其中 $H(f)$ 为不考虑二阶效应的频率响应， $X = (N\pi/2) \cdot (f - f_0)/f_0$ ， N 为指条数， r 为指条的反射系数。

上面我们已经得到了在一阶 Bragg 频率处的指条反射系数，若考虑反射系数的频率特性，可得

$$r_s = 0.74 \frac{h}{\lambda_0} \cdot \frac{f}{f_0} \sin\left(\frac{f}{f_0} \cdot \frac{\pi}{2}\right) - 0.0204 F\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{f}{f_0}\right) \quad (6.3.3)$$

其中

$$F(s) = 4.38 \cdot S \cdot \left[P_{2s}(0) + \frac{P_s(0)}{P_{s-1}(0)} \cdot P_{2s-1}(0) \right] \quad (6.3.4)$$

$P_s(x)$ 为 Legendre 函数。由 (6.2.2) 式知，若 $h/\lambda = 0.0276$ 时， $r = 0$ 。按此

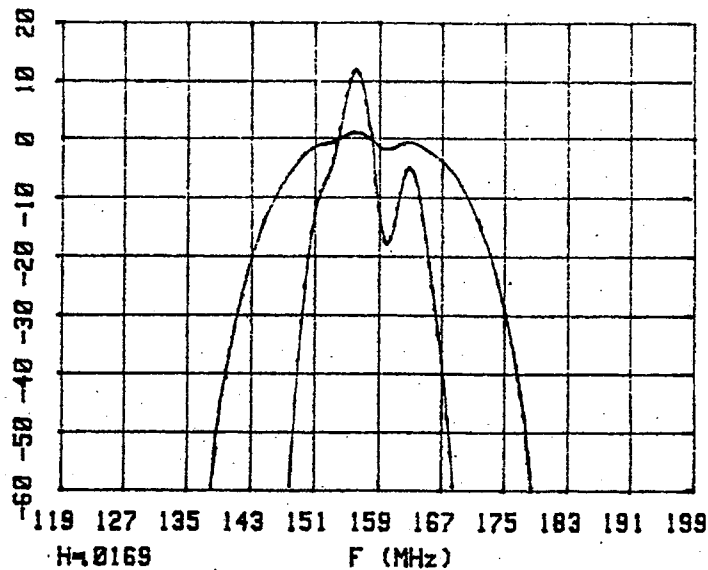


图 6.6(a). 膜厚较薄 ($h/\lambda = 0.0169$) 滤波器的理论频率响应曲线

要求控制铝膜厚度制作了一滤波器。由于工艺控制误差,实际得到的膜厚比要求的稍厚, $h/\lambda = 0.029$, 为了比较反射系数信号对滤波器频率响应的影响,同时制作了一膜厚较薄的滤波器 $h/\lambda = 0.0169$ 。将上述数值代入(6.3.3)式,再将(6.3.3)式、(6.3.2)式代入(6.3.1)式,得到两种不同膜厚条件下的滤波器频率响应如图 6.6 (a)和图 6.6(b)所示。实验结果如图 6.7 (a)和图 6.7

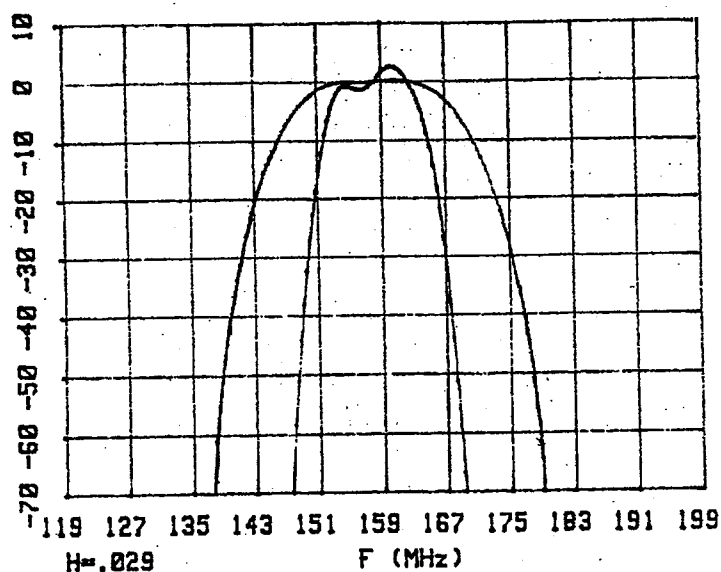


图 6.6 (b). 膜厚较厚 ($h/\lambda = 0.029$) 滤波器的理论频率响应曲线

(b) 所示。比较图 6.6 (a) 和图 6.6(b) 可见,理论计算与实验结果符号的很好。图 6.6 的带内起畸变达到了 3dB, 图 6.7 的带内畸变小于 0.5dB, 不但抑制反射的效果明显,而且完全能满足应用要求。

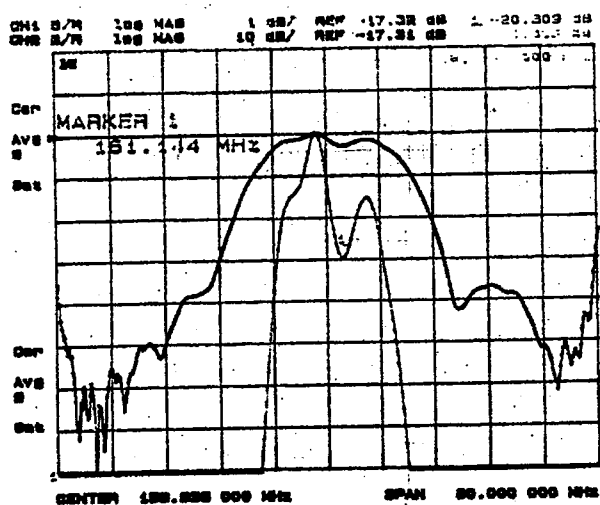
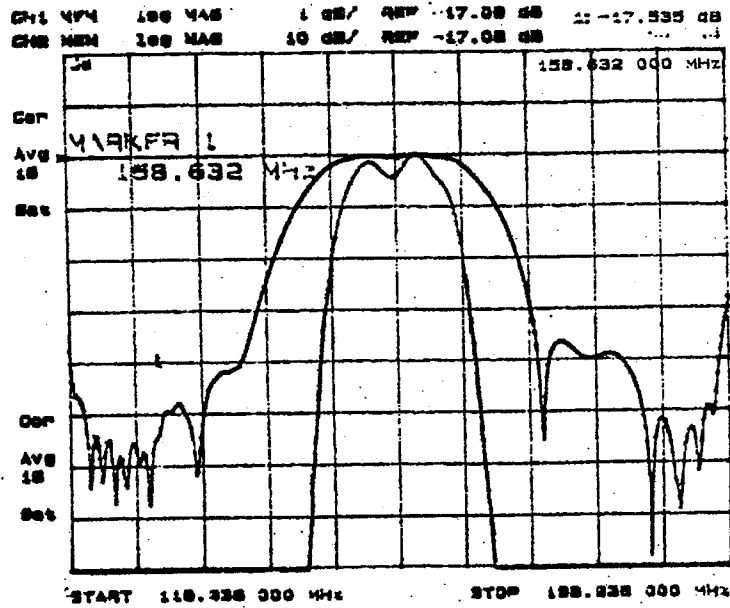


图 6.7(a). 膜厚较薄 ($h/\lambda = 0.0169$) 滤波器的实验频率响应曲线

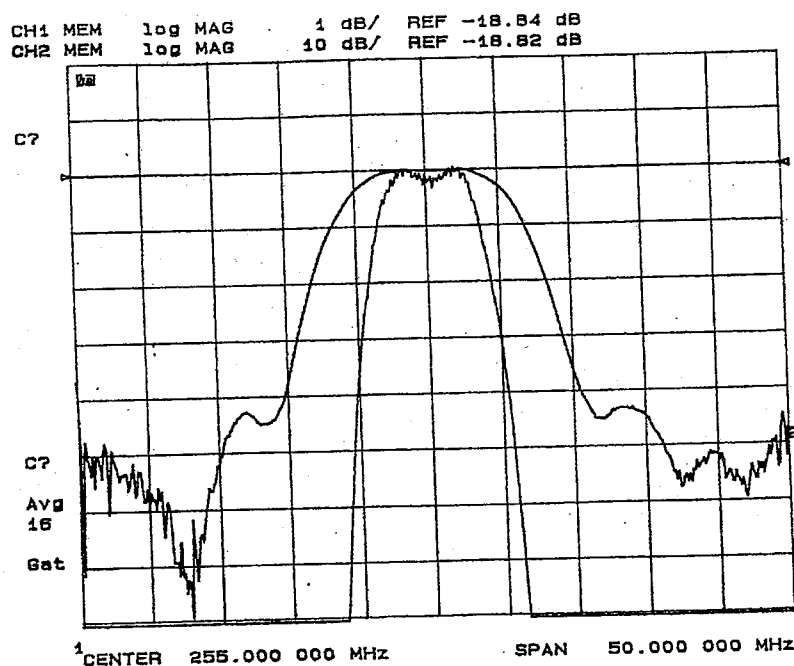

 图 6.7(b). 膜厚较厚 ($h/\lambda = 0.029$) 滤波器的实验频率响应曲线

§ 6.3.2 在 X-112° Y LiTaO₃ 基片上

同样设计了一单指结构滤波器，叉指周期 $\lambda = 12.9 \mu\text{m}$ ，采用切指与抽指双加权，切指换能器 75λ ，抽指换能器 65λ 。采用沟槽填铝来抑制电极的反射，由前面实验结果可知，此时单根电极的反射系数

$$r_s = 1.74 \frac{h_1}{\lambda} - 0.39 \frac{h_2}{\lambda} - 0.0042 \quad (6.3.5)$$

式中 h_1 为沟槽深度， h_2 为铝膜厚度。当 $h_1 = 500 \text{ \AA}$ 、 $h_2 = 800 \text{ \AA}$ 时， $r_s = 0$ 。按这些要求控制工艺条件制作了一滤波器，其频率响应如图 6.8 所示，中心频率为 255MHz，带宽约 10MHz、通带波纹小于 0.4dB，取得了无内反射的效果。

图 6.8 X-112° Y LiTaO₃单指无内反射滤波器的频率响应

本章小节

我们从实验上研究了 128° YX-LiNbO₃ 基片上的短路铝反射栅和 X-112° Y LiTaO₃ 基片上的铝短路反射栅和沟槽反射栅的反射特性，得到了反射为零的条件，证明了在 128° YX-LiNbO₃ 基片上可用铝单指、X-112° Y LiTaO₃ 基片上可用沟槽填铝单指结构实现无内反射的结论。将上述结果应用于单指无内反射滤波器的研制。在 128° YX-LiNbO₃ 基片上用铝单指结构得到了带内畸变小于 0.5dB，在 X-112° Y LiTaO₃ 基片上用沟槽填铝单指结构得到了带内畸变小于 0.4dB 的带通滤波器。这一结果已能满足实用要求。

第七章 结论和展望

结论

声表面波是沿着弹性固体表面或界面传播的弹性波，声表面波技术是集声学、力学、电子学、光学和半导体平面工艺相结合的一门新型的边缘科学。从卫星通信、雷达制导、无线遥控、广播电视到移动通信、无绳电话都广泛的采用声表面波器件。九十年代以来，信息高速公路的蓬勃发展和通信技术尤其是移动通信系统的迅速发展，一方面迫切需求大量低损耗高性能表面波滤波器件，另一方面通信系统工作频率向更高频段发展促使表面波器件的工作频段不断上移。这两点都对表面声波的研究提出了新的挑战，直接推动表面声波的研究在九十年代形成又一次高潮。

在现有工艺条件下，提高表面声波器件工作频率的最有效方式就是使表面声波器件工作于高传播速度的表面声波模式——漏表面波和纵漏表面波模式，这样可在保持原有工艺条件不变的前提下，直接使器件工作频率得以成倍提高；实际表面波器件的基本结构多由大量的周期金属栅阵构成，栅阵的存在导致表面声波模式的传播特性发生变化，对高性能表面波器件设计必须充分考虑表面声波模式的周期栅阵传播特性；对低耗滤波器，工程上常采用利用指间多次反射效应来降低插入损耗，而它们的分析与设计都是建立在已知表面声波模式的周期栅阵传播特征参数基础上的，正是当前这些迫切的需求导致表面声波模式尤其是高速表面波模式的周期栅阵传播特性研究与周期栅阵传播特征参数提取成为表面波理论研究的热点之一，同时由于问题的复杂性，这一研究也是表面波理论的一个难题，至今尚未得到真正解决。

本文从波动方程和边界条件出发，根据陈东培和 H. A. Haus 理论、采用变分原理分析了基片是压电晶体的短路金属栅中声表面波传播特性。栅阵对晶体中声表面波的影响主要是压电短路效应和力学负载效应。在分析力学负载对反射栅的反射系数贡献时，我们发现不同材料栅条其晶体对称性是不一样的，反射系数的理论计算公式也随之变化。我们将陈东培和 H. A. Haus 理论从一般的 Rayleigh 波推广到 SH 型表面波（含 BGW, STW、SSBW 和 leaky waves 等声表面波），并根据 Abbott's COM 方程及 Plessky's COM 方程分析了 SH 型表面波在栅阵中的色散特性。我们在陈东培和 H. A. Haus 理论中利用有限元方法分析厚金属栅条的力学负载效应，在这个过程中对基片区的分析方法保持不变。为了将陈东培和 H. A. Haus 理论用于二指栅阵中声表面波传播特性的分析，我们对这种栅阵的静电场问题作了理论研究。根据我们的理论研究我们编制了相应的数值计算程序，提取了有关特征参数。

可以说我们的理论研究工作丰富和发展了陈东培和 H. A. Haus 理论，使压电晶体中关于声表面波的变分方法不再局限于一般的 Rayleigh 波，而能用于 SH 型表面波，能够分析厚电极栅条和二指栅阵。我们希望前人以及我们的工作使压电晶体中的变分方法引起人们广泛关注，并在未来的声表面波理论研究中发挥更大的作用。

本文创新性的工作主要有

- (1)、将陈东培和 H.A.Haus 以及何世堂的理论工作推广到压电晶体, 由于声波在压电晶体中传播会产生伴随电势, 这个伴随电势会与声波发生耦合从而改变栅阵的反射特性。我们首次在用变分原理分析栅阵的反射特性时考虑了晶体的压电性。
- (2)、我们发现不同材料栅条由于其晶体对称性的不同会影响反射栅对声表面波的反射特性。。我们详细推导了不同晶体对称性栅条反射系数的理论计算公式, 首次给出四方 4/mmm, 六角 6/mmm 金属栅条和三角 3m 沟槽等反射系数计算公式。
- (3)、首次将陈东培和 H.A.Haus 理论应用于 SH 型声表面波, 利用变分原理和 SH 型表面波 COM 模型分析了栅阵中 SH 型声表面波的传播特性, 给出了 SH 型表面波在栅阵中色散关系的具体求解方法。为 SH 型表面波器件的理论分析和设计开辟了一个新的途径。
- (4)、根据 COM 理论, 我们首次解释了由陈东培和 H.A.Haus 理论得到的色散关系表达式物理意义, 即该表达式表示的是色散曲线禁带上边缘和禁带下边缘频率与 Bragg 中心频率之差。
- (5)、我们首次通过 Poynting 定理将陈东培和 H. A. Haus 理论公式中的二维积分转为平面有限元问题, 在陈东培和 H. A. Haus 理论中成功地使用有限元方法分析厚电极栅阵的反射特性。
- (6)、我们首次给出了关于二指栅阵 Floquet 散射分量的具体理论计算公式, 也就是将 Datta 等人关于单指栅阵静电场理论推广到二指栅阵。

尚待解决的问题与后续工作

为了研究声表面波在栅阵中传播特性, 精确的理论分析是从基本波动方程和边界条件出发确定其色散关系, 然后结合 COM 模型和微扰理论 (Perturbation Theory) 求解 COM 参数。这方面较为成熟的方法一是日本 Chiba 大学 Hashimoto 等人提出的利用离散 Green 函数等概念分析 SAW 在周期性有限厚金属栅中传播时色散特性。另一个是法国 Ventura 等人利用周期 Green 函数确定声波的色散关系。但是这两种方法都不是完美的, 近年来栅阵声表面波特性的研究方法主要集中在 Green 函数方法的改进上。

陈东培和 H. A. Haus 理论是最早从基本波动方程和边界条件出发、利用压电晶体中的变分原理导出栅阵中 SAW 色散关系, 并将其与 COM 理论相结合来分析声表面波在栅阵中传播特性的理论方法, 何世堂将该理论推广到各向异性晶体。遗憾的是此后再无人对陈东培和 H. A. Haus 理论作更深入的研究。如上所说, 本文就是进一步发展陈东培和 H. A. Haus 理论, 探索用该理论分析 SH 型表面波、厚电极栅阵以及一周期内二指栅阵的色散特性。到目前为止, 在这方面我们虽然取得一点进展, 但仍有不少工作要做。

1. 利用有限元方法分析厚电极栅阵的力学负载效应时, 我们只给出了理论计算公式, 要得到其结果还需数值计算, 将来的工作是编写相应的计算机程序。
2. 在分析二指栅阵静电场问题时, 系数 α_m 在 $m=0\sim N$ 时都可以由解析解

直接给出,但是系数 α_{N+1} 的确定必须通过数值计算,这个工作目前也没有完成。

3. 陈东培和 H. A. Haus 理论只考虑了声波的传播过程而没有考虑声波的激发,但是与此相平行的理论体系如 Hashimoto 的工作和 Ventura 的工作都同时考虑了声波的激发和传播,这是为什么? 若在陈东培和 H. A. Haus 理论中也考虑声波的激发,那么如何引进 Green 函数?
4. 陈东培和 H. A. Haus 理论的色散关系只能给出禁带上、下边缘频率,而不是整个色散曲线,如何改进这个理论使它也能得到整个色散曲线?
5. 用 Hashimoto 程序计算 AT-90° X 石英色散关系、当归一化频率大于 0.5 时就没有 STW 的解, ST-90° X 石英也会出现类似的情况。对于这个问题只今无人从理论上给出一个令人信服的解释,我个人认为这是一个有意义的研究课题。