



中国科学院大学  
University of Chinese Academy of Sciences

## 博士学位论文

### 基于数学法的自由曲面照明光学系统设计方法研究

作者姓名: 顾国超

指导教师: 张葆 研究员

中国科学院长春光学精密机械与

物理研究所

学位类别: 工学博士

学科专业: 光学工程

培养单位: 中国科学院长春光学精密机械与物理研究所

2019 年 06 月



**Study on the design of freeform surface illumination system**  
**based on mathematical method**

**A dissertation submitted to**  
**University of Chinese Academy of Sciences**  
**in partial fulfillment of the requirement**  
**for the degree of**  
**Doctor of Engineering**  
**in Optical Engineering**

**By**

**Gu Guochao**

**Supervisor    Professor Zhang Bao**

**Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics,**

**Chinese Academy**

**June 2019**

# 中科院长春光机所论文独创性声明和使用授权说明

## 独创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文是本人在导师指导下，独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本论文不含任何其他人或集体已经发表或撰写过的作品或成果。对本文的研究做出贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式说明并表示了感谢。本声明的法律结果由本人承担。

声明人：顾国超

日期：

2019年5月29日

## 学位论文使用授权说明

本人完全了解中科院长春光机所关于收集、保存、使用学位论文的规定，即：

1、按照应物所的要求向研究生部提交学位论文的印刷本，向信息中心提交学位论文电子版；

2、长光所有权保存学位论文的印刷本和电子版，并提供目录检索与阅览服务；

3、长光所可以采用影印、缩印、数字化或其它复制手段保存论文；

4、长光所可以公布论文的全部或部分内容；

5、长光所有权按规定向有关论文保存单位提交论文，并同意论文保存单位向社会公布

(保密论文在解密后遵守此规定)

论文作者签名：顾国超

2019年5月29日

导师签名：王柯

2019年5月29日

## 学位论文版权使用授权书

本人完全了解中国科学院大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留学位论文的印刷本和电子版，并提供目录检索与阅览服务；学校可以公布论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印、数字化或其它复制手段保存学位论文。

本人同意《中国优秀博硕士学位论文全文数据库》出版章程的内容，愿意将学位论文提交《中国学术期刊（光盘版）》电子杂志社，编入 CNKI 学位论文全文数据库并充实到“学位论文学术不端行为检测系统”比对资源库，同意按章程规定享受相关权益。

保密论文在解密后遵守此规定。

论文作者签名：顾国超 指导教师签名：张平  
日期：2019年5月29日

## 摘 要

相对于传统照明光学系统,自由曲面照明光学系统拥有更高的设计自由度,能够进行光线的精细调控,实现复杂照明输出;同时系统也拥有更为灵活的空间布局,这为实现健康照明、节能照明、绿色照明的理念提供了坚实基础,随着社会的发展和科技的进步,自由曲面照明将拥有更广泛的应用领域,对其设计方法的研究也将具有更大的应用价值。基于此,本课题拟对自由曲面照明光学系统设计进行研究,为其提供一套可靠的光学解决方案,实现简单、高效、灵活的设计目的,在研究过程中,主要经历了三个阶段。第一阶段为基于一阶微分方程的自由曲面照明光学系统设计,面向对称性辐照输出;第二阶段设计从二维扩展到三维,实现了出射光线整体精细控制的自由曲面光学系统设计方法;第三阶段构建了两种简化 Monge-Ampère 方程形式的自由曲面照明光学系统数学模型,获得了更佳的设计效果。

本文的主要工作和创新之处如下:

1) 对具有对称特性辐照输出的光学系统,研究获得了显式和隐式两种数学模型,对两种模型设计结果进行了仿真分析,确立了隐式设计和 B 样条母线构建的设计方法,在少量采样点的情况下实现了理想辐照输出效果。并对该设计方法所得到的光学系统进行实验验证,探究了系统输出特性,然后将实验结果与太阳模拟技术领域中具有类似辐照目标的太阳模拟器照明光学系统进行比较,得到了这类系统的特性。

2) 采用谱方法处理系统 Monge-Ampère 方程,对于简单辐照输出,采用切比雪夫谱方法进行处理。以均匀方形辐照输出目标为例进行了系统设计及仿真分析,仿真分析所得辐照输出的不均匀度为 4.91%。鉴于切比雪夫谱方法采样点中心区域稀疏,边缘区域密集的特性,对高分辨率复杂照明输出中心区域设计效果的不足,采用傅里叶谱方法对系统模型进行处理,并对边界节点进行特殊处理,消除了其内含周期性对计算结果的影响,实现面向高分辨率复杂辐照输出的系统方程解决方法。

3) 针对系统设计从二维扩展到三维时存在的方程复杂,设计效率低;难以

处理拓扑方形和拓扑圆形离散网格之间的映射,光源能量利用率不足的情况。论文从系统核心为能量搬运与重新分配的本质出发,构建了一种简化 Monge-Ampère 方程形式的自由曲面照明光学系统数学模型,一种基于光源出射到目标辐照的映射,另一种基于目标辐照到光源出射的映射。这降低了设计难度,提升了设计效率,摆脱了自由曲面照明光学系统几何关系的束缚,提升了设计灵活性,基于目标辐照到光源出射映射的系统模型进一步提升了设计能力。采用了两种典型的预期辐照输出为例对上述设计方法进行了验证,并通过仿真和实验结合的方法对所得光学系统进行了评价,结果表明两个光学系统输出结果均与预期相符,实现了预期复杂辐照输出,实现了拓扑方形和拓扑圆形离散网格之间的映射,提升了光源能量利用效率。

综上所述,本论文所采用的自由曲面照明光学系统设计方法不仅能够处理高分辨率复杂辐照输出光学系统设计,还能够实现光源出射与目标辐照间拓扑圆形和拓扑方形的相互映射,实现更高的光源能量利用率,是一种具有普适性,简单、高效、灵活、实用的自由曲面照明光学系统设计方法。

**关键词:** 自由曲面, 照明设计, 非成像光学, 谱方法

## Abstract

Compared with the traditional illumination optical system, the freeform surface illumination optical system not only has more flexible space layout but has higher design freedom, which can finely control the outgoing light and realize complex irradiation output. This provides a solid foundation to realize healthy lighting, energy-efficient lighting and green lighting. With the development of society and the advancement of technology, freeform surface lighting will have a wider range of applications, and research on its design methods will have greater application value. Based on this, the thesis intends to study the design of freeform surface illumination optical system, and provides a set of reliable optical solutions to make the design simple, efficient and flexible. During the research, three stages were performed. The first stage involves the design of freeform surface illumination optical system based on the first-order differential equations, which is oriented to symmetric radiation output. The second stage extends to realize the design from 2-dimensional (2D) to 3-dimensional (3D), and obtains the freeform optical system with fine control of the outgoing light. During the third stage, two mathematical models of the freeform surface illumination optical system in the form of Monge-Ampère equation are constructed, and better designed effect is obtained.

The main contributions and innovations of this thesis are as follows:

- 1) Two mathematical models, explicit and implicit, and for the optical system with symmetric illumination output, are obtained. And the design method, combining the implicit design and B-spline generatrix construction, is confirmed by simulating and analyzing the designed result of the two models, which realizes ideal irradiation output with a few number of sampling points. Then the optical system, obtained by the design method, is experimentally verified, and the output characteristics of the system are studied. By comparing the experimental results with the solar simulator optical system having similar irradiation targets, the characteristics of such systems

are obtained.

2) The spectral method is adopted to process the Monge-Ampère system equation. For the simple output, such as uniform square irradiation output, the system equation is processed by the Chebyshev spectral method. The designed result is simulated and the result demonstrates that the unevenness of the irradiation output is 4.91%. Since the sampling points of the Chebyshev spectrum method are sparse in the center and dense at edge, the design effect of the center area for high-resolution complex irradiation output is insufficient. For this issue, the Fourier spectral method is adopted to process the system equation, and its boundary sampling nodes are specially processed to eliminate the influence of its internal periodicity on the calculated results. Finally, the solution which fits for the high-resolution complex irradiation output is realized.

3) When the system design expands from 2D to 3D, the design efficiency is low because of the complexity of the system equation, and the energy utilization of the light source is always insufficient because it is difficult to deal with the mapping between topological squares and topological circular. For this condition, two simplified system models in the form of Monge-Ampère equations, one based on the mapping of the light source to the target irradiation and the other based on the mapping of the target irradiation to the light source, are constructed according to the essence of the system, which lies in energy handling and redistribution. The design difficulty and efficiency are reduced and improved, and the constraints of the geometric relationship of the freeform illumination optical system are excluded. The system model, based on the mapping from the target to light source, further enhances the design capability. The design method is verified by using two typical expected irradiation outputs, and the obtained systems are evaluated by the combination of simulation and experiment. The final results reveal that the outputs of the two optical systems are consistent with the expected results, the expected complex irradiation output is realized, the mapping between the topology square and topological circular is also realized, and the energy efficiency of light source is improved.

In summary, the design method of the freeform surface illumination optical



system studied in this thesis can not only deal with the design of high-resolution complex irradiation output optical system, but also realize the mutual mapping of topological circular and topological square between light source and target irradiation, to achieve higher energy utilization of light source. Therefore, it is a universal, simple, efficient, flexible and practical design method for freeform illumination optical system.

**Key words:** Freeform surface, Illumination design, Nonimaging optic, Spectral method



# 目 录

|                                   |           |
|-----------------------------------|-----------|
| <b>第 1 章 绪论</b>                   | <b>1</b>  |
| 1.1 引言                            | 1         |
| 1.2 选题背景及意义                       | 1         |
| 1.2.1 自由曲面概述                      | 1         |
| 1.2.2 自由曲面照明光学系统的优势               | 2         |
| 1.2.3 课题研究的意义                     | 6         |
| 1.3 自由曲面照明光学系统的发展和现状              | 6         |
| 1.3.1 自由曲面照明的早期研究                 | 6         |
| 1.3.2 自由曲面照明光学系统的发展和现状            | 8         |
| 1.4 本课题的主要研究工作                    | 18        |
| <b>第 2 章 基于常微分方程的自由曲面照明光学系统设计</b> | <b>21</b> |
| 2.1 引言                            | 21        |
| 2.2 构建光源出射光线与目标辐照面对应点的映射关系        | 21        |
| 2.3 系统方程的获取                       | 23        |
| 2.3.1 显式方程的获取                     | 23        |
| 2.3.2 隐式方程的获取                     | 25        |
| 2.4 设计计算                          | 28        |
| 2.4.1 显式方程计算                      | 29        |
| 2.4.2 隐式系统计算                      | 30        |
| 2.4.3 设计结果对比                      | 31        |
| 2.5 自由曲面母线构造方法                    | 34        |
| 2.6 实验验证                          | 36        |
| 2.6.1 自由曲面加工及试验台的搭建               | 36        |
| 2.6.2 实验数据处理                      | 38        |
| 2.6.3 与太阳模拟器光学系统输出对比              | 43        |
| 2.7 本章小结                          | 43        |

## 第 3 章 基于 MONGE-AMPÈRE 方程自由曲面照明光学系统设计 . . . . 45

|                                                              |    |
|--------------------------------------------------------------|----|
| 3.1 引言 . . . . .                                             | 45 |
| 3.2 二维设计向三维设计过渡存在的问题及解决方法 . . . . .                          | 45 |
| 3.3 自由曲面照明光学系统数学模型构建 . . . . .                               | 46 |
| 3.3.1 坐标系的构建及能量守恒方程的获得 . . . . .                             | 46 |
| 3.3.2 光源出射区域 $\Omega_0$ 与目标辐照区域 $\Omega_1$ 之间的映射关系 . . . . . | 48 |
| 3.3.3 自由曲面照明光学系统数学模型 . . . . .                               | 50 |
| 3.3.4 自由曲面照明光学系统数学模型的椭圆性 . . . . .                           | 52 |
| 3.4 采用切比雪夫谱方法解 MONGE-AMPÈRE 偏微分方程 . . . . .                  | 53 |
| 3.4.1 切比雪夫点与切比雪夫网格 . . . . .                                 | 53 |
| 3.4.2 切比雪夫求导矩阵 . . . . .                                     | 53 |
| 3.5 仿真验证 . . . . .                                           | 56 |
| 3.5.1 光学系统以及计算初始设定 . . . . .                                 | 56 |
| 3.5.2 计算初值的获取 . . . . .                                      | 56 |
| 3.5.3 结果验证 . . . . .                                         | 57 |
| 3.6 本章小结 . . . . .                                           | 60 |

## 第 4 章 基于简化 MONGE-AMPÈRE 方程自由曲面照明光学系统设计 61

|                                                     |    |
|-----------------------------------------------------|----|
| 4.1 引言 . . . . .                                    | 61 |
| 4.2 自由曲面照明光学系统本质 . . . . .                          | 61 |
| 4.3 MONGE-AMPÈRE 方程与 OMT 问题之间的关系 . . . . .          | 62 |
| 4.3.1 Monge-Kantorovich Mass Transport 问题 . . . . . | 62 |
| 4.3.2 能量/物质守恒 . . . . .                             | 63 |
| 4.3.3 Monge-Ampère 方程 . . . . .                     | 63 |
| 4.3.4 自由曲面照明光学系统的简化 Monge-Ampère 方程模型 . . . . .     | 64 |
| 4.4 傅里叶谱方法求解 MONGE-AMPÈRE 方程 . . . . .              | 67 |
| 4.4.1 傅里叶谱方法简介 . . . . .                            | 67 |
| 4.4.2 求导、积分与傅里叶谱方法 . . . . .                        | 69 |
| 4.4.3 谱求导矩阵 . . . . .                               | 69 |
| 4.4.4 利用谱求导矩阵求解 Monge-Ampère 方程 . . . . .           | 72 |

|                                                     |            |
|-----------------------------------------------------|------------|
| 4.5 复杂辐照输出自由曲面照明光学系统设计.....                         | 73         |
| 4.5.1 光学系统设置.....                                   | 73         |
| 4.5.2 设计计算.....                                     | 74         |
| 4.5.3 设计结果.....                                     | 74         |
| 4.5.4 自由曲面照明光学系统的构建.....                            | 75         |
| 4.5.5 仿真分析.....                                     | 77         |
| 4.5.6 实验验证.....                                     | 78         |
| 4.6 高能量利用率自由曲面照明光学系统设计.....                         | 85         |
| 4.6.1 自由曲面照明光学系统能量利用率分析.....                        | 85         |
| 4.6.2 光学系统设置.....                                   | 86         |
| 4.6.3 设计计算.....                                     | 87         |
| 4.6.4 设计结果.....                                     | 87         |
| 4.6.5 自由曲面照明光学系统构建.....                             | 88         |
| 4.6.6 仿真分析.....                                     | 89         |
| 4.6.7 实验验证.....                                     | 91         |
| 4.7 本章小结.....                                       | 99         |
| <b>第5章 总结和展望</b> .....                              | <b>101</b> |
| 5.1 全文总结.....                                       | 101        |
| 5.2 创新点.....                                        | 104        |
| 5.3 展望.....                                         | 104        |
| <b>参考文献</b> .....                                   | <b>107</b> |
| <b>附录 A 透射式自由曲面照明光学系统光源出射与目标辐照之间对应关系推导</b> .....    | <b>113</b> |
| <b>附录 B 球坐标反射式自由曲面照明光学系统光源出射与目标辐照之间映射关系推导</b> ..... | <b>117</b> |
| <b>致 谢</b> .....                                    | <b>121</b> |



|                               |     |
|-------------------------------|-----|
| 作者简历及攻读学位期间发表的学术论文与研究成果 ..... | 123 |
|-------------------------------|-----|

## 附图目录

|        |                                                                                                                                                     |    |
|--------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 图 1.1  | 路灯夜景图.....                                                                                                                                          | 2  |
| 图 1.2  | 专用 LED 路灯照明示意图 <sup>[8]</sup> .....                                                                                                                 | 3  |
| 图 1.3  | 太阳模拟器光学系统.....                                                                                                                                      | 3  |
| 图 1.4  | 自由曲面光学系统.....                                                                                                                                       | 4  |
| 图 1.5  | 改造后的投影仪和常规投影仪的空间布局对比 <sup>[9]</sup> .....                                                                                                           | 5  |
| 图 1.6  | 改造后光学系统细节图 <sup>[9]</sup> .....                                                                                                                     | 5  |
| 图 1.7  | 投影仪改造光学系统实际效果图 <sup>[9]</sup> .....                                                                                                                 | 6  |
| 图 1.8  | 1930 年 Jolley 的自由曲面设计方法 <sup>[21]</sup> .....                                                                                                       | 7  |
| 图 1.9  | 光束通过自由曲面时波前变化示意图 <sup>[30]</sup> .....                                                                                                              | 9  |
| 图 1.10 | 采用扩展裁剪法设计的自由曲面透镜模型及照明光斑 <sup>[30]</sup> .....                                                                                                       | 9  |
| 图 1.11 | SMS 方法的设计流程。a) 利用等光程原理, 结合光源特性和输出特性, 构建曲面的 Seed Curve; b) 利用等光程原理, 在 Seed Curve 的基础上, 构建曲面的 SMS chain; c) 利用曲面的 Seed Curve 和 SMS chain 构建自由曲面。..... | 12 |
| 图 1.12 | 从光源输出到目标点的映射关系 <sup>[40]</sup> .....                                                                                                                | 13 |
| 图 1.13 | 八边形照明光斑和不连续的自由曲面模型 <sup>[40]</sup> .....                                                                                                            | 13 |
| 图 1.14 | 照度和波前双控自由曲面设计方法结果图 a) 输出照度图; b) 利用前一种设计过程的波前误差值; c) 改进后的输出照度分布图; d) 对应的波前误差 <sup>[43]</sup> .....                                                   | 14 |
| 图 1.15 | 点光源对应的自由曲面及其照度结果图 <sup>[45]</sup> .....                                                                                                             | 15 |
| 图 1.16 | 平行光对应的自由曲面模型及其照明结果图 <sup>[46]</sup> .....                                                                                                           | 15 |
| 图 1.17 | 初始映射和优化后的映射及其对应的旋度示意图。(a)图所示为初始的映射网格及其对应的旋度大小; (b)图所示为优化后的映射网格及其对应的旋度大小 <sup>[48]</sup> .....                                                       | 16 |
| 图 1.18 | 图像变换法所得自由曲面模型及其照明结果 <sup>[48]</sup> .....                                                                                                           | 17 |

|        |                                                                                                                 |    |
|--------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 图 1.19 | 改进的图像变换法所获得的照明结果 a) 预定照明; b) 单自由曲面仅映射优化系统所获结果; c) 单自由曲面映射与辐照双优化所得结果; d) 双自由曲面映射与辐照双优化所得结果 <sup>[50]</sup> ..... | 17 |
| 图 2.1  | 光源出射回转立体角示意图.....                                                                                               | 22 |
| 图 2.2  | 回转近场目标面几何关系.....                                                                                                | 23 |
| 图 2.3  | 自由曲面入射点处的微分几何关系.....                                                                                            | 24 |
| 图 2.4  | 反射几何关系.....                                                                                                     | 25 |
| 图 2.5  | 二维自由曲面照明光学系统示意图.....                                                                                            | 26 |
| 图 2.6  | 氙灯配光曲线.....                                                                                                     | 28 |
| 图 2.7  | 整体系统.....                                                                                                       | 29 |
| 图 2.8  | 光线出射角度与目标点之间的映射.....                                                                                            | 29 |
| 图 2.9  | $\theta$ 离散方法 .....                                                                                             | 31 |
| 图 2.10 | 步长为 $5^\circ$ 时显式和隐式设计结果对比 .....                                                                                | 32 |
| 图 2.11 | 显式和隐式方程所得的光学系统图.....                                                                                            | 32 |
| 图 2.12 | 隐式方程步长为 $5^\circ$ 情况下的设计辐照输出 .....                                                                              | 32 |
| 图 2.13 | 显式方程步长为 $5^\circ$ 情况下的设计辐照输出.....                                                                               | 33 |
| 图 2.14 | 减小步长, 增加离散点数下的显式和隐式设计结果.....                                                                                    | 33 |
| 图 2.15 | 自由曲面母线构造局部示意图.....                                                                                              | 35 |
| 图 2.16 | B 样条母线构造设计结果 .....                                                                                              | 35 |
| 图 2.17 | 自由曲面反射镜加工效果.....                                                                                                | 36 |
| 图 2.18 | 自由曲面面型检测.....                                                                                                   | 37 |
| 图 2.19 | 试验平台搭建示意图.....                                                                                                  | 37 |
| 图 2.20 | 实验台的搭建以及实验过程照片.....                                                                                             | 38 |
| 图 2.21 | 辐照光斑.....                                                                                                       | 38 |
| 图 2.22 | 实验所得辐照输出图.....                                                                                                  | 38 |
| 图 2.23 | 实验仿真数据对比图.....                                                                                                  | 39 |
| 图 2.24 | 氙灯发光示意图.....                                                                                                    | 39 |
| 图 2.25 | $t_x$ 方向光源离焦对照明输出的影响.....                                                                                       | 40 |

|        |                              |    |
|--------|------------------------------|----|
| 图 2.26 | $t_x$ 方向光源离焦辐照输出中心位置处辐照数据示意图 | 40 |
| 图 2.27 | $z$ 轴负向光源离焦对照明输出的影响          | 41 |
| 图 2.28 | 光源 $z$ 轴负向离焦辐照输出中心位置处辐照数据示意图 | 41 |
| 图 2.29 | $z$ 轴正方向光源离焦对照明输出的影响         | 42 |
| 图 2.30 | 光源 $z$ 轴正向离焦辐照输出中心位置处辐照数据示意图 | 42 |
| 图 3.1  | 自由曲面照明光学系统坐标系                | 47 |
| 图 3.2  | 反射定律几何关系示意图                  | 49 |
| 图 3.3  | 切比雪夫点。左图: $N=8$ ,右图 $N=16$ 。 | 53 |
| 图 3.4  | 二维切比雪夫点, $N=32$              | 55 |
| 图 3.5  | 单自由曲面反射镜照明光学系统实验验证示意图        | 56 |
| 图 3.6  | 自由曲面模型                       | 58 |
| 图 3.7  | 光源与目标之间的映射                   | 58 |
| 图 3.8  | 带光线效果的自由曲面照明光学系统             | 59 |
| 图 3.9  | 辐照输出效果图                      | 59 |
| 图 3.10 | 辐照输出三维显示                     | 60 |
| 图 4.1  | 自由曲面照明光学系统示意图                | 61 |
| 图 4.2  | OMT 问题                       | 62 |
| 图 4.3  | 自由曲面模型                       | 73 |
| 图 4.4  | 透射式自由曲面照明光学系统                | 74 |
| 图 4.5  | 计算所得的光源与目标面之间的映射关系           | 75 |
| 图 4.6  | 映射误差示意图                      | 75 |
| 图 4.7  | 实际构建的自由曲面模型                  | 76 |
| 图 4.8  | 透镜矢径信息                       | 76 |
| 图 4.9  | 透射式自由曲面照明光学系统                | 77 |
| 图 4.10 | 透射式自由曲面照明光学系统辐照输出            | 77 |
| 图 4.11 | 仿真分析辐照输出误差图                  | 78 |
| 图 4.12 | 加工所得的自由曲面透镜模型                | 79 |
| 图 4.13 | 自由曲面透射镜粗糙度                   | 79 |

|        |                              |    |
|--------|------------------------------|----|
| 图 4.14 | LED 光源实物图.....               | 80 |
| 图 4.15 | 透射式自由曲面光学系统实验平台.....         | 80 |
| 图 4.16 | LED 光源与自由曲面相对位置关系.....       | 81 |
| 图 4.17 | 透射式自由曲面照明光学系统辐照输出.....       | 81 |
| 图 4.18 | 实验数据处理结果.....                | 82 |
| 图 4.19 | 仿真与实验数据对比.....               | 82 |
| 图 4.20 | 不同位置辐照输出情况.....              | 83 |
| 图 4.21 | 光源沿 x 轴负方向离焦对辐照输出的影响.....    | 83 |
| 图 4.22 | 光源沿 z 轴正方向离焦对辐照输出的影响.....    | 84 |
| 图 4.23 | 光源沿 z 轴负方向离焦对辐照输出的影响.....    | 84 |
| 图 4.24 | 光源出射区域与离散网格的不匹配.....         | 85 |
| 图 4.25 | 高能量利用率自由曲面照明光学系统设置.....      | 86 |
| 图 4.26 | 计算所得的目标辐照区域到光源出射区域的映射关系..... | 87 |
| 图 4.27 | 转换所得的光源到目标辐照之间的映射关系.....     | 88 |
| 图 4.28 | 逼近误差.....                    | 88 |
| 图 4.29 | 自由曲面模型.....                  | 89 |
| 图 4.30 | 反射式自由曲面照明光学系统.....           | 89 |
| 图 4.31 | 仿真分析结果.....                  | 90 |
| 图 4.32 | 反射式自由曲面加工结果.....             | 91 |
| 图 4.33 | 自由曲面顶点附近粗糙度测量结果.....         | 92 |
| 图 4.34 | LED 实物图.....                 | 92 |
| 图 4.35 | 实验平台搭建.....                  | 93 |
| 图 4.36 | 自由曲面与 LED 相对位置关系.....        | 93 |
| 图 4.37 | 辐照输出效果.....                  | 94 |
| 图 4.38 | 实验数据处理所得辐照强度分布图.....         | 94 |
| 图 4.39 | 实验与仿真结果对比图.....              | 95 |
| 图 4.40 | 不同辐照位置下的辐照特性输出.....          | 96 |
| 图 4.41 | 光源沿 x 轴负向离焦对辐照输出的影响.....     | 97 |

|        |                            |    |
|--------|----------------------------|----|
| 图 4.42 | 光源沿 $z$ 轴负向离焦时对辐照输出影响..... | 97 |
| 图 4.43 | 光源沿 $z$ 轴正向离焦时对辐照输出影响..... | 98 |



## 第1章 绪论

### 1.1 引言

人类进入文明的标志就是学会使用火，有意识控制的照明史也由此开始，伴随着科技和文明的发展，照明方式也在不断演变，经历了从最初的火把照明，到燃油照明、气体照明、电灯照明、到现在的 LED 照明等过程。特别是进入 21 世纪以来，健康、节能成为了我们多元化生活的一个重要准则，健康照明、节能照明的概念亦被引入到了照明光学领域，传统的粗放式照明光调控方式越来越难以满足人类需求，相应的，具有更高设计自由度的自由曲面照明应运而生，因其能够实现对光的精细调控受到了光学工程师的青睐，有望取代传统的照明光学系统，使得照明领域进一步拓展，促进非成像光学的跨越式发展。

### 1.2 选题背景及意义

#### 1.2.1 自由曲面概述

传统的光学镜面通常为球面、二次曲面、平面等少量参数即可描述的曲面，参数的调整会引起曲面整体重构，不具备局部操作的特性，难以实现交互式建模。近些年来，随着慢速伺服单点金刚石车削（Slow-servo single-point diamond turning）以及计算机控制的小垫抛光技术（computer controlled small lap polishing）的进步使得自由曲面形状的光学表面制作成为可能，特别是对于非旋转对称式的自由曲面光学表面。根据自由曲面的应用领域和面向目标的不同，Zenik 多项式<sup>[1]</sup>、Q 多项式<sup>[2]</sup>、RBF(Radial Basis Functions)<sup>[3,4]</sup>，NURBS 曲面<sup>[5]</sup>等均能够用来描述自由曲面造型。

以 NURBS 曲面为例，这种借助于非均匀有理 B 样条数学式所描述的自由曲面几乎能够满足任意曲面的造型要求，而且通过控制点的调整，能够实现曲面的局部调整<sup>[5]</sup>，这种自由曲面早期多用于船体、汽车车身以及航天器外壳的造型，若用作光学镜面的面型构造，其良好的局部操作性能够实现光线传播的精细调控，使得系统设计具备极大的灵活性，也给系统输出带来了巨大的想象空间。



### 1.2.2 自由曲面照明光学系统的优势

自由曲面对输出光线精细调控的特性,使照明输出进入了“定制”时代。系统精确控制光线走向以到达预定区域,拥有极高的设计自由度,不仅使得光学系统的空间布局更为灵活,而且能够提升能量利用效率、简化照明系统结构,下面就结合几种常见的应用示例进行说明。

#### 1) 自由曲面在能量利用方面的优势

路灯照明是我们生活中常见的照明方式,传统路灯为粗放式照明,缺乏对输出能量的有效规划。以图 1.1 所示的随拍夜景为例,路灯输出椭圆型照明光斑,光斑中间区域亮,边缘区域暗,路灯间呈现有规律的明暗相间分布,在相距较远时,相邻路灯均难以覆盖的区域会形成明显暗带,不利于晚间安全出行。

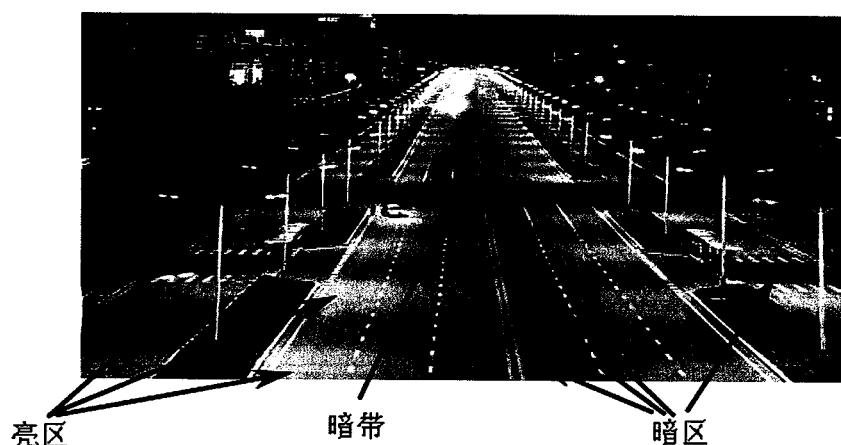


图 1.1 路灯夜景图

针对该情况,可设计对出光精细控制新型路灯照明系统,如输出矩形光斑,并调整不同照明区域的能量大小。不仅可实现照明区域的拼接,形成照度一致的路面,且不同区域(主路面、人行道、绿化带)可根据使用情况给予不同照度,保证能量利用率最大化,减少无意义的损耗。据不完全统计,30%左右的户外照明能量都被浪费<sup>[6,7]</sup>。对特殊情况,可视情况具体设计,避免暗带的产生。Wu 等人<sup>[8]</sup>已经就晚间公园的路灯照明提供了解决方案,如图 1.2 所示,实现了照明区域及各区域照度大小的精确控制,该设计思路易于引入到上述路灯设计中,实现预期照明输出。

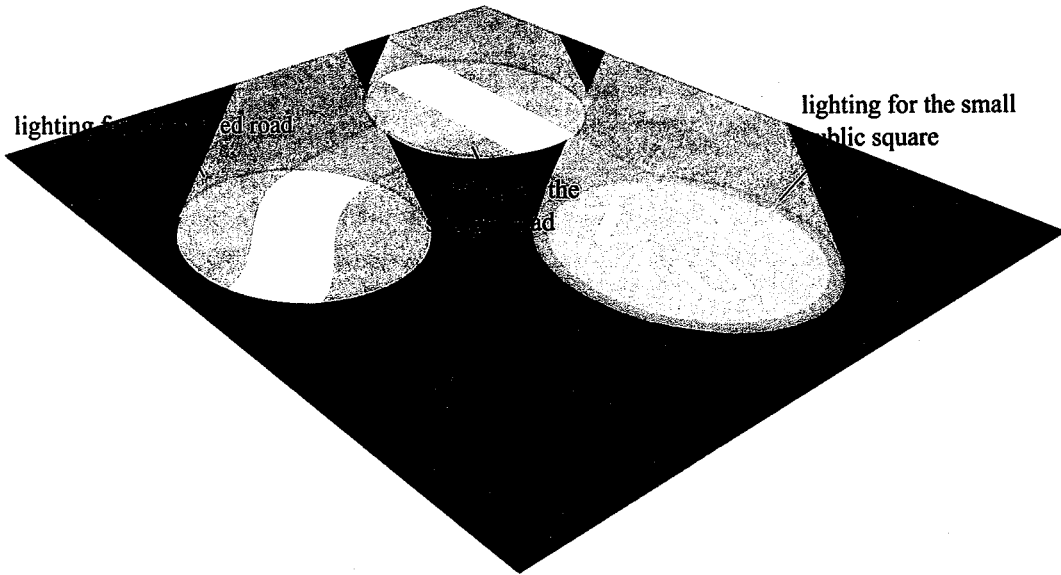


图 1.2 专用 LED 路灯照明示意图<sup>[8]</sup>

2) 自由曲面在简化系统方面优势

太阳模拟器是在室内模拟太阳在不同大气质量条件下光辐照特性的一种试验或定标设备，多用于空间飞行器的环境模拟试验，是空间环境模拟设备的主要组成部分，能够为航天器提供与太阳光谱分布匹配的、均匀、准直稳定的太阳光辐照，常规太阳模拟器光学系统如图 1.3 所示。

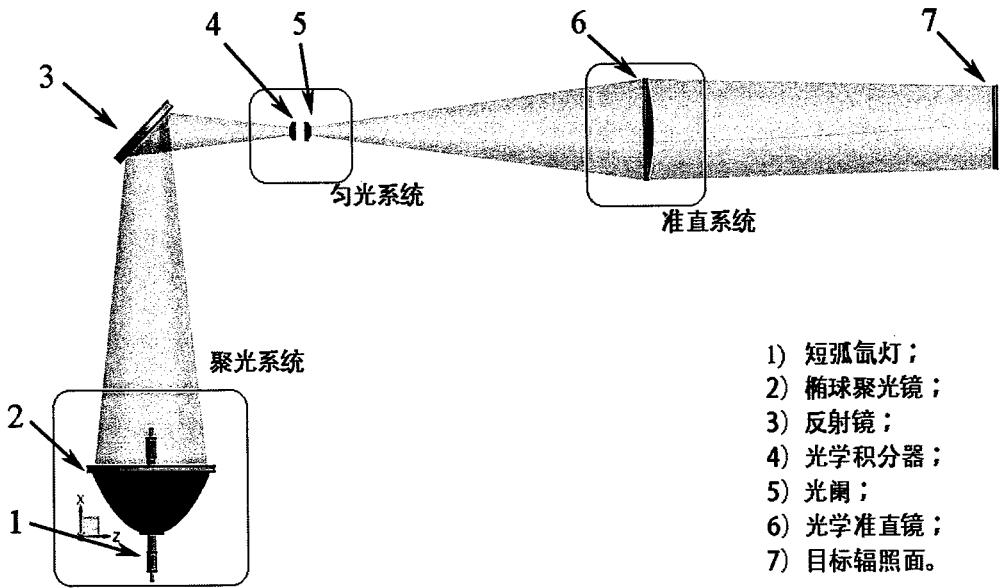


图 1.3 太阳模拟器光学系统

根据图 1.3 所示，光学系统由聚光系统、匀光系统和准直系统组成，主要包

括短弧氙灯、椭球聚光镜、反射镜、光学积分器、光阑、光学准直镜和目标辐照面组成。工作原理：位于椭球聚光镜第一焦点附近氙灯氙弧发出的光辐射通量，经聚光镜内表面反射以给定包容角汇聚投影到椭球镜第二焦面上，形成较大范围的辐照分布，该辐照分布被位于第二焦面上的光学积分器场镜阵列对称分割成  $N$  个小范围的辐照范围，并经光学积分器投影镜阵列中对应的元素透镜成像到无穷远，叠加形成较均匀的辐照分布，经光束准直系统以一定的照明孔径角（即准直角）投影到准直物镜后焦面附近，形成均匀的有效辐照面。

太阳模拟器光学系统为能量系统，能量利用率是关键的评价指标。但在复杂的光学系统重重衰减下，能量利用率很低；且整体结构复杂，导致仪器笨重，便携性差。若采用自由曲面设计该光学系统，仅需短弧氙灯、自由曲面反射镜和目标面即可实现，如图 1.4 所示。通过自由曲面对光线的精确调控，在目标面上以一定准直角接收能量，形成均匀、稳定的辐照分布，不仅能够提升系统能量利用率，还可降低系统复杂程度，提升仪器便携性。

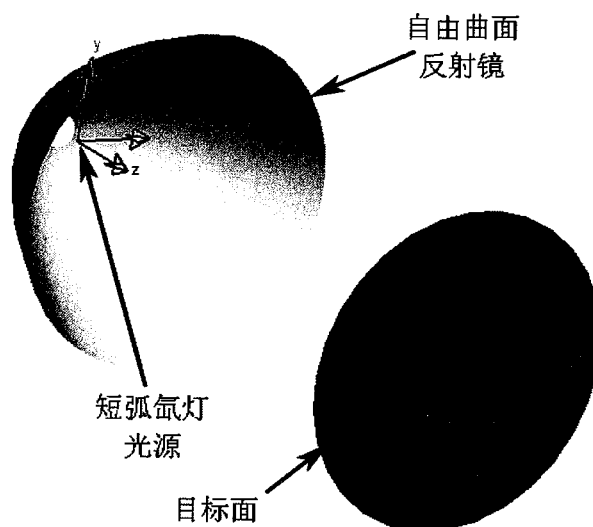


图 1.4 自由曲面光学系统

### 3) 自由曲面在空间布局中的优势

投影仪是日常办公中的常用设备，目的是将计算机或其他设备输入的信号投射到屏幕上，便于观看和分析。常规情况下，投影仪与屏幕之间有固定的距离范围，一般为 3 米~4 米，可根据屏幕大小进行调整。Muñoz 等人基于 SMS

(simultaneous multiple surface) 方法设计了一套光学系统，耦合到投影仪出光光路上，实现了超短投影距离、高紧凑性和宽投影角度的光学系统<sup>[9]</sup>。改造后的投影仪空间布局和常规投影仪空间布局对比如图 1.5 所示，改造细节和实物如图 1.6、图 1.7 所示。

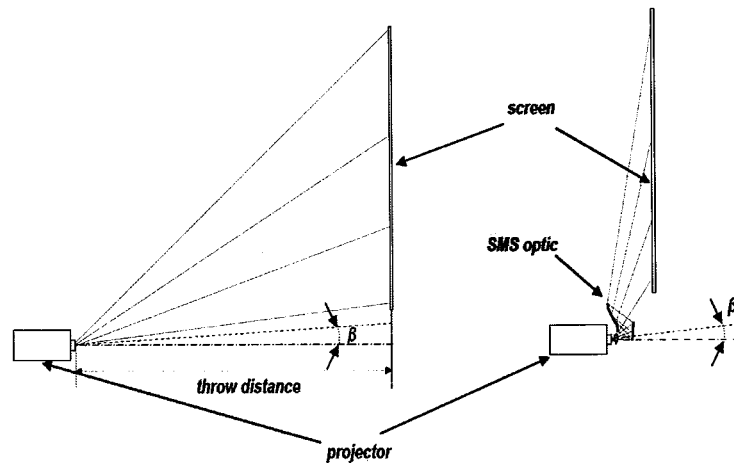


图 1.5 改造后的投影仪和常规投影仪的空间布局对比<sup>[9]</sup>

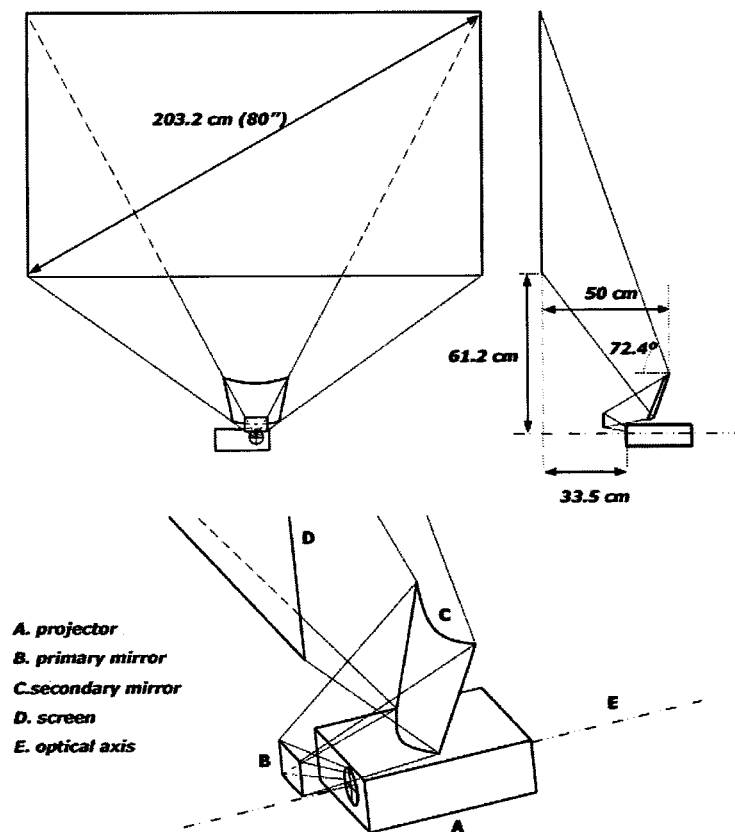


图 1.6 改造后光学系统细节图<sup>[9]</sup>

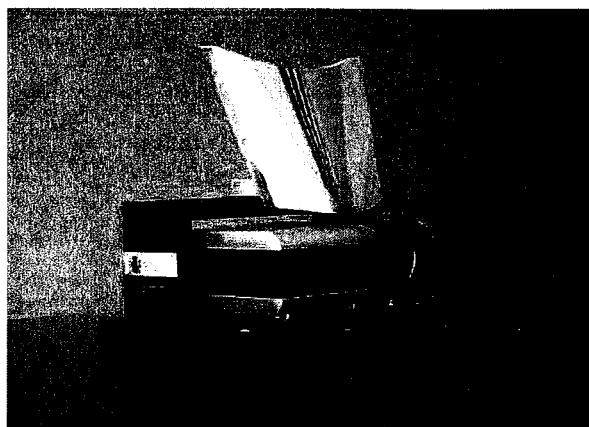


图 1.7 投影仪改造光学系统实际效果图<sup>[9]</sup>

图 1.5~图 1.7 显示,自由曲面的引入改变了整体投影仪空间布局,突破了安装空间的限制,使得整体布局更为灵活。近些年激光投影电视的出现,代表着未来电视技术发展的方向之一,其具有投影区域灵活可变,分辨率高,色域宽,色纯度高,无有害电磁射线辐射等特点。但其安装需求的空间与室内布局常出现冲突,自由曲面的引入能够完美解决投影电视安装的空间布局限制,避免电视影响美观或受周围环境的影响。

从以上三个应用实例能够看出,相对于传统的照明光学系统,自由曲面照明不仅能够提升能量利用效率,简化光学系统,减小仪器的体积重量,获得更好的光学性能,同时具有更为灵活的空间布局等优势。

### 1.2.3 课题研究的意义

随着科技进步,人们对未知领域的探索不断深入,自由曲面照明光学系统的应用领域不断拓展,路灯照明、医学照明、射灯照明、汽车前照灯照明、激光光束整形等从室内照明到室外照明,从一般照明到特殊照明,都有自由曲面的用武之地<sup>[10-16]</sup>。应用领域的拓展使得自由曲面照明拥有更为广阔的前景,相应的,对自由曲面照明光学系统设计方法的研究也拥有更为重要的应用价值。

## 1.3 自由曲面照明光学系统的发展和现状

### 1.3.1 自由曲面照明的早期研究

人类在很久以前就懂得利用二次曲面的光学特性。2000 年前就能够利用抛

物反射镜聚拢光线，以大幅提升光照强度，甚至于在焦点上点燃火焰<sup>[17]</sup>。但其反向应用，将二次曲面用于照明装置，时间上要推迟到 18 世纪。据记载，1776 年的英国康斯坦丁灯塔是第一个应用抛物反射镜照明的装置，它由石膏铸成抛物镜形状，并在上面镶嵌多个细小反射镜片制成<sup>[18]</sup>。随着二次曲面镜面加工技术的进步和完善，到 19 世纪末，二次曲面照明应用已非常普遍<sup>[19,20]</sup>，此时已能够自如利用二次曲面特性，通过旋转、扫掠和拼接，实现光束扩散的目的，但受限于二次曲面特性，仅能粗略扩散光束，还谈不上对光线传输的精细控制。

自由曲面照明光学系统设计本质是一个逆向工程，即给定一个预期辐照和光源，设计合理的自由曲面光学系统实现对光源输出光线的精确控制，使其经过光学系统偏折后，到达目标面的合理位置，获得预期辐照输出。二十世纪 30 年代，Jolley 结合二次曲线的特性，提出了一种能够实现光线传输方向连续控制的自由曲面设计方法。其设计思想是将光线传输方向离散化，通过合理分配各离散区间能量，结合几何作图法，获得一系列离散点及其几何特性，采用一条光滑连续的曲线连接离散点形成母线，扫掠形成自由曲面反射镜<sup>[21,22]</sup>，示意如图 1.8 所示。该方法是自由曲面照明的起始，也是第一次将光线的精细控制纳入到系统设计中。1932 年，Boldyrev 对该方法进行完善<sup>[23]</sup>，获得了母线数学表达式。该方法思路简单，结果直观，易于实现，为后续自由曲面照明设计提供了基础。

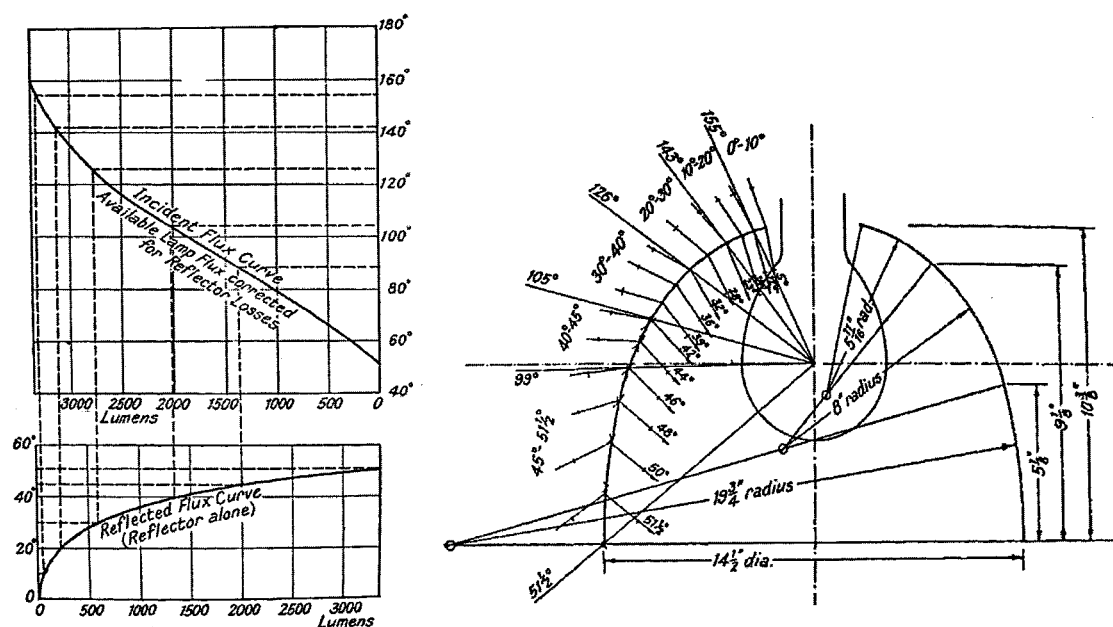


图 1.8 1930 年 Jolley 的自由曲面设计方法<sup>[21]</sup>

20 世纪 30 年代到 70 年代中, 涌现了许多新的自由曲面照明系统, 但本质上未出现新的设计方法。1974 年, Elmer 发表图书《The Optical Design of Reflectors》, 书中综合了当时自由曲面设计方法的知识, 结合实践经验, 建立了一套更加严格和实用的自由曲面设计方法<sup>[24]</sup>。与此同时, 自由曲面设计在照明领域的一个并行领域, 即太阳能利用中获得了长足的发展, 涌现了多种新的设计方法以实现最高的太阳能利用效率。有 60 年代的 compound parabolic concentrator(CPC)<sup>[25]</sup>法、String Method 和 Point-Source Differential Equation Method(即 Ordinary Differential Equation method, ODE method)、70 年代的 Flow Line Method、80 年代的 Tailored Edge-Ray Method 和 90 年代的 Simultaneous Multiple Surface(SMS) Method。这些设计方法为自由曲面在照明领域的应用提供了新的设计思路和理论基础, 推动了自由曲面在照明领域的发展, 后续多种设计方法的出现均来源于此。

如 60 年代提出的 ODE 设计方法, 最初应用于太阳能领域, 后被引入照明应用领域中。其基本思想为利用光源的发光特性和目标照明要求, 根据能量守恒定律, 建立光源出射角度和目标面上对应点的映射关系。利用导数的几何意义, 结合折射或反射定律建立自由曲面母线所满足的微分方程, 并根据所得映射关系解微分方程获得自由曲面的面型数据。Tai<sup>[26]</sup>、Liu<sup>[27]</sup>和陈家奇<sup>[28]</sup>分别采用了不同方式获得了均匀圆形照明光斑。

### 1.3.2 自由曲面照明光学系统的发展和现状

上述方法多为二维设计, 核心在于通过不同方式获得自由曲面母线, 扫描母线生成自由曲面, 拼接曲面形成不同照明输出效果。该方法可实现光线一维精细控制, 照明输出具有对称特性。随着社会进步, 对照明要求不断提高, 出现了对整个输出光线精细控制的需求, 这种照明输出不具备对称特性, 使得原有设计方法力不从心。从对称性照明到非对称性照明的发展不是简单的 2D 到 3D 设计的过渡, 在设计难度和复杂程度上都有着质的提升。

1972 年, Schruben 首次对该问题进行深入研究, 构建照明系统坐标系, 获得了非对称性自由曲面照明光学系统数学模型, 即椭圆型 Monge-Ampère 方程, 这是一种强非线性二阶偏微分方程<sup>[29]</sup>, 囿于当时的计算能力, 并未给出方程的具

体解决方法。鉴于方程的强非线性，该偏微分方程非常难解决，直到现在仍然是非常具有挑战性的工作。

2002 年，Ries 在自由曲面照明光学系统上取得了里程碑式的进展，他采用扩展裁剪法解决了三维设计问题，获得了带有“oec”字样的辐照分布<sup>[30]</sup>，这是非对称性复杂辐照输出。其设计方法核心在于综合了入射波前曲率、出射波前曲率和入射点处自由曲面曲率之间的关系（如图 1.9 所示）、传输能量密度与光束波前高斯曲率之间的关系及能量守恒定律，获得了类似于 Schruben 所得的 Monge-Ampère 方程，通过数值解法求解方程，获得了自由曲面面型数据，进而构建光学系统，获得预期辐照分布，如图 1.10 所示。Rise 构建了光滑连续的自由曲面，实现了目标照明的精细控制，但他并未公布具体设计细节，其他研究人员不得不重新探索新的方法来解决该问题。

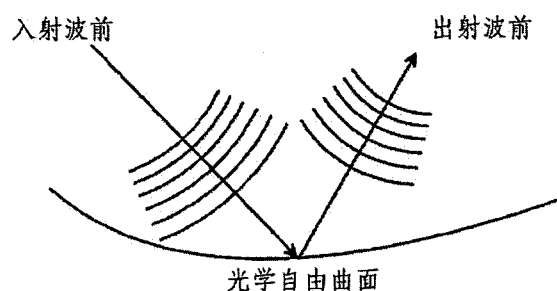


图 1.9 光束通过自由曲面时波前变化示意图<sup>[30]</sup>

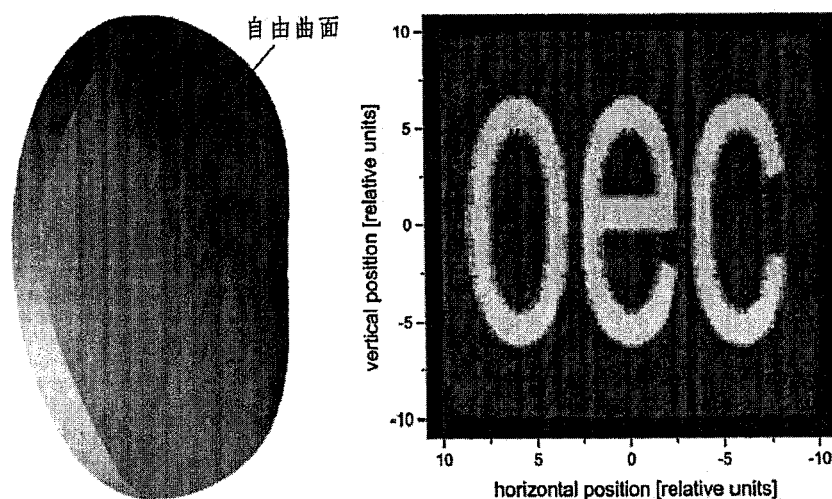


图 1.10 采用扩展裁剪法设计的自由曲面透镜模型及照明光斑<sup>[30]</sup>

通常意义上的自由曲面照明光学系统设计可以这样描述，给定一个光源模型



和目标辐照分布，设计一个合理的自由曲面光学系统以重新分配光能，使目标辐照输出与预期相符。评判设计方法优劣的因素很多，如设计效率高低、能否处理复杂目标照明、自由曲面是否光滑连续、系统是否依赖初始结构、能量传递是否高效、光束分布能否精确调控等。

目前自由曲面照明设计方法大体上能够分为三类：优化法，几何法和数学法。优化法的设计思想在于参数化自由曲面并合理选取优化变量，借助适当的优化算法不断调整优化变量的取值使得评价函数趋于极值，直至满足预定要求；几何法最具代表性的就是 Olikier 的 Supporting Conic Method，其设计思想就是将预期照明离散化，并利用能量守恒定律将离散化后的辐照分布与一些常规的几何曲面片（如抛物面、椭球面或笛卡尔卵圆面片）一一对应，调整这些曲面片的参数使其满足离散辐照分布，最后由这些曲面片的包络面来确定自由曲面形状；数学法的设计思想在于根据光源的发光特性和预定照明的要求，根据 Snell 定律、能量守恒定律并结合基本的几何关系构建光学自由曲面所满足的数学方程，通过求解数学方程获得自由曲面面型数据，进而构建自由曲面，如 ODE (Ordinary Differential Equation) 法，扩展裁剪法，SMS (Simultaneous Multiple Surfaces) 法等。

自由曲面对光束的精确调控，本质在于准确实现出射光线和目标点之间的映射关系。2007 年 Wang 提出了一种基于变量可分离映射关系的自由曲面优化设计方法<sup>[31]</sup>，获得了“E”字形照明光斑，但所得自由曲面仅具有局部光滑连续性，曲面片间存在台阶状的不连续状态，使得加工性很差。这种台阶状不连续来源于人工划分网格的映射关系难以满足可积条件：

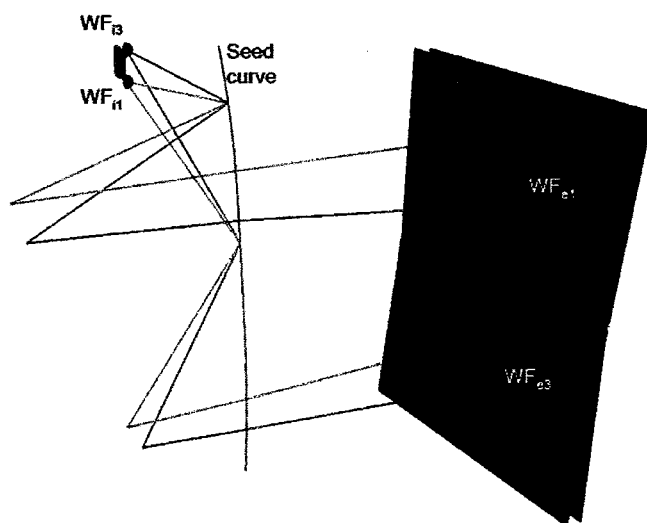
$$N \cdot (\nabla \times N) = 0 \quad \dots(1.1)$$

式中：N—自由曲面对应点的法线

在后续的优化设计方法中，Wang<sup>[32]</sup>、Luo<sup>[33]</sup>、Wu<sup>[34]</sup>分别采用不同方式实现了预期的辐照输出，同时保持了自由曲面的光滑连续性。保持自由曲面的光滑连续性是优化法的最大进步，但这种方法也存在不足之处：第一，采用 Monte-Carlo 原理的光线追迹算法，为减小模拟统计噪声，每次迭代都要追迹数量庞大的光线，耗时长，效率低；第二，依赖初始结构的选取，初始结构的性能直接影响优化结果的优劣；第三，只能解决对称性较好的三维照明问题，对于复杂照明效果不佳。

Oliker 所提出的 Supporting-Conic Method 为自由曲面照明光学系统设计几何法的代表, 早在 1998 年 Kochengin 和 Oliker 就给出了近场自由曲面照明系统的设计方法<sup>[35]</sup>, 并附有具体解法和示例。该方法理论上只要选取数量足够的离散点, 即可实现任意复杂照明。但其制约因素在于设计效率, 随着离散点数增加, 计算时间几乎呈指数关系增长, 因此只能解决少量离散点即可表征目标照明的简单照明问题。尽管在 Oliker 几何法基础上, Fournier<sup>[36]</sup>和 Canavesi<sup>[37,38]</sup>进行了优化和拓展, 提升了系统设计效率, 但仍不足以处理数量庞大的离散点, 难以解决精细复杂的照明问题。

SMS 方法是一种适用于非对称辐照输出的自由曲面照明光学系统设计方法。最初主要用于太阳能聚焦装置的设计, 并由 Benitez 在 2004 年将其应用于照明系统设计<sup>[39]</sup>。其设计思想在于利用光源的发光特性和目标照明建立入射波前和出射波前之间的光程关系, 根据光程关系求解自由曲面的面型数据。核心在于利用特征点来表征光源和目标面, 并根据选取特征点的数量设计对应数目的自由曲面以满足各特征点的光程关系。随着自由曲面数量的增加, 对输出结果的控制能力亦随之增加, 其设计过程如图 1.11 所示。SMS 方法所设计的光学系统结构紧凑, 具有较强的控制能力, 对于简单的照明输出, 如矩形均匀辐照面, SMS 方法设计过程简单, 能够取得不错效果; 但对于复杂非对称性照明, 出射波前很难描述, 入射波前和出射波前之间的关系建立异常繁琐, 实现起来非常困难。



a) 建立 Seed Curve

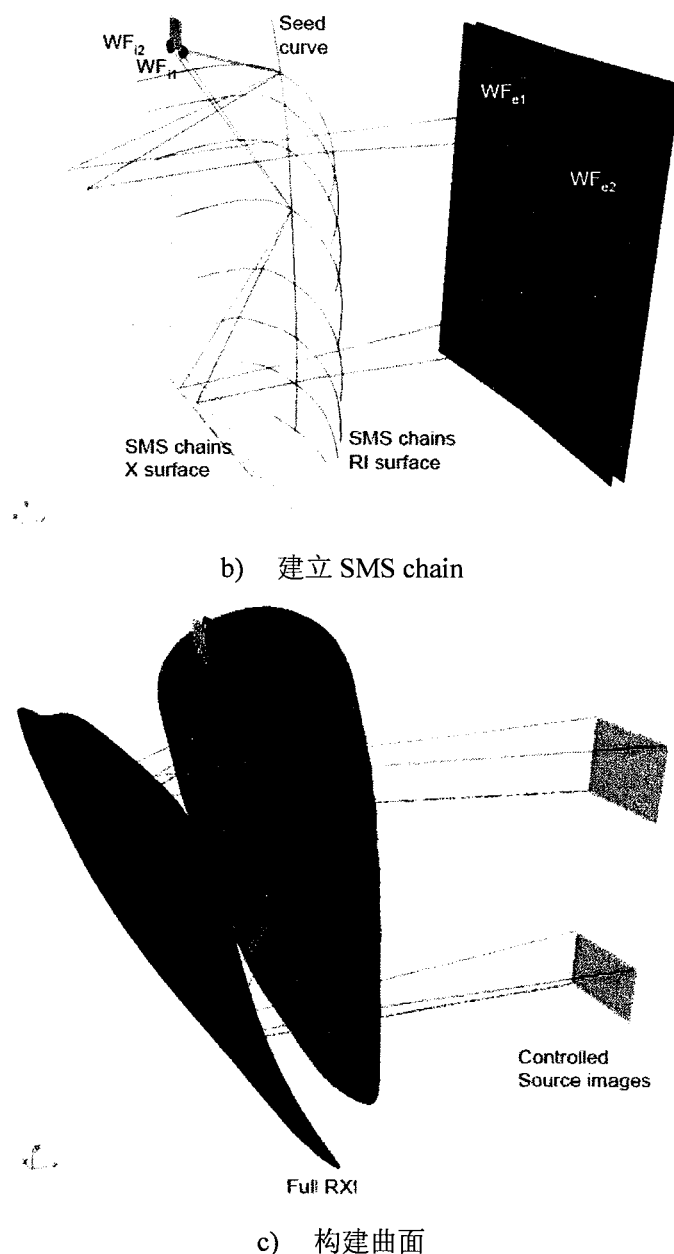


图 1.11 SMS 方法的设计流程。a) 利用等光程原理，结合光源特性和输出特性，构建曲面的 Seed Curve; b) 利用等光程原理，在 Seed Curve 的基础上，构建曲面的 SMS chain; c) 利用曲面的 Seed Curve 和 SMS chain 构建自由曲面。

不同于 Wang<sup>[31]</sup>的网格划分格式，Ding 等人在 2008 年根据另一种变量可分离形式的映射关系提出了一种基于偏微分方程的自由曲面设计方法，映射关系如图 1.12 所示。设计思路：根据光线传输定律和微分几何知识建立自由曲面满足的一组偏微分方程，根据光源出射方向和目标点的映射关系，通过数值求解获得

自由曲面的面型数据<sup>[40,41]</sup>。相对于 Wang 的设计方法, Ding 等人并未摆脱人为获取映射关系的桎梏, 自由曲面同样不具备光滑连续性; 但有其积极的方面, 这是一种数学方法, 构建了具有普适性的偏微分方程, 大大提升了设计效率, 且能够适用于复杂照明输出。尽管曲面不光滑连续, Ding 采用大量小面片构建模型以减小自由曲面构造偏差, 降低了加工难度, 所得自由曲面模型及其八边形辐照输出光斑如图 1.13 所示。

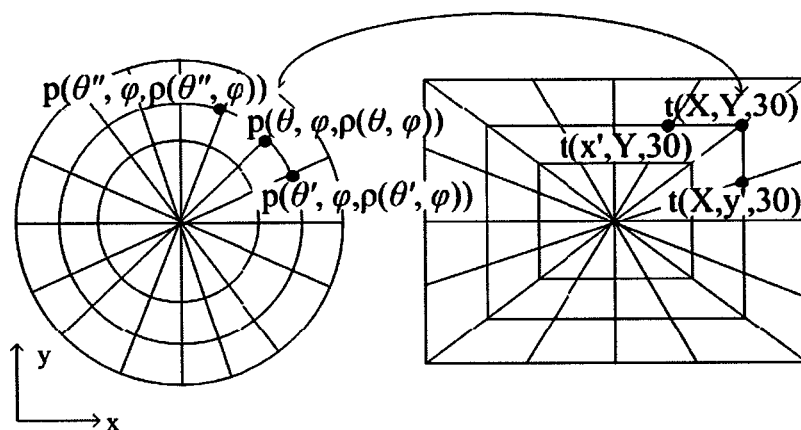


图 1.12 从光源输出到目标点的映射关系<sup>[40]</sup>

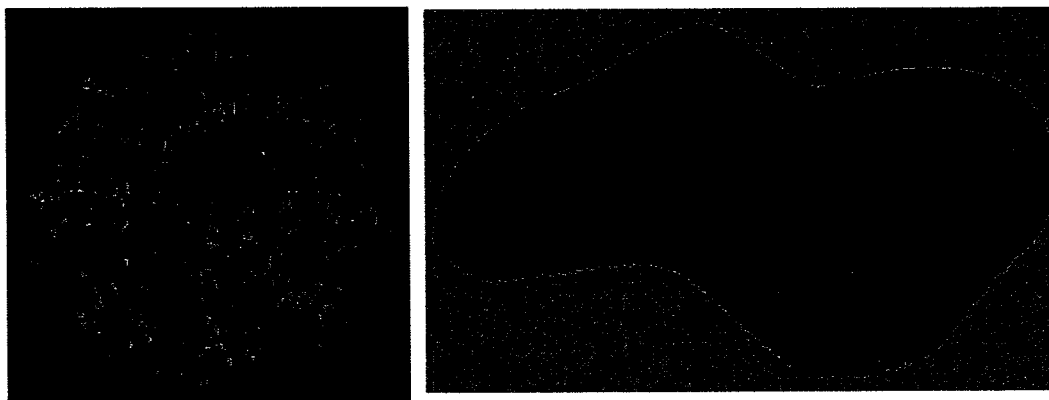


图 1.13 八边形照明光斑和不连续的自由曲面模型<sup>[40]</sup>

上述提到的数学法、优化法和几何法, 三种方法各有优势, 但也存在不足。优化法和几何法经过不断发展, 已能够处理一些简单照明问题, 接近实用; 尽管数学法设计灵活、设计效率高, 能够处理复杂照明问题, 具有极大潜力, 但所构造曲面的不连续性, 严重制约了该设计方法的发展。近几年, Feng、Wu 和 Adrien 通过不同途径, 在保留数学法原有优势的基础上, 构建了光滑连续的自由曲面,

推动数学法前进了一大步。

Feng 等人提出了一种基于波前控制的自由曲面设计方法<sup>[42]</sup>。基于能量守恒定律和变量分离法获得的映射关系，根据折射定律和光程关系构建自由曲面模型。这种基于变量分离法所得的自由曲面面型数据，在面型构建中存在误差，尽管系统基本实现了预期照明要求，还有提升空间；在后续的研究中 Feng 等人对设计过程进行了改进和优化<sup>[43]</sup>，利用 parabolic Monge-Ampère(PMA)自适应网格法对初始映射进行了优化<sup>[44]</sup>，使所得映射关系不仅能够满足目标要求，也能满足可积条件；在曲面构建过程中，引入更多控制因素，使得自由曲面构建更为合理，所得结果如图 1.14 所示。

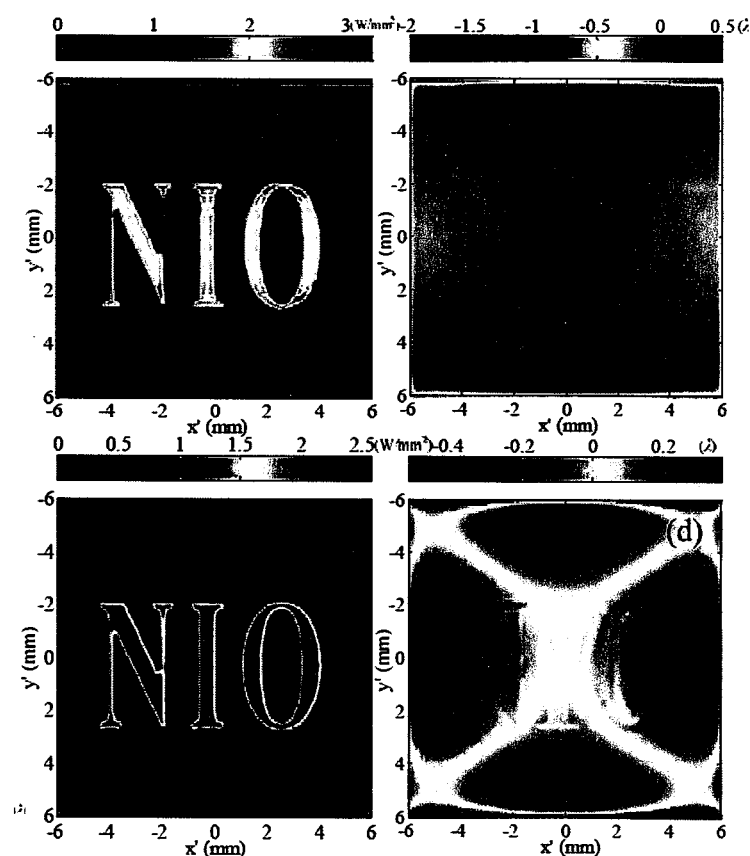


图 1.14 照度和波前双控自由曲面设计方法结果图 a) 输出照度图；b) 利用前一种设计过程的波前误差值；c) 改进后的输出照度分布图；d) 对应的波前误差<sup>[43]</sup>

Wu 等人针对自由曲面照明问题提出了一种直接解方程法<sup>[45,46]</sup>。首先构建系统坐标系，基于能量守恒定律和光线传输定律获得系统 Monge-Ampère 形式的二

阶非线性偏微分方程, 将方程及其边界条件离散化, 利用差分格式近似替代方程偏导项, 获得一系列非线性方程组, 求解非线性方程组获得自由曲面的面型数据。在自由曲面的构建中, 采用一种以单位切矢为约束条件的曲面构造方法, 即双三次曲面插值法构建双三次 Bézier 曲面片, 缝合各曲面片获得整体的自由曲面<sup>[47]</sup>, 这种构建方法不仅保持了曲面的光滑连续性, 还能精确调控光束分布, 满足所得映射关系, 取得了不错的效果。所得模型和结果如图 1.15 和图 1.16 所示。

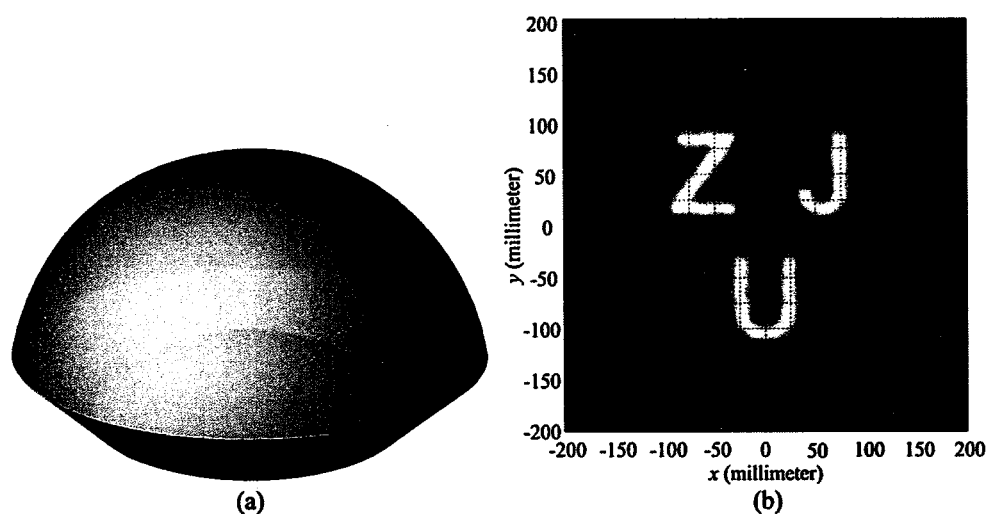


图 1.15 点光源对应的自由曲面及其照度结果图<sup>[45]</sup>

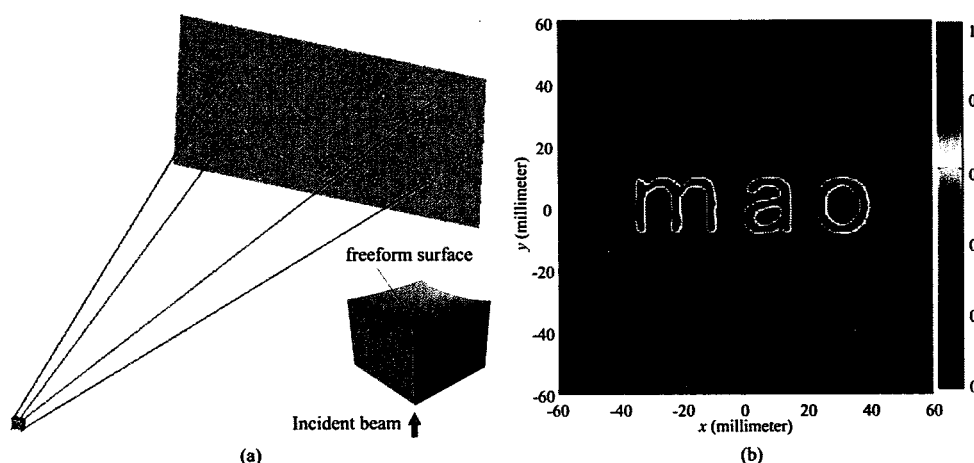


图 1.16 平行光对应的自由曲面模型及其照明结果图<sup>[46]</sup>

Adrien 基于图像变换原理, 提出了一种多自由曲面光学系统设计方法<sup>[48]</sup>。利用球极平面投影法将光源的发光特性投射到平面上, 使得平面上光源特性与目标面上预期照明之间的图像变换转化为 Monge-Kantovich 传输问题。设计过程

分为两步，与 Feng 设计思路类似，首先获得合理的映射关系，然后根据映射关系构建自由曲面。初始的映射关系由变量分离法获得，然后构建发展方程进行优化<sup>[49]</sup>，最终获得一种无旋化的映射关系，如图 1.17 所示。在无旋化映射关系的基础上，利用三角网格法构建自由曲面，通过不断调整网格节点参数，使得预期目标点与实际光线落点的加权距离最小，所得模型和照明结果如图 1.18 所示。2013 年，Adrien 在原有设计基础上改进了曲面构造过程，使其适用于复杂照明系统<sup>[50]</sup>，在原有优化规则的基础上，引入了自由曲面光滑性和能量守恒两个因素，提升了光束精确调控能力，获得了高分辨率的目标照明，如图 1.19 所示。

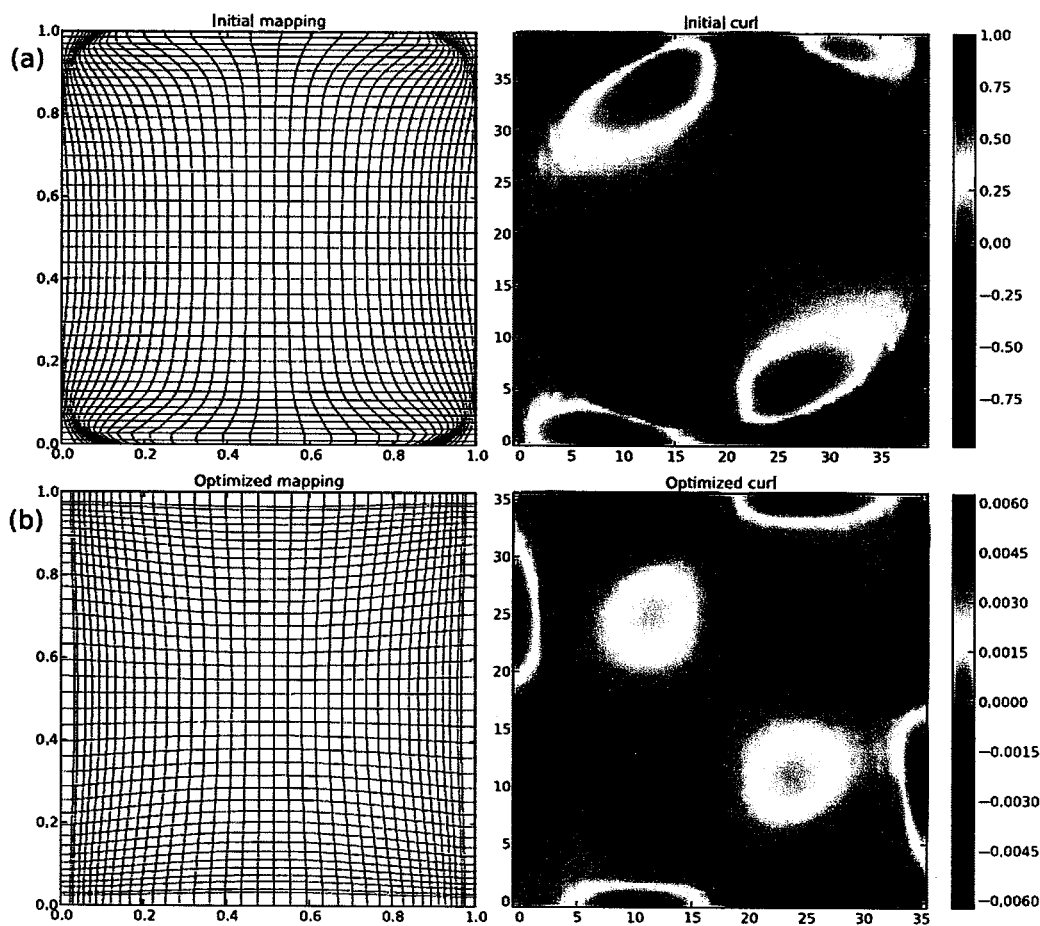


图 1.17 初始映射和优化后的映射及其对应的旋度示意图。(a)图所示为初始的映射网格及其对应的旋度大小；(b)图所示为优化后的映射网格及其对应的旋度大小<sup>[48]</sup>

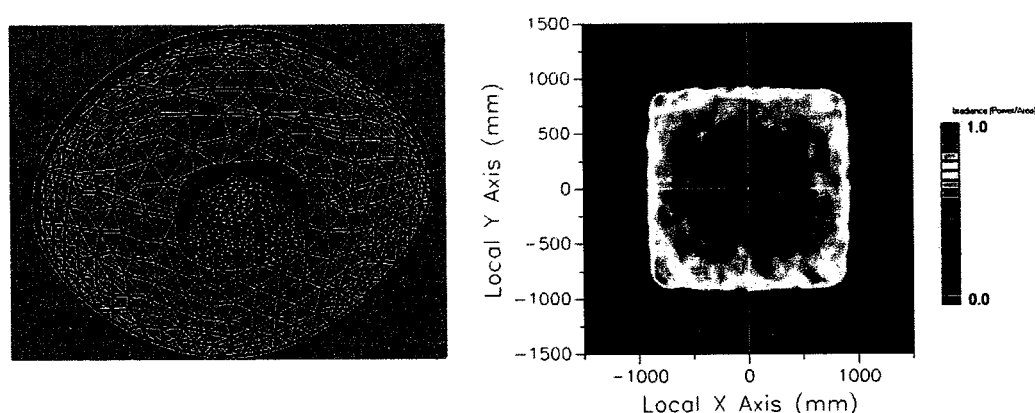


图 1.18 图像变换法所得自由曲面模型及其照明结果<sup>[48]</sup>

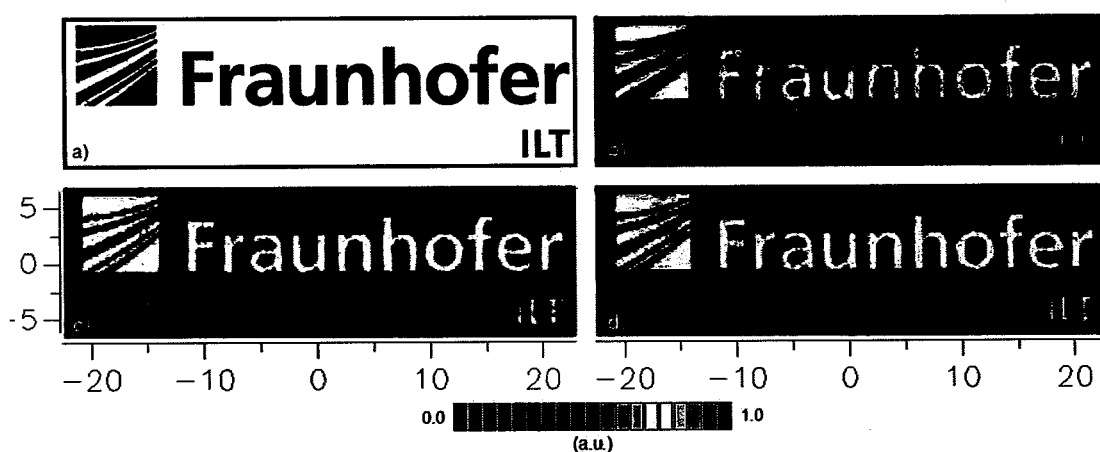


图 1.19 改进的图像变换法所获得的照明结果 a) 预定照明；b) 单自由曲面仅映射优化系统所获结果；c) 单自由曲面映射与辐照双优化所得结果；d) 双自由曲面映射与辐照双优化所得结果<sup>[50]</sup>

综合以上所提到的自由曲面照明系统设计方法，以及各设计方法所属的三大类型，即优化法，几何法和数学法，三大类型的设计方法均有其整体特性，如优化法能够获得光滑连续的自由曲面，但效率较低，设计结果依赖初始结构的选取；几何设计法理论上适用于任意复杂的目标照明，但受限于设计效率，多解决简单目标照明问题；数学方法设计效率高，且能够适用于复杂照明，目前已经解决了自由曲面光滑连续性的问题。Wu 的设计方法隶属于数学法中的 M-A 方程法，Feng 和 Adrien Bruneton 的设计方法隶属于数学法中的映射法，上述三种设计方法均面向点光源。对于平行光光源，Wu、Yadav、Bösel、Wojtanowski 均进行过相关的研究，在保证自由曲面光滑连续的基础上获得了高分辨率的辐照输出效果



[46,51-55], 相对于点光源, 平行光光源对应的系统模型较为简单和易于处理, 本课题的研究主要侧重于点光源自由曲面照明光学系统的设计。在面向点光源自由曲面照明光学系统设计中, Wu、Bösel、PRINS、BRIX 均有过深入的研究<sup>[56-59]</sup>, 但上述几种面向点光源的自由曲面设计方法, 均需处理极为复杂的系统方程, 鉴于该方程不存在解析解, 在解方程过程中需要极其复杂的数字技巧, 且常受困于奇异解。论文开展研究工作的核心在于如何保持数学法高设计效率和实现复杂照明的基础上, 降低设计难度、提升设计效率、实现更为简单和灵活的自由曲面照明光学系统设计。

#### 1.4 本课题的主要研究工作

随着科技的发展和人们生活的不断进步, 自由曲面照明光学系统拥有广阔的应用前景, 对其研究具有深刻的意义。鉴于数学法的高设计效率及能够实现复杂照明输出的特性, 本课题立足于数学法开展研究工作, 具体章节内容安排如下:

第一章: 介绍了自由曲面的特性及自由曲面照明光学系统的特点, 并结合实例, 阐述了自由曲面照明相对于传统照明的优势。然后介绍了自由曲面照明光学系统设计方法的发展趋势, 并根据优化法、几何法和数学法几种设计方法的特质, 选取数学法作为本课题开展研究工作的基础。根据目前数学法存在的问题, 提出了本课题开展研究工作的方向。

第二章: 面向二维自由曲面照明光学系统设计问题, 构建整体系统显式和隐式数学模型, 求解两种数学模型获得面型数据, 进而构建自由曲面母线, 通过扫描母线获得自由曲面模型, 完成系统设计。确定了基于隐式数学模型和样条母线构建的整体系统设计思路, 并将所设计的光学系统引入太阳模拟技术领域, 与常规太阳模拟器光学系统输出结果进行了对比。

第三章: 根据自由曲面照明光学系统几何关系, 结合光线传输定律和能量守恒定律, 获得系统数学模型, 即椭圆型 Monge-Ampère 方程, 一种强非线性二阶偏微分方程。为求解系统数学模型, 引入切比雪夫谱方法, 构建了切比雪夫谱求导矩阵, 采用求导矩阵处理方程, 完成系统设计, 并以方形均匀辐照输出作为预期照明对设计方法进行了验证。

第四章：从 Monge-Ampère 方程的来源出发，探究 Monge-Ampère 方程与 Optimal Mass Transport(OMT)问题的关系，得出了 Monge-Ampère 方程来源于  $L^2$  Monge-Kantorovich Mass Transport 问题。基于此构建了自由曲面照明光学系统两种简化的 Monge-Ampère 方程系统模型，一种基于光源到目标辐照的映射，另外一种基于目标辐照到光源的映射。引入傅里叶谱方法解决所得数学模型，构建了谱求导矩阵，采用求导矩阵处理方程，完成系统设计。并以两种最典型的辐照输出作为实例设计光学系统，一种面向复杂辐照输出；另一种面向系统高能量利用率；结合实验和仿真分析验证该设计方法的有效性和实用性。

第五章：对全文进行总结，并对后续工作做了展望。



## 第2章 基于常微分方程的自由曲面照明光学系统设计

### 2.1 引言

在自由曲面照明光学系统中, 平行光光源和点光源均为展度为 0 的光源, 这是对光源尺寸或者光源的扩散角忽略不计下的一种近似情况, 且两者的设计思路相同, 因此本章研究工作的开展就以其中一种情况为例, 考虑到在实际应用中, 点光源为更为普遍的存在形式, 如短弧氙灯、卤钨灯、单 LED 等, 发光区域均不大, 本章研究工作的开展就基于点光源照明的光学系统。

实际应用中, 对称性辐照输出为常见的出光形式, 如室内射灯照明、太阳模拟器、LED 强光手电等, 其中以均匀圆形辐照输出的太阳模拟器应用最为典型。本章以均匀圆形辐照光斑作为预期照明输出, 探究这类自由曲面照明光学系统的特性, 为实现更为复杂辐照输出的光学系统设计奠定基础。

### 2.2 构建光源出射光线与目标辐照面对应点的映射关系

面向具有对称性的辐照输出, 常规做法就是通过对光线的一维精细控制, 获得自由曲面母线, 扫掠母线获得满足辐照输出要求的自由曲面模型。在该情况下, 基于能量守恒定律, 易于获得光源出射光线与目标辐照面上对应点的映射关系, 进而获得自由曲面母线。

能量守恒定律即使光源各发光角度包含的能量与对应目标辐照区域能量相等。具体实现步骤如下:

- a) 给定辐照面上预期辐照强度, 通过积分获得目标辐照面上的总能量;
- b) 在给定光源的情况下, 光源的配光曲线随之确定, 通过积分光源各出射角度能量获得光源出射总能量, 根据光学系统空间布局及光源发光特性确定光源出光区域, 使光源出射能量与目标辐照能量匹配;
- c) 通过积分, 获得光源初始角度到某特定角度的能量, 计算获得该能量对应目标辐照区域, 进而获得该特定角度的出射光线对应目标辐照面上的落点;
- d) 重复步骤 3, 获得光源出射光线与目标辐照面上各点的映射关系。

亦可计算不同角度范围内光能所占比重,与目标面上各点对应区域接收能量所占比重一一对应,建立相应的映射关系。

根据能量守恒定律确定光源出光区域后,可获得光源各出射角度区域对应的能量,其回转立体角示意如图 2.1 所示,光通量  $\Phi_{source}(\theta)$  由式(2.1)给出:

$$\Phi_{source}(\theta) = \int_{\theta_{min}}^{\theta} I_s(\theta) d\Omega \quad \dots(2.1)$$

式中:  $I_s(\theta)$  为各角度对应的发光强度;  $\Omega$  为立体角

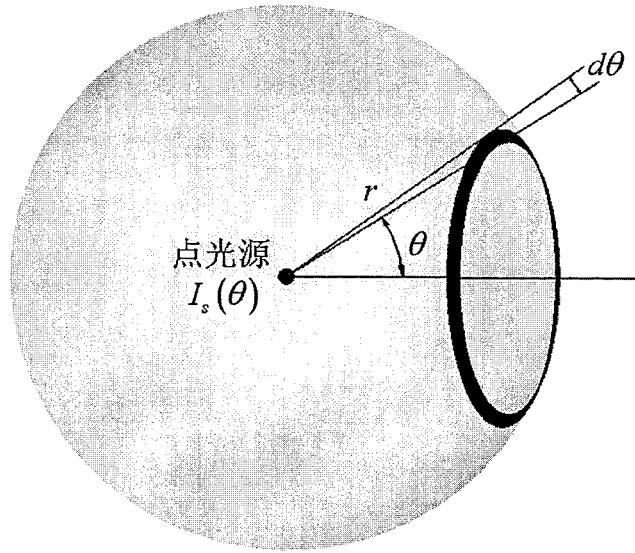


图 2.1 光源出射回转立体角示意图

根据图 2.1 所示立体角几何关系,图示环带对应的立体角为:

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} = 2\pi \sin \theta d\theta \quad \dots(2.2)$$

结合式(2.1)和(2.2)能够获得:

$$\Phi_{source}(\theta) = 2\pi \int_{\theta_{min}}^{\theta} I_s(\theta) \sin \theta d\theta \quad \dots(2.3)$$

当所选系统为近场情况时,系统结构如图 2.2 所示,此时近场回转对称的目标面各区域所接收到的光通量为:

$$\Phi_{target}(y) = \int_{y_{min}}^y E_t(y) dA = 2\pi \int_{y_{min}}^y E_t(y) y dy \quad \dots(2.4)$$

式中  $E_t(y)$  为目标面对应点照度

以目标辐照为均匀辐照面为例,式(2.4)简化为:

$$\Phi_{target}(y) = 2\pi E_t \int_{y_{min}}^y y dy = \pi E_t (y^2 - y_{min}^2) \quad \dots(2.5)$$

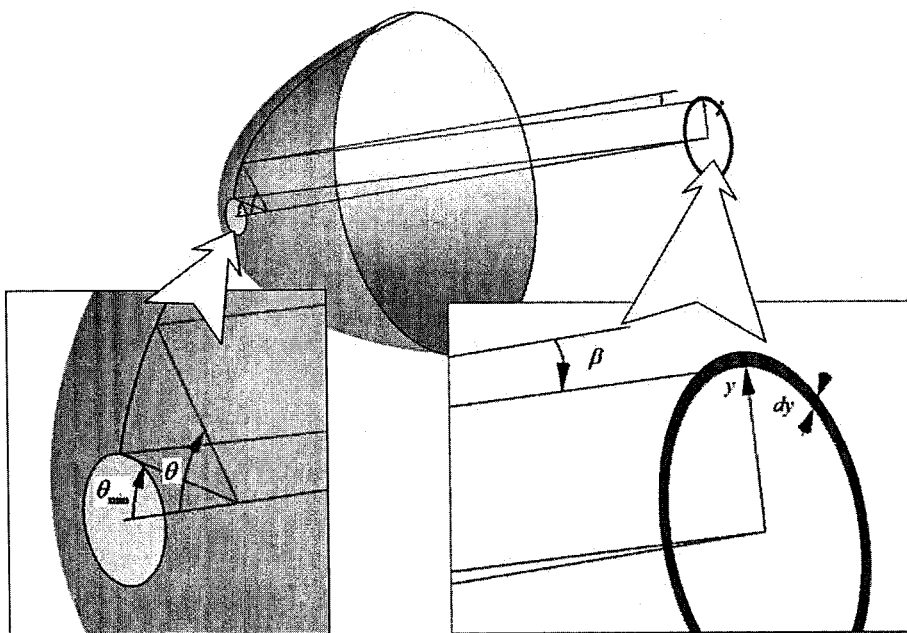


图 2.2 回转近场目标面几何关系

根据能量守恒定律,光源出射光经自由曲面折转后,全部到达目标辐照面上,设置式(2.3)和式(2.5)中所包含的光通量相等,即可获得光源光线出射角度 $\theta$ 和目标辐照面对应点 $y$ 之间的映射关系,若考虑光路损失能量,如自由曲面反射镜的反射率 $\lambda$ ,则能量守恒定律关系式则被修正为:

$$\lambda \Phi_{source}(\theta) = \Phi_{target}(y) \quad \dots(2.6)$$

即:

$$\lambda \int_{\theta_{min}}^{\theta} I_s(\theta) \sin \theta d\theta = \frac{E_t (y^2 - y_{min}^2)}{2} \quad \dots(2.7)$$

根据式(2.7)可获得光源出射角度与目标辐照面各点的映射关系。

## 2.3 系统方程的获取

### 2.3.1 显式方程的获取

根据自由曲面照明光学系统设置,可获得光源出射光线与目标辐照面上光线落点的映射关系,对点光源反射式自由曲面照明光学系统来说,自由曲面入射点

处的微分几何关系示意如图 2.3 所示：

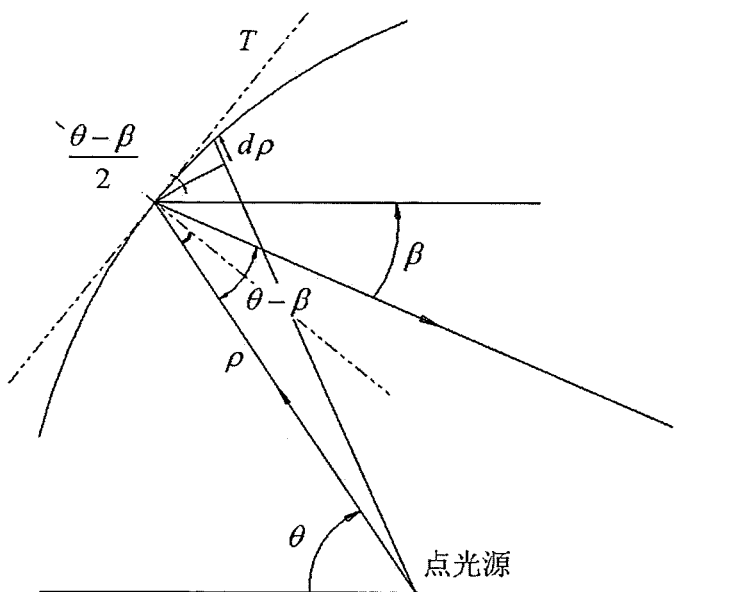


图 2.3 自由曲面入射点处的微分几何关系

根据图 2.3 所示，自由曲面面型参数  $r$  与角度  $\theta$ 、 $\beta$  之间关系为：

$$d\rho = \rho \tan \frac{\theta - \beta}{2} d\theta \quad \dots(2.8)$$

即：

$$\frac{d\rho}{\rho} = \tan \frac{\theta - \beta}{2} d\theta \quad \dots(2.9)$$

式中： $\rho$  为自由曲面极半径； $\theta$  为极角； $\beta$  为入射极角为  $\theta$  的光线对应出射光线的方向角。

对式(2.9)积分，可得：

$$\rho = \rho_{\min} \exp \left( \int_{\theta_{\min}}^{\theta} \tan \frac{\theta - \beta}{2} d\theta \right) \quad \dots(2.10)$$

式中： $\theta_{\min}$  为光源出光区域的最小入射极角， $\rho_{\min}$  为  $\theta_{\min}$  对应的极半径。

式(2.10)中  $\rho$  为自由曲面面型参数。 $\rho_{\min}$  可被称为自由曲面的尺度参数，决定自由曲面模型大小。对理想点光源， $\rho_{\min}$  的选择比较自由。但实际应用中，光

源为扩展光源,光源尺寸和光源与自由曲面的距离大小的相对比值决定着光源扩展性对辐照输出的影响大小,比值越小,则对输出影响就越小,反之越大。因此 $\rho_{\min}$ 的选择不能过小而导致光源大小对照明输出产生较大的影响。若角度 $\beta$ 为 $\theta$ 的函数,式(2.10)存在理论上的解析解,图 2.4 所示为光线经自由曲面反射后到达目标面的几何关系结构图,参数 $\beta$ 由式(2.11)表示:

$$\beta = \arctan\left(\frac{\rho \sin \theta - y}{z + \rho \cos \theta}\right) \quad \dots(2.11)$$

式中 $y, z$ 为目标点坐标,  $\beta$ 是目标点坐标 $y, z$ 、极半径 $\rho$ 以及角 $\theta$ 的函数。

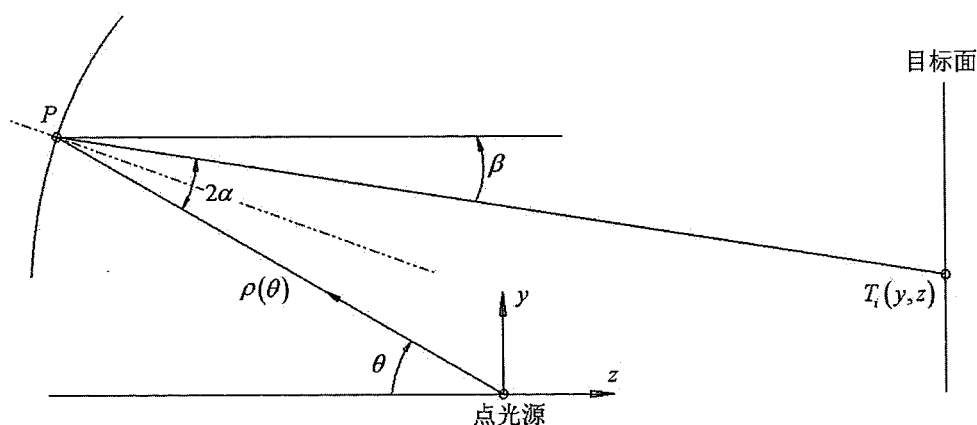


图 2.4 反射几何关系

将式(2.11)带入到式(2.10)中,能够获得:

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \rho \tan\left(\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\rho \sin \theta - y}{z + \rho \cos \theta}\right)\right) \quad \dots(2.12)$$

由于系统设置目标辐照面与光轴垂直正交,式(2.12)中 $z$ 为常数, $y$ 和出射角度 $\theta$ 之间存在映射关系,因此式(2.12)能够通过数字法解决,这里选用龙格—库塔法<sup>[60]</sup>。

### 2.3.2 隐式方程的获取

与显式自由曲面光学系统设置保持一致,隐式自由曲面光学系统布局如图 2.5 所示:



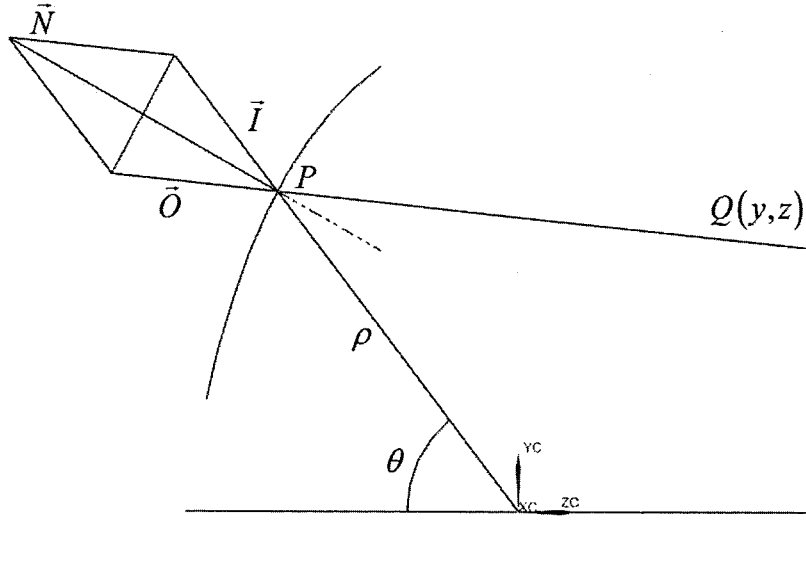


图 2.5 二维自由曲面照明光学系统示意图

根据图 2.5 所示系统设置,光源位于坐标系原点,曲线上任一点 P 的坐标为  $(\rho \sin \theta, \rho \cos \theta)$ , 点 P 处曲线切矢量为  $(\rho_\theta \sin \theta + \rho \cos \theta, \rho_\theta \cos \theta - \rho \sin \theta)$ , 对应法矢量为  $(\rho \sin \theta - \rho_\theta \cos \theta, \rho_\theta \sin \theta + \rho \cos \theta)$ , Q 点坐标为  $(y, z)$ 。

点 P 处曲线单位法矢量可表达为:

$$\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \rho_\theta^2}} (\rho \sin \theta - \rho_\theta \cos \theta, \rho_\theta \sin \theta + \rho \cos \theta) \quad \dots(2.13)$$

光线入射方向单位矢量为:

$$\vec{I} = (\sin \theta, \cos \theta) \quad \dots(2.14)$$

为计算方便,采用出射光线反方向单位矢量参与反射计算,记为  $\vec{O}$ , 有:

$$\vec{O} = \left( \frac{\rho \sin \theta - y}{K}, \frac{\rho \cos \theta - z}{K} \right) \quad \dots(2.15)$$

式中 K 为出射光线矢量长度, 即  $|PQ|$ 。

根据反射定律, 易获得:

$$\vec{I} + \vec{O} = \vec{N} \cdot 2(\vec{I} \cdot \vec{N}) \quad \dots(2.16)$$

将式(2.13)~式(2.15)带入式(2.16)并对方程进行简化, 能够获得:

$$\begin{cases} \frac{\rho \sin \theta - y}{K} = \frac{2\rho}{\rho^2 + \rho_\theta^2} (\rho \sin \theta - \rho_\theta \cos \theta) - \sin \theta \\ \frac{\rho \cos \theta - z}{K} = \frac{2\rho}{\rho^2 + \rho_\theta^2} (\rho_\theta \sin \theta + \rho \cos \theta) - \cos \theta \end{cases} \quad \dots(2.17)$$

根据式(2.17)可得:

$$y = \frac{(\rho^2 - \rho_\theta^2) z \sin \theta + 2\rho\rho_\theta (\rho - z \cos \theta)}{(\rho^2 - \rho_\theta^2) \cos \theta + 2\rho\rho_\theta \sin \theta} \quad \dots(2.18)$$

根据能量守恒定律有:

$$\int_{\theta_{\min}}^{\theta} I_s(\theta) \sin \theta d\theta = \int_{y_{\min}}^y E(y) y dy \quad \dots(2.19)$$

由于  $y$  与  $\theta$  之间存在映射关系, 即  $y = y(\theta)$ , 式(2.19)能够转化为:

$$I_s(\theta) \sin \theta = E(y(\theta)) y(\theta) \frac{dy}{d\theta} \quad \dots(2.20)$$

根据式(2.18)计算  $\frac{dy}{d\theta}$  可得:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\theta} &= \frac{\partial y}{\partial \theta} + \rho_\theta \frac{\partial y}{\partial \rho} + \rho_{\theta\theta} \frac{\partial y}{\partial \rho_\theta} \\ &= \frac{(\rho^2 + \rho_\theta^2) \{ 2\rho^2 \rho_\theta \sin \theta + \rho [\rho z - 2\rho_{\theta\theta} (z - \rho \cos \theta)] + \rho_\theta^2 (3z - 4\rho \cos \theta) \}}{[(\rho^2 - \rho_\theta^2) \cos \theta + 2\rho\rho_\theta \sin \theta]^2} \quad \dots(2.21) \end{aligned}$$

将式(2.21)代入式(2.20)可得:

$$I_s(\theta) \sin \theta = E(y(\theta)) y(\theta) \frac{\left\{ 2\rho^2 \rho_\theta \sin \theta + (\rho^2 + \rho_\theta^2) \left[ \rho [\rho z - 2\rho_{\theta\theta} (z - \rho \cos \theta)] + \rho_\theta^2 (3z - 4\rho \cos \theta) \right] \right\}}{[(\rho^2 - \rho_\theta^2) \cos \theta + 2\rho\rho_\theta \sin \theta]^2} \quad \dots (2.22)$$

将边界条件引入方程(2.22)中, 能够获得隐式系统方程为:

$$\left\{ \begin{aligned} & y = \frac{(\rho^2 - \rho_\theta^2)z \sin \theta + 2\rho\rho_\theta(\rho - z \cos \theta)}{(\rho^2 - \rho_\theta^2)\cos \theta + 2\rho\rho_\theta \sin \theta} \\ & I_s(\theta) \sin \theta = E(y(\theta))y(\theta) \frac{\left\{ 2\rho^2\rho_\theta \sin \theta + (\rho^2 + \rho_\theta^2) \left\{ \rho[\rho z - 2\rho_\theta(z - \rho \cos \theta)] + \rho_\theta^2(3z - 4\rho \cos \theta) \right\} \right\}}{\left[ (\rho^2 - \rho_\theta^2)\cos \theta + 2\rho\rho_\theta \sin \theta \right]^2} \dots (2.23) \\ & BC: \begin{cases} \theta_{\min} \rightarrow y_{\min} \\ \theta_{\max} \rightarrow y_{\max} \end{cases} : y = \frac{(\rho^2 - \rho_\theta^2)z \sin \theta + 2\rho\rho_\theta(\rho - z \cos \theta)}{(\rho^2 - \rho_\theta^2)\cos \theta + 2\rho\rho_\theta \sin \theta} \end{aligned} \right.$$

## 2.4 设计计算

为了验证上述显式和隐式设计的正确性,以均匀圆形辐照光斑作为预期辐照输出进行光学系统设计。光源选用短弧氙灯,配光曲线如图 2.6 所示,系统参数设置如表 2.1 所示,系统整体布局如图 2.7 所示。

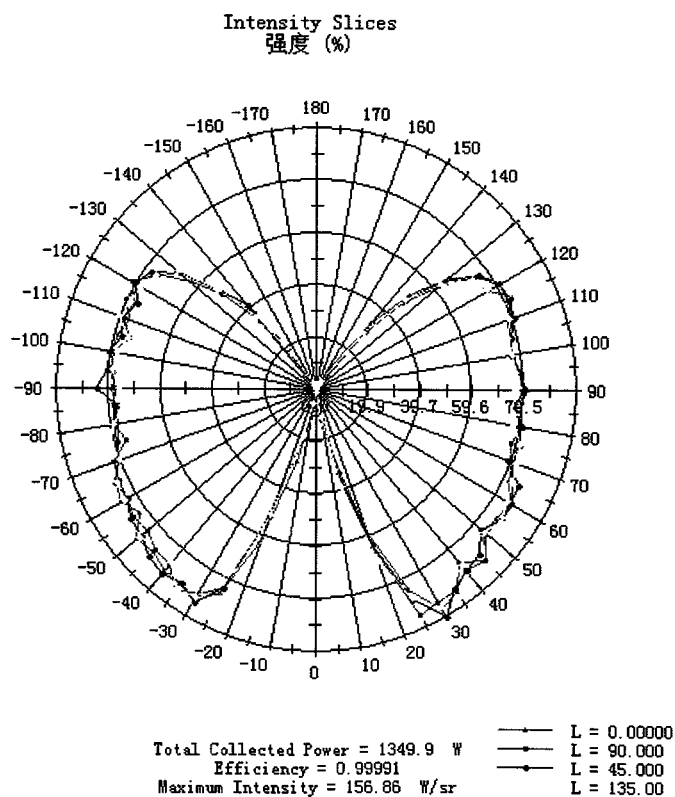


图 2.6 氙灯配光曲线

表 2.1 均匀圆形辐照输出的系统设置

| 项目 | 光源    | 出光角度    | 工作距离   | 辐照直径         | 反射镜小开口           | 反射镜大开口            |
|----|-------|---------|--------|--------------|------------------|-------------------|
| 参数 | 3000W | 30~150° | 1000mm | $\phi 300mm$ | $\geq \phi 50mm$ | $\leq \phi 500mm$ |

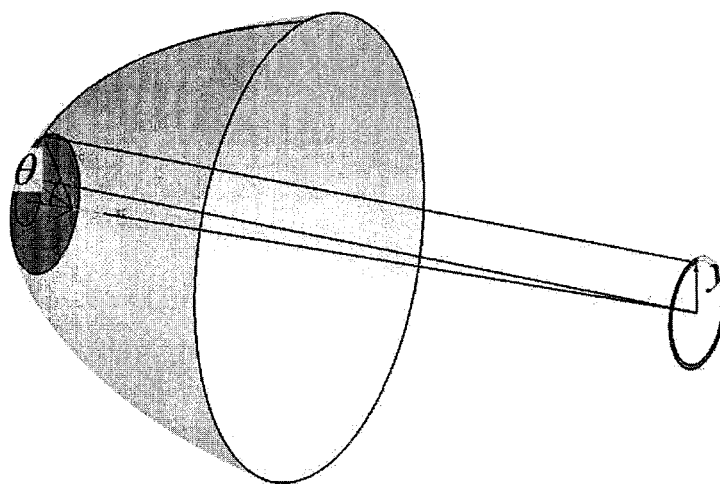


图 2.7 整体系统

根据图 2.6 所示的光源配光曲线和目标面上辐照分布，通过式(2.7)可获得光源出射角度与目标辐照面对应点的映射关系，如图 2.8 所示。

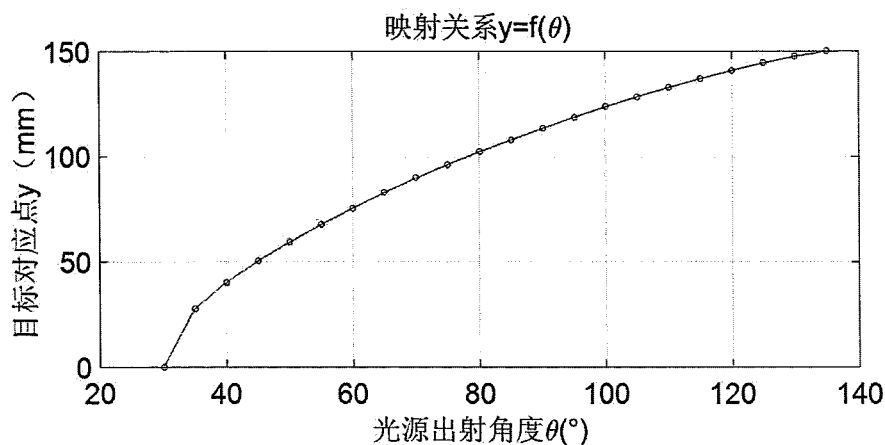


图 2.8 光线出射角度与目标点之间的映射

#### 2.4.1 显式方程计算

根据所示光源出射角度与目标对应点间的映射关系，依据式(2.12)对系统进行计算，能够获得自由曲面母线数据，计算方法采用龙格—库塔法<sup>[60]</sup>。自由曲面反射镜大小决定加工难度和价格，这里以自由曲面大开口矢径作为起始进行计

算，具体计算流程如下：

步骤一：设置参数，包括计算步长 $h$ ，辐照面位置参数 $z$ ， $\theta$ 离散数据数量 $n$ ，自由曲面反射镜大开口矢径 $\rho(1)$ 等；

步骤二：计算龙格—库塔系数，结合自由曲面照明光学系统，具体为：

$$k_1 = \rho(i) \tan \left( \frac{\theta(n+1-i)}{2} - \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{\rho(i) \sin(\theta(n+1-i)) - y(n+1-i)}{z + \rho(i) \cos(\theta(n+1-i))} \right) \right)$$

$$k_2 = \left( \rho(i) + \frac{h}{2} k_1 \right) \tan \left( \frac{\theta(n+1-i) + \frac{h}{2}}{2} - \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{\left( \rho(i) + \frac{h}{2} k_1 \right) \sin \left( \theta(n+1-i) + \frac{h}{2} \right) - y(n+1-i)}{z + \left( \rho(i) + \frac{h}{2} k_1 \right) \cos \left( \theta(n+1-i) + \frac{h}{2} \right)} \right) \right)$$

$$k_3 = \left( \rho(i) + \frac{h}{2} k_1 \right) \tan \left( \frac{\theta(n+1-i) + \frac{h}{2}}{2} - \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{\left( \rho(i) + \frac{h}{2} k_2 \right) \sin \left( \theta(n+1-i) + \frac{h}{2} \right) - y(n+1-i)}{z + \left( \rho(i) + \frac{h}{2} k_2 \right) \cos \left( \theta(n+1-i) + \frac{h}{2} \right)} \right) \right)$$

$$k_4 = \left( \rho(i) + h k_3 \right) \tan \left( \frac{\theta(n+1-i) + h}{2} - \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{\left( \rho(i) + h k_3 \right) \sin \left( \theta(n+1-i) + h \right) - y(n+1-i)}{z + \left( \rho(i) + h k_3 \right) \cos \left( \theta(n+1-i) + h \right)} \right) \right)$$

其中： $\rho(i)$ ， $\theta(n+1-i)$ ， $y(n+1-i)$ 分别为第 $i$ 步计算的 $\rho$ ， $\theta$ 和 $y$ 数据。

步骤三：根据公式(2.24)计算 $\rho(i+1)$ ：

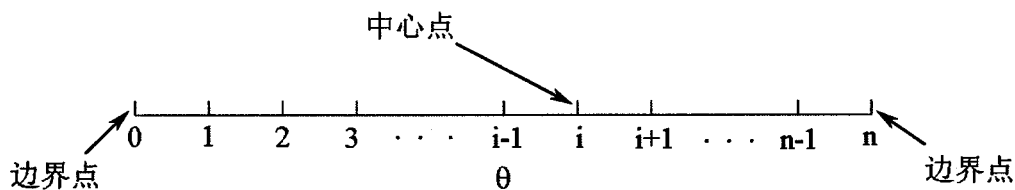
$$\rho(i+1) = \rho(i) + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad \dots(2.24)$$

步骤四：重复步骤二和步骤三，直至设计结束。

#### 2.4.2 隐式系统计算

式(2.23)所描述的数学问题，通常难以获得方程的解析解，常规做法就是对

方程进行离散化, 计算方程数值解。首先对自变量  $\theta$  进行离散化, 设定其区域为  $S = \{\theta | \theta_{\min} \leq \theta \leq \theta_{\max}\}$ , 能够得到一组离散点  $S = \{\theta_i | \theta_i = ih, i = 0, 1, 2, \dots, n\}$ , 其中  $\theta$  步长为  $h = (\theta_{\max} - \theta_{\min})/n$ , 如图 2.9 所示。离散点包括边界点和中心点两种, 边界点为区域  $S$  的端点, 中心点为区域  $S$  的内部节点。显然内部节点需要满足式 (2.23) 的系统方程, 边界点需要满足系统的边界条件  $BC$ 。

图 2.9  $\theta$  离散方法

根据图 2.9 所示的离散形式, 采用差分法近似式 (2.23) 中的一阶和二阶导数。为提高求解精度, 内部节点采用具有二阶精度中心差分法, 边界处节点采用具有二阶精度前插或后插的差分公式。中心节点  $i$  的差分格式为:

$$\rho_{\theta} = \frac{\rho_{i+1} - \rho_{i-1}}{2h} \quad \dots(2.25)$$

$$\rho_{\theta\theta} = \frac{\rho_{i+1} - 2\rho_i + \rho_{i-1}}{h^2} \quad \dots(2.26)$$

端点  $\theta = \theta_{\max}$  的差分格式为:

$$\rho_{\theta} = \frac{3\rho_n - 4\rho_{n-1} + \rho_{n-2}}{2h} \quad \dots(2.27)$$

将上述离散点差分格式、光源配光曲线数据和预期辐照输出数据带入系统方程 (2.22) 中, 结合方程 (2.23) 端点边界条件, 能够获得  $n+1$  个非线性方程, 解该非线性方程组, 可获得自由曲面面型数据, 完成系统设计。

### 2.4.3 设计结果对比

通过计算, 可得显式方程和隐式方程自由曲面数据, 为便于比较, 设置自由曲面大开口直径一致, 取光源出射角度为  $30^\circ \sim 150^\circ$ , 步长为  $5^\circ$ , 计算所得的自由曲面反射镜母线如图 2.10 所示。

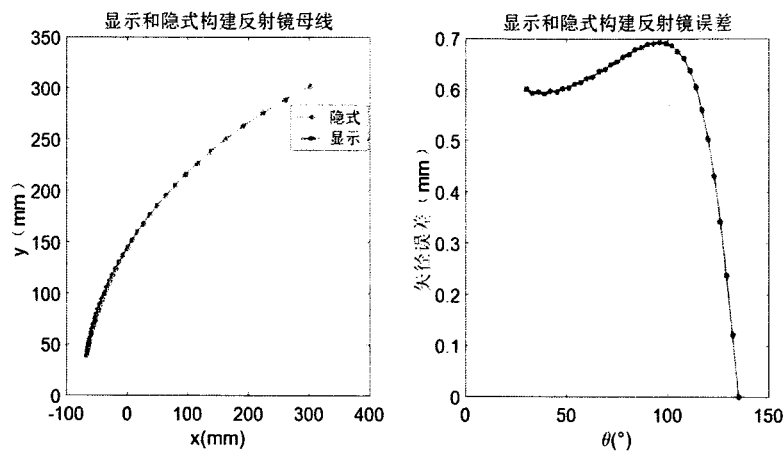


图 2.10 步长为 5° 时显式和隐式设计结果对比

图 2.10 显示，显式和隐式方程所得自由曲面面型基本保持一致，根据设计结果构建自由曲面反射镜，搭建光学系统，如图 2.11 所示，对隐式方程和显式方程的设计结果进行仿真计算，仿真结果如图 2.12 和图 2.13 所示。

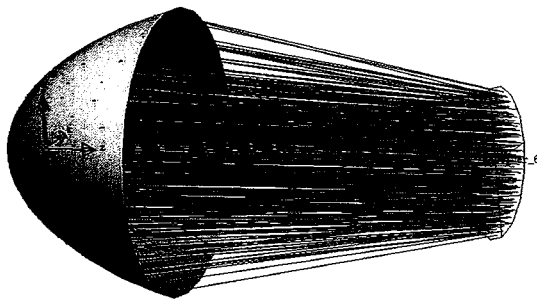


图 2.11 显式和隐式方程所得的光学系统图

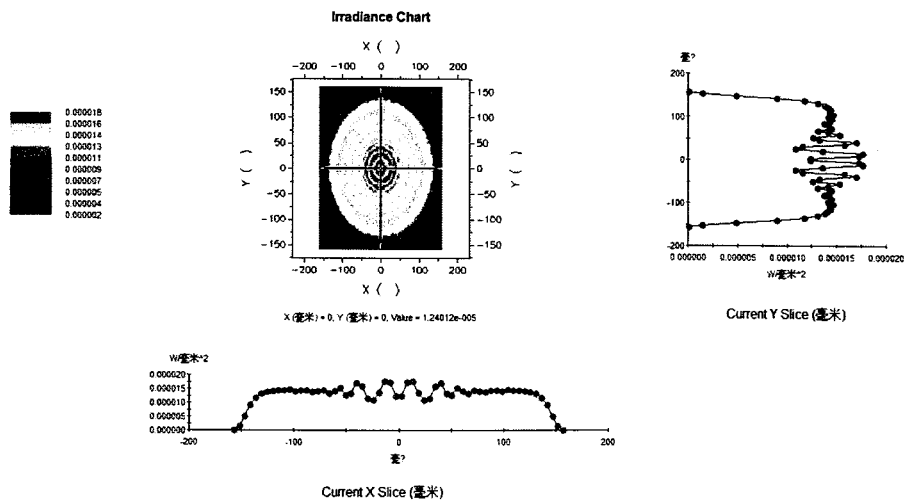


图 2.12 隐式方程步长为 5° 情况下的设计辐照输出

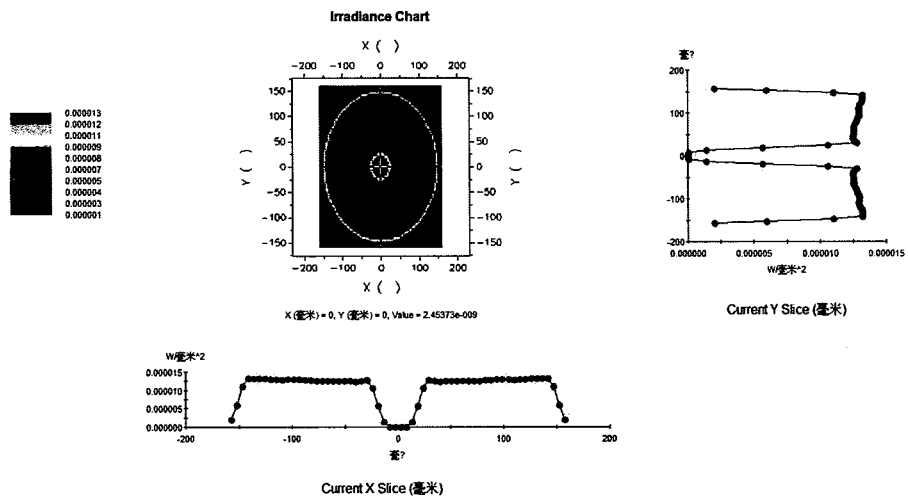


图 2.13 显式方程步长为 5° 情况下的设计辐照输出

图 2.12 和图 2.13 仿真结果显示，显式方程设计结果整体均匀度更好，但在辐照中心存在暗区，隐式方程设计结果中心区域存在明暗相间的条纹，不存在暗区。两者辐照输出均存在不足，为改善辐照输出效果，减小步长，增加采样点数是常用方法，图 2.14 展示了减小步长情况下的显式和隐式方程仿真输出结果。表 2.2 为减小步长时自由曲面矢径误差变化趋势。

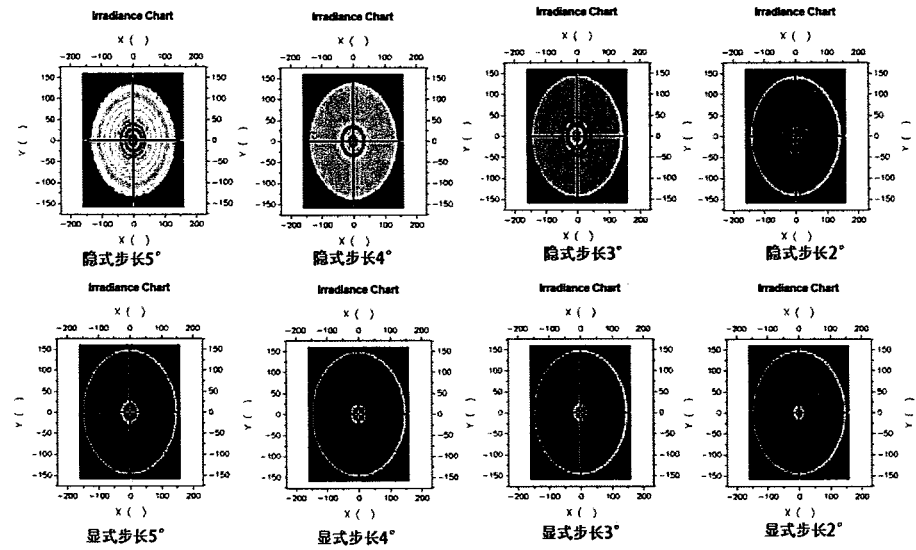


图 2.14 减小步长，增加离散点数下的显式和隐式设计结果

表 2.2 隐式设计和显式设计矢径相对误差表

| 设计步长   | 5°    | 4°    | 3°    | 2°    |
|--------|-------|-------|-------|-------|
| 矢径相对误差 | 1.51% | 1.16% | 0.77% | 0.44% |



图 2.14 显示, 当减小设计步长, 增加采样点数时, 显式和隐式方程输出结果均趋于理想, 隐式结果中心区域明暗条纹趋于一致, 而显式结果在保证整体均匀度的情况下中心暗区不断减小, 在该情况下, 显式和隐式设计的曲面面型趋于一致, 矢径相对误差从 1.51%减小到了 0.44%。

显然, 减小步长是一种有效提升设计质量的方法, 这在具有对称性辐照输出的二维设计中比较奏效, 因为方程离散情况为一维, 采样点少, 计算速度快, 且采样点数的增加为线性的, 对计算速度的影响不大。但在面向复杂辐照输出的三维设计中, 采样点数会呈平方关系增长, 当步长减小到一定程度时, 采样点数异常庞大, 会严重影响计算速度。因此寻求更为有效的方法, 在少量采样点情况下获取更好的设计效果, 是二维设计向三维设计过渡前必须完成的工作。

## 2.5 自由曲面母线构造方法

在 2.4.3 小节中自由曲面母线的构造采用 3D 软件自带的自由三次样条曲线, 并未对节点进行控制。在显式设计中, 设计过程仅涉及节点信息; 在隐式设计中, 不仅涉及节点信息, 式(2.13)还涉及单位法矢信息, 且设计方程的获取基于式(2.16)反射定律的矢量形式。在自由曲面母线构造过程中, 若保证母线节点处的法矢信息, 则可保证入射光线经自由曲面反射后到达预期辐照位置。在二维设计中母线法矢与切矢一一对应, 这里采用 Wu 提供的一种自由曲面构建方法<sup>[47]</sup>, 采用节点及其切矢信息构建母线。

综合考虑曲线的稳定性和灵活性, 选用 B 样条曲线构建自由曲面母线。为保证节点法矢信息, 引入单位切矢作为约束, 采用局部三次插值法构建 B 样条曲线, 可用式(2.28)表示:

$$S(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \mathbf{P}_i \quad 0 \leq u \leq 1 \quad \dots(2.28)$$

式中  $\mathbf{P}_i$  为控制点,  $N_{i,p}(u)$  是定义在节点矢量上的  $p$  维 B 样条基函数。给定节点坐标及其单位切矢信息, 母线的控制点和节点矢量可通过局部三次插值实现。

图 2.15 所示为构建自由曲面母线的插值示意图, 通过插值能够在两个相邻节点  $\mathbf{Q}_i$  和  $\mathbf{Q}_{i+1}$  之间形成三次 Bézier 片段, 连接各片段可形成光滑连续的样条

曲线。其中内部 Bézier 片段的两个控制点  $P_1^l$  和  $P_2^l$  能够通过式(2.29)计算:

$$P_1^l = Q_l + aT_l \quad P_2^l = Q_{l+1} - aT_{l+1} \quad \dots(2.29)$$

式中  $a = r(\bar{v}_{l+1} - \bar{v}_l)/3 = r\Delta\bar{v}_{l+1}/3$ ,  $r$  为母线总弦长,  $\bar{v}_l$  为节点的相关参数,  $Q_l$  和  $Q_{l+1}$  为数据节点,  $T_l$  和  $T_{l+1}$  为节点处单位矢量。

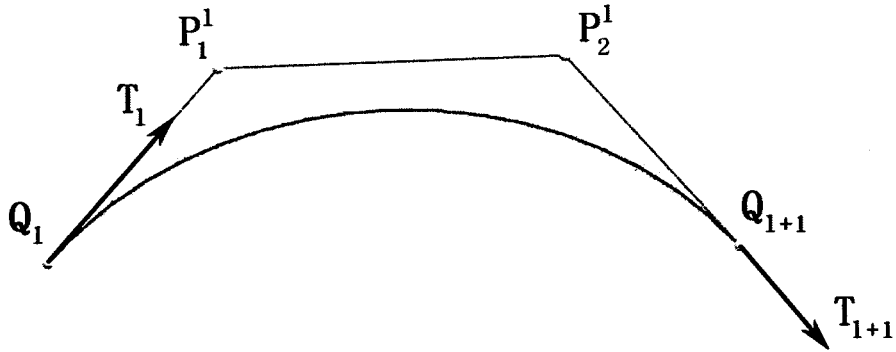


图 2.15 自由曲面母线构造局部示意图

Wu 在文章<sup>[47]</sup>中对这种构造方式介绍的较为详细, 这里不做进行深入分析, 直接给出设计结果。采用隐式方程进行设计, 构建 B 样条母线, 步长选定为  $5^\circ$ , 输出结果如图 2.16 所示。

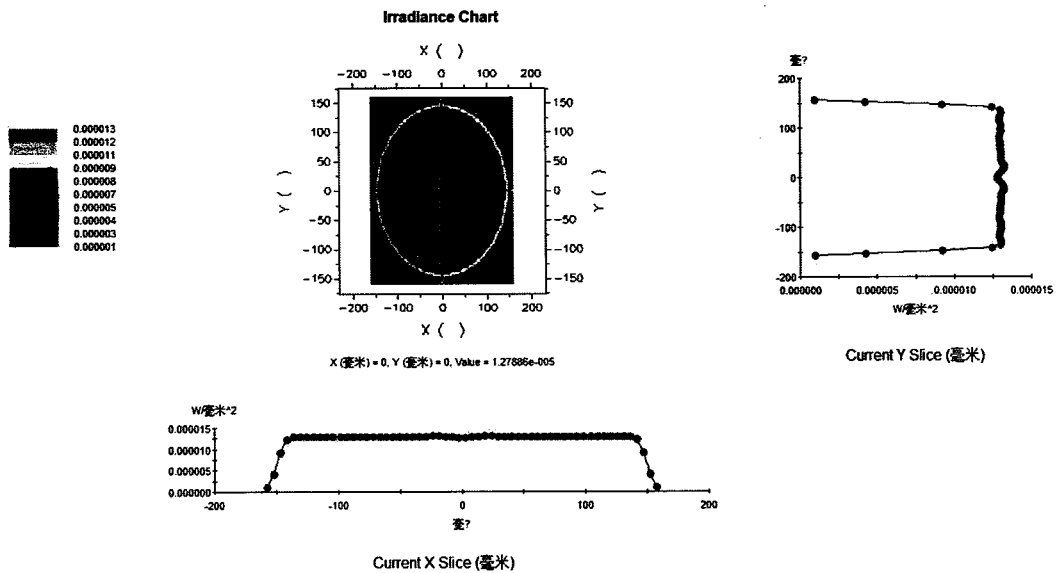


图 2.16 B 样条母线构造设计结果

图 2.16 显示,该构造方法消除了中心区域辐照震荡状态,中心区域不存在明暗相间条纹和暗区,表示隐式设计配合 B 样条母线构造方法能够实现现阶段设计目的,即在少量采样点情况下获得理想的设计输出效果,该设计思路能够引入到面向非对称复杂辐照输出的 3D 设计中,使得高分辨率非对称式复杂辐照输出的实现成为可能。

## 2.6 实验验证

### 2.6.1 自由曲面加工及试验台的搭建

对 2.5 中所设计的自由曲面进行加工,机床选用单点金刚石车床,加工完成后未进行研磨抛光,直接镀保护膜,这在一定程度上损失了反射率,但最大程度保持了曲面面型,自由曲面加工效果如图 2.17 所示。



图 2.17 自由曲面反射镜加工效果

为检测曲面面型,在自由曲面焦点(设计中坐标系的原点)处放置光源,观察自由曲面的出光情况,如图 2.18 所示。容易看出加工刀痕对出光影响,刀痕比较均匀,这在弱光下有所体现,但在氙灯光源强光照射下,这种条纹的影响可忽略不计。整体来说,曲面面型加工符合实际情况,能够满足使用要求。



图 2.18 自由曲面面型检测

由于光源为短弧氙灯，工作时需要冷却。整体实验台搭建形成密闭空间，设置自由曲面小开口为入风口，整体箱体设置出风口，这种设计有三种作用：1) 满足实验过程中光源冷却要求；2) 通过排风带出点灯产生的臭氧；3) 形成对流，使得整体设备温度不致过高。实验台搭建示意如图 2.19 所示，实验台如图 2.20 所示，输出辐照光斑如图 2.21 所示。

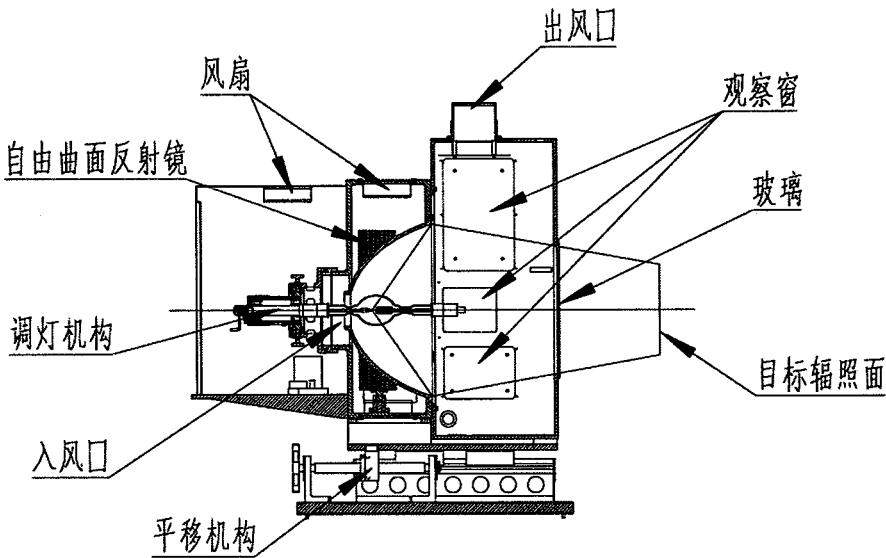


图 2.19 试验平台搭建示意图



图 2.20 实验台的搭建以及实验过程照片



图 2.21 辐照光斑

2.6.2 实验数据处理

将标准太阳电池固定在电动位移台上，驱动其匀速运动，收集辐照面上不同位置的辐照数据，并将辐照数据进行整理，获得如图 2.22 所示的辐照分布图。

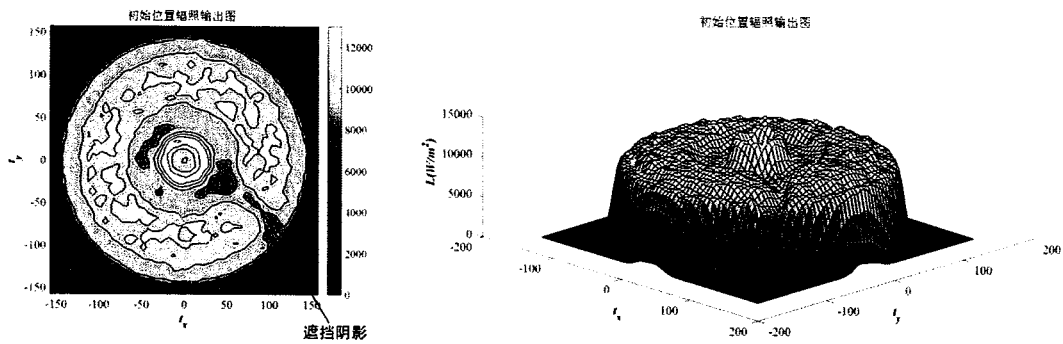


图 2.22 实验所得辐照输出图

图 2.22 显示，整体辐照输出较均匀，中心区域存在辐照强度震荡；输出辐照面上存在氙灯阳极连接铜辫遮挡区域，通过调整铜辫位姿，可降低其对输出影响。为了探究输出效果，选取辐照区域中心沿  $t_x$  方向的辐照数据与仿真数据进行对比，如图 2.23 所示。

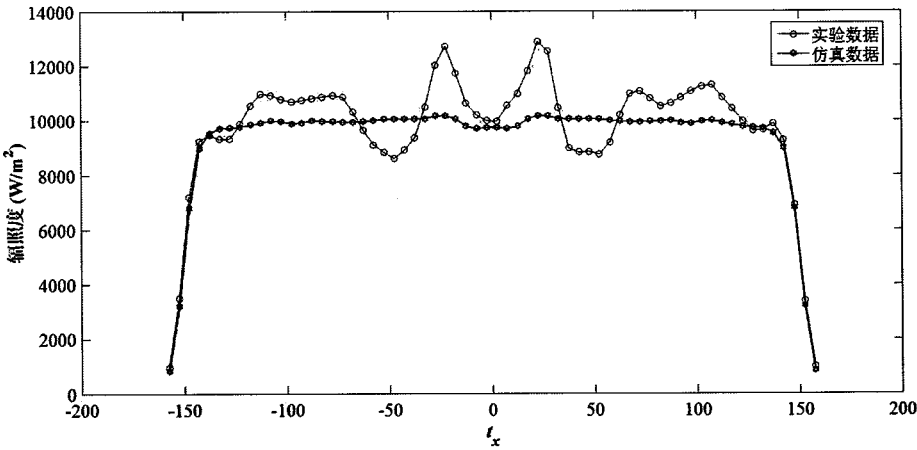


图 2.23 实验仿真数据对比图

图 2.23 显示，实验所得的辐照度与仿真分析相当，但辐照不均匀度有所下降，这是由于设计时选用点光源，但实际氙灯发光为阴极与阳极之间击穿放电，形成具有一定体积大小的氙灯氙弧，如图 2.24 所示，偏离了点光源设置，对照明输出产生了影响，造成中心区域辐照强度震荡。

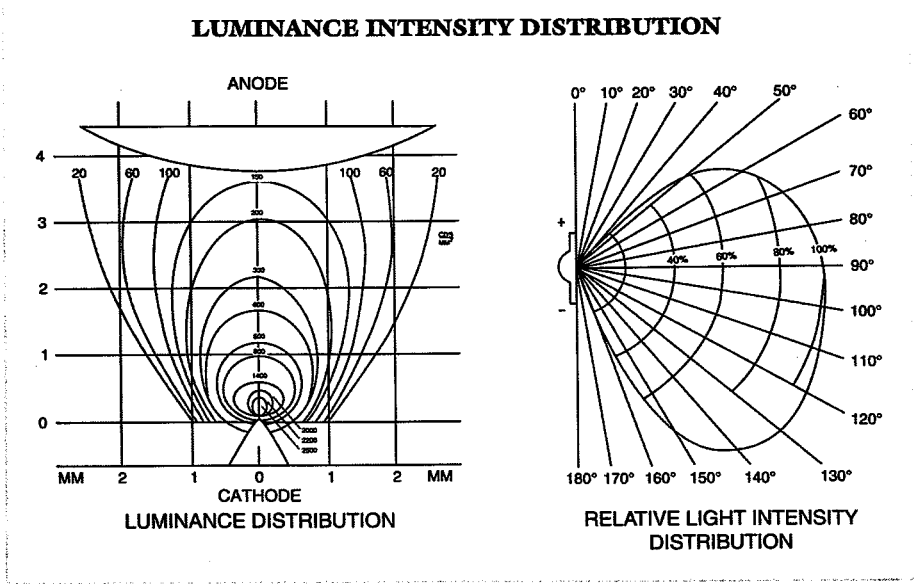


图 2.24 氙灯发光示意图

根据以往做照明光学系统设计的经验,对光源进行离焦,能够对照明输出产生影响,控制光源沿 $t_x$ 方向和 $z$ 方向离焦,能够获得自由曲面照明光学系统光源离焦对辐照输出影响的变化规律。

鉴于自由曲面的旋转对称性,光源沿 $t_y$ 方向和其他垂轴方向的离焦影响这里不做研究。图 2.25 所示为光源 $t_x$ 方向离焦对照明输出的影响,为更为直观的展示影响规律,仍然采用辐照输出中心 $t_x$ 方向辐照数据进行对比,如图 2.26 所示。

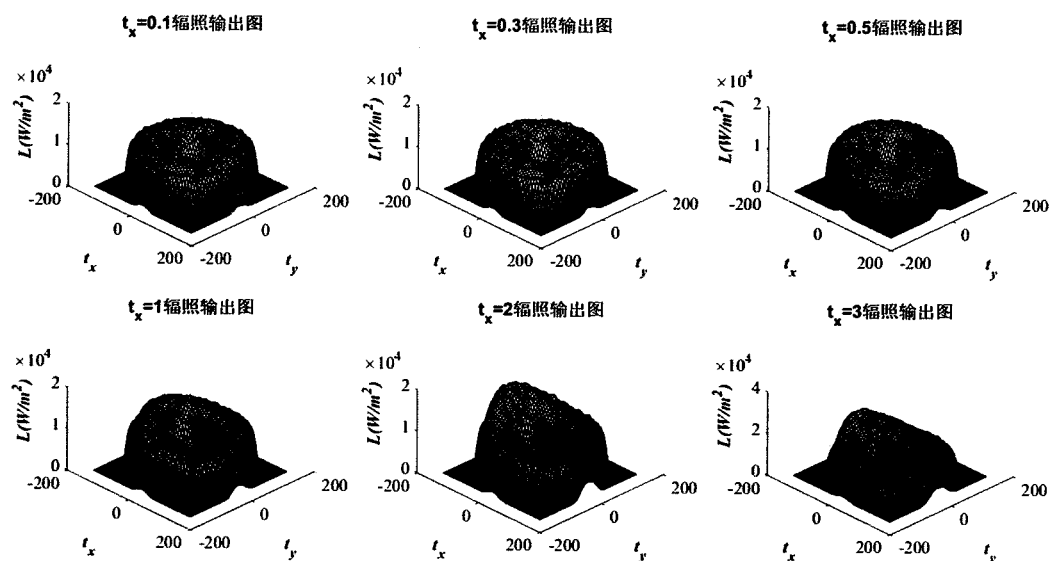


图 2.25  $t_x$  方向光源离焦对照明输出的影响

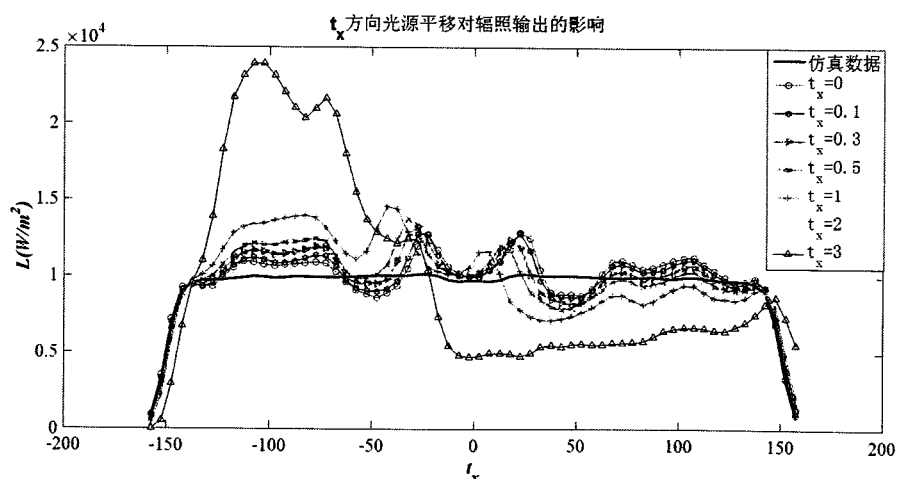


图 2.26  $t_x$  方向光源离焦辐照输出中心位置处辐照数据示意图

图 2.25 和图 2.26 显示,沿 $t_x$ 方向的离焦难以消除光源扩展性对辐照输出的

影响，且随着离焦量增大，辐照输出两侧能量大小出现明显偏差。因此在装调过程中需精细控制光源位置，使之处于光轴上，方可保证整体辐照面的旋转对称性，以达到最好的均匀度。

控制光源沿轴向离焦，检测辐照输出数据，并对数据进行归纳整理，形成如图 2.27~图 2.30 所示的辐照输出变化图，这里同样采用辐照输出整体及其中心区域  $t_x$  方向辐照数据进行比较。

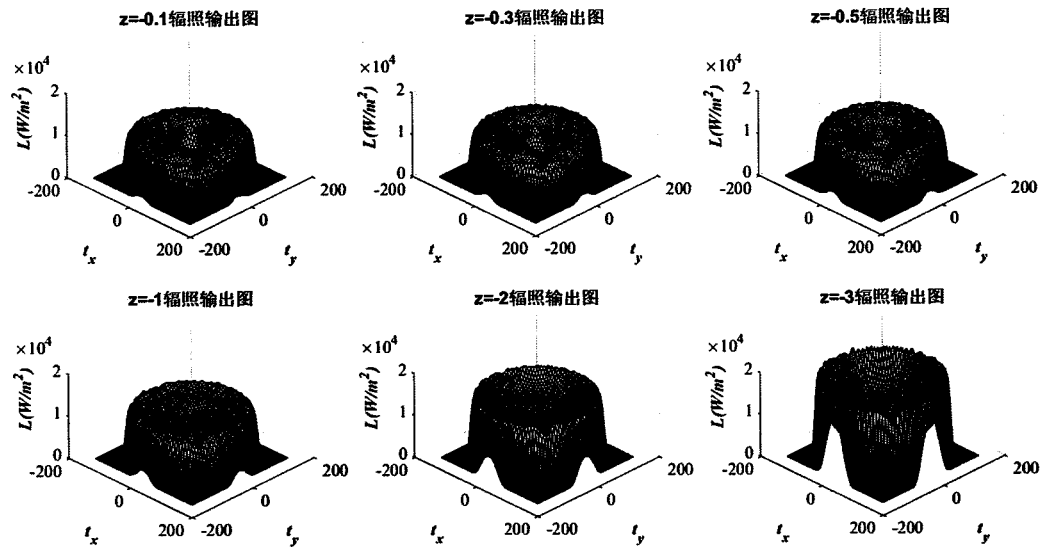


图 2.27 z 轴负向光源离焦对照明输出的影响

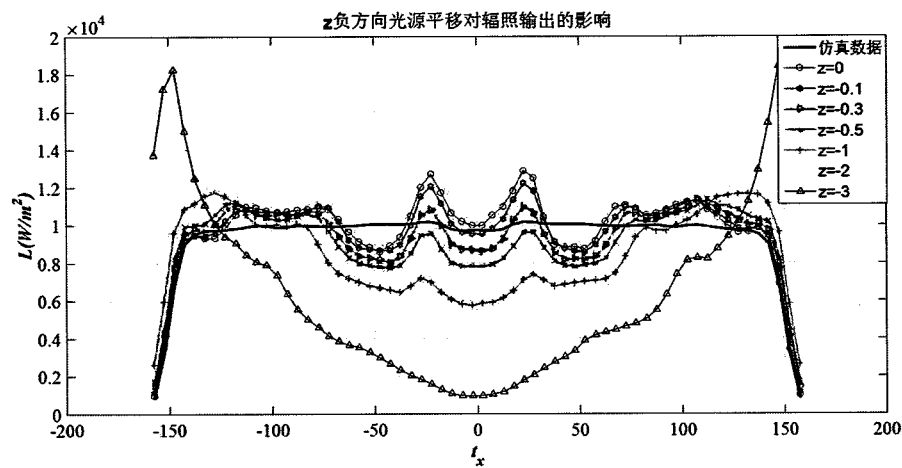


图 2.28 光源 z 轴负向离焦辐照输出中心位置处辐照数据示意图



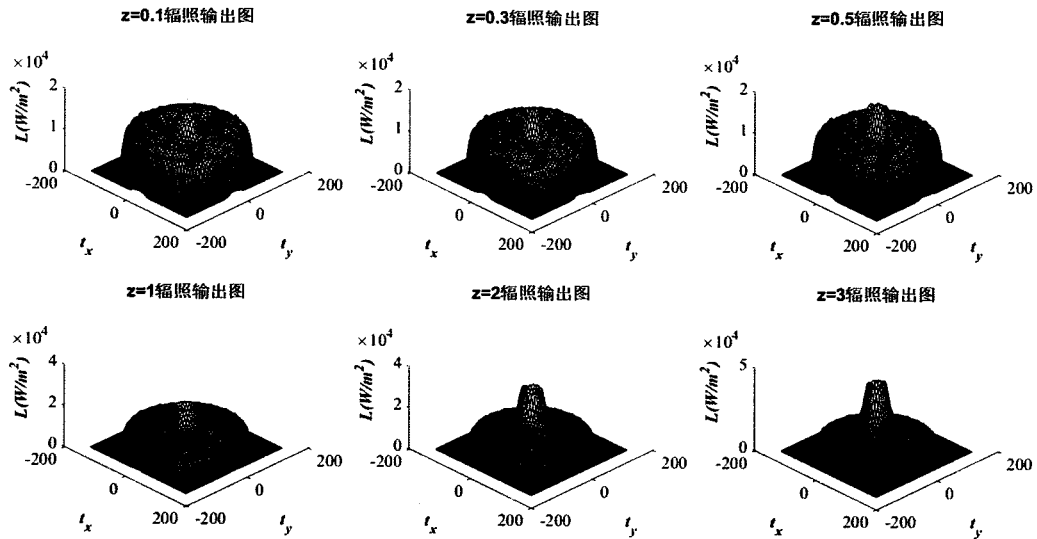
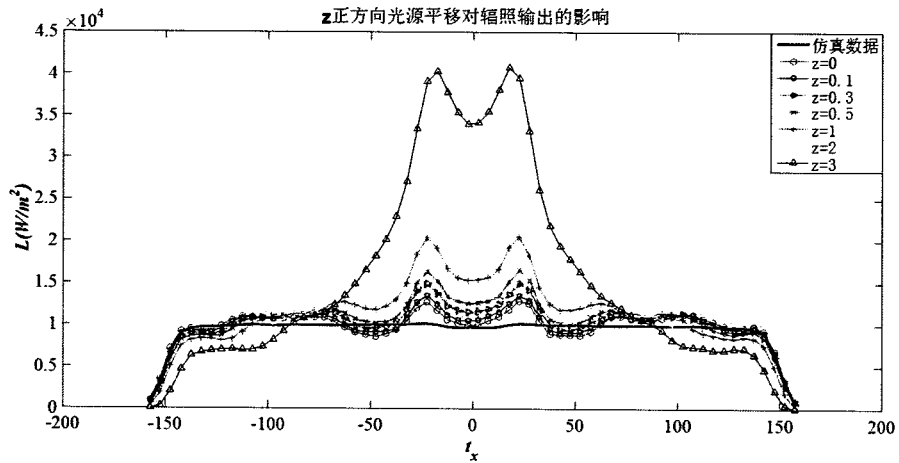

 图 2.29  $z$  轴正方向光源离焦对照明输出的影响

 图 2.30 光源  $z$  轴正向离焦辐照输出中心位置处辐照数据示意图

图 2.27 和图 2.28 显示,光源沿光轴 $-z$ 向离焦时,能够减小扩展光源的影响,且离焦量越大,减轻效果越明显。但离焦量增大时,整体辐照输出呈现出中心区域辐照度低,边缘区域辐照度高的盆状特性。因此,可取光轴 $-z$ 向适当离焦量,能够提升整体辐照输出的均匀度,但不易过大。

图 2.29 和图 2.30 显示,光源沿光轴 $z$ 向离焦,难以消除光源扩展性对辐照输出的影响,甚至还起到了扩大这种影响的作用。整体均匀度随着离焦量的增大而变差,呈现出中心区域辐照度增大,边缘区域辐照度减小的趋势。

### 2.6.3 与太阳模拟器光学系统输出对比

太阳模拟器是一种典型的照明输出系统,常用光源是短弧氙灯,通过聚光系统、匀光系统和准直系统在目标辐照面获得均匀稳定的辐照输出,论文 1.2.2 中已经给出了太阳模拟器典型的光学系统。

本章自由曲面照明光学系统的设计目的与太阳模拟器相似,但光学系统所用元件更少,且不存在积分器处的大量能量损失,能够预见其输出能量更高。太阳模拟器辐照输出能量与准直角度有关,以常用的能量型太阳模拟器准直角度  $\pm 0.5^\circ$  为例,自由曲面照明光学系统整体输出能量能够达到常规太阳模拟器的 3 倍以上。均匀度由于受扩展光源的影响,且存在铜辫遮挡,稍逊以光学积分器为核心的匀光系统的太阳模拟器光学系统。

自由曲面照明光学系统还有优化空间,通过优化能够减小光源扩展性的影响,通过对铜辫的姿态和粗细进行调整,可减小遮挡的影响。目前,自由曲面照明光学系统在某些能量要求更高,均匀度要求不高的场合,已经能够取代太阳模拟器,未来有望全面取代太阳模拟器,达到高能量,高均匀度的辐照输出效果。

## 2.7 本章小结

本章以具有对称性辐照输出的自由曲面照明光学系统为对象进行研究,构建了光学系统,获得了显式和隐式两种数学模型,并对两种模型设计结果进行了分析,确定了隐式设计和 B 样条母线构建的设计方法,因其能够精确控制光线落点,在少量离散点情况下实现了理想的辐照输出效果。该设计思路可引入三维设计中,使得复杂辐照输出的实现成为可能。

对上述基于隐式设计和 B 样条母线构建方法的光学系统进行实验验证,结果表明,系统实现了预期大小和形状的辐照输出,受光源扩展性和氙灯铜辫遮挡的影响,均匀度还有进步空间。对光源离焦对辐照输出特性的影响进行研究,确定了系统装调准则,即垂轴方向 0 离焦,保证辐照输出旋转对称性;光轴方向保持合适  $z$  轴负向离焦量,提升辐照输出均匀度。

因具有类似辐照输出目标,将实验结果与准直角度  $\pm 0.5^\circ$  的能量型太阳模拟器光学系统输出结果进行对比,结果显示,自由曲面照明光学系统辐照输出能量

可达太阳模拟器光学系统 3 倍以上,但均匀度逊色于具备匀光系统太阳模拟器光学系统。对现有自由曲面光学系统进行优化,降低光源扩展性和遮挡影响,有望取代太阳模拟器光学系统,在预期辐照面上形成高能量、均匀稳定的高质量照明输出。

## 第3章 基于 Monge-Ampère 方程自由曲面照明光学系统设计

### 3.1 引言

针对二维自由曲面照明光学系统仅面向对称性辐照输出、应用严重受限的不足,本章将研究能实现整体出射光线精确控制的三维设计,以期获得可面向复杂辐照输出的光学系统设计方法。

### 3.2 二维设计向三维设计过渡存在的问题及解决方法

相对于三维设计,二维设计最大优势在于能够很容易获得光源出射与目标落点之间合适的映射关系,即可构建自由曲面光学系统实现所得映射。从二维到三维设计的拓展,这种构建和实现映射分步进行的思路最易于继承,Ding<sup>[40]</sup>通过人为划分光源出射和目标辐照网格,并保证对应网格区域包含的能量相等,可基于二维设计方法构建一系列偏微分方程实现人为划分的映射关系,进而构建自由曲面。该方法实现了预期照明输出,但所得自由曲面处于不连续状态,这归因于曲面不满足光滑连续条件式(1.1)。

Ding<sup>[40]</sup>人为划分网格导致所得自由曲面包含大量曲面片,各曲面片间存在不连续台阶,该问题在 Fournier<sup>[61]</sup>的博士论文中也曾有过描述,问题根源于人为划分的网格难以满足映射的可积性。针对这种缺陷,数学法中常用的解决方法为映射法<sup>[12,42,43,50,62-67]</sup>和 Monge-Ampère 方法<sup>[8,45,46,68-71]</sup>。映射法设计思想、二维设计中显式设计以及上述 Ding 所用设计方法思路相同,都是将获得光源出射与目标面落点之间的映射关系获取与构建自由曲面实现所得映射分步进行。映射法的难点在于获得合适的光源出射与目标面落点之间的映射关系,不仅需要满足辐照输出要求,还需要满足映射的可积性,保证自由曲面光滑连续;Monge-Ampère 方法所构建的数学模型内含映射可积性,曲面的构建常用缝合 NURBS 曲面片法,构建过程保证采样点及其两个方向的切矢信息,不仅保证了采样点光线落点,实现辐照输出要求;也保证了所得自由曲面的光滑连续性,该方法难点在于如何处理自由曲面照明光学系统数学模型。

### 3.3 自由曲面照明光学系统数学模型构建

#### 3.3.1 坐标系的构建及能量守恒方程的获得

本节将从自由曲面照明光学系统几何结构出发,根据自由曲面照明光学系统特性,结合能量守恒定律、光线传播的 Snell 定律以及照明光学系统特性,获得整体系统数学模型。

Wu 已经在他的著作<sup>[45,46,72]</sup>中给出了平行光光源和点光源透射式自由曲面照明光学系统数学模型,均为椭圆型 Monge-Ampère 方程。这里不对所有系统情形展开,仅给出点光源反射式自由曲面照明光学系统数学模型,其他模型的构建方法相似。点光源反射式自由曲面照明光学系统的数学模型采用 Schruben<sup>[29]</sup>的构建思路,这里简要给出构建流程。

整体系统设置如图 3.1 所示,光源位于坐标系  $xyz$  原点,光源发出的光经自由曲面反射后到达目标辐照面,形成照明区域  $\Omega_1$ ,目标辐照面坐标系为  $t_x t_y$ ,与整体系统共用  $z$  轴。采用球极平面投影法(stereographic projection)将光源发出的光投影到光源出射面上,形成光源出射区域  $\Omega_0$ ,光源出射面坐标系设为  $u, v$ ,与整体系统共用  $z$  轴。为计算方便,以光源到目标辐照面之间的距离为 1 对整体系统进行归一化,这样  $t_x t_y$  坐标系的中心点坐标即为  $(0, 0, -1)$ ,并以该点作为投影点对光源出光进行投影,设定光源出射面和目标辐照面均与球极平面投影球相切,则光源出射面  $u, v$  坐标系中心点坐标为  $(0, 0, 1)$ 。球极平面投影的关系以一条光线为例进行说明,取光源出射光线与单元球交点为  $C$ ,从点  $(0, 0, -1)$  将点  $C$  投影到光源出射区域  $\Omega_0$  内点  $S$ ,记点  $S$  坐标为  $(u, v)$ 。设该光源出射光线与自由曲面交点为  $F$ ,经自由曲面反射后到达目标辐照区域  $\Omega_1$  内点  $T$ ,记点  $T$  坐标为  $(t_x, t_y)$ ,若点  $T$  对应的预期辐照强度为  $L$ ,记为  $L(t_x, t_y)$ 。

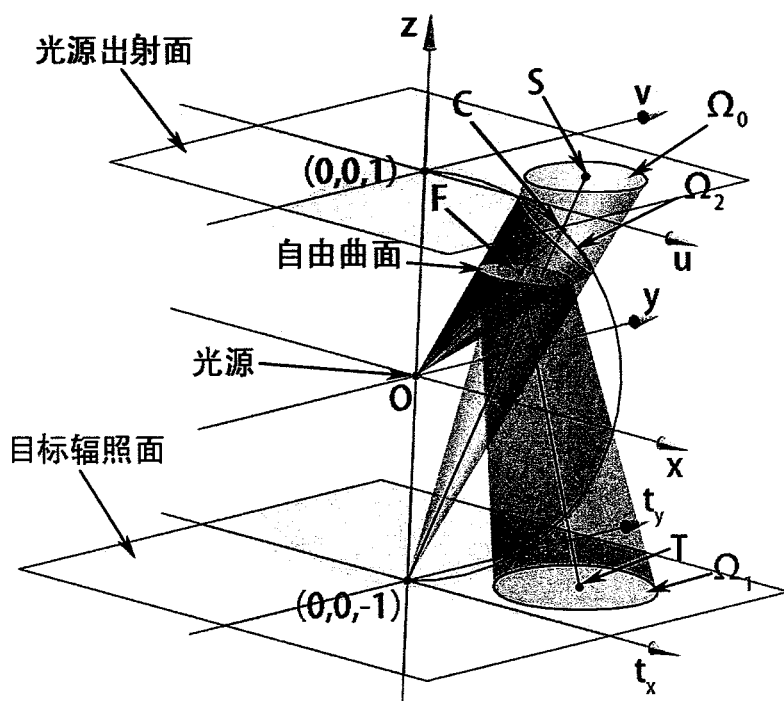


图 3.1 自由曲面照明光学系统坐标系

光源具有自身发光特性，发光强度与光源出射角度相关，设光源出射光线  $OC$  具有发光强度  $I$ ，则点  $S$  所对应的光源强度为  $I$ ，记为  $I(u, v)$ 。若设定整体光学系统不存在能量损失，即光源出射区域  $\Omega_0$  内包含的能量通过自由曲面光学系统的折转，全部到达目标辐照面上，形成区域  $\Omega_1$ ，则根据能量守恒定律有：

$$\iint_{\Omega_1} L(t_x, t_y) dt_x dt_y = \iint_{\Omega} I(u, v) d\Omega \quad \dots(3.1)$$

式中  $\Omega_1$  为目标辐照面上的辐照区域， $\Omega$  为光源出射的立体角。

上述球极平面投影定义了一个向量到点的映射，具体到这里为光源出射光线所具有的向量  $OC$  到点  $S$  的映射，记向量  $OC$  为  $\mathbf{x}$ ，则有：

$$\mathbf{x} = \left( \frac{u}{1+0.25w^2}, \frac{v}{1+0.25w^2}, \frac{1-0.25w^2}{1+0.25w^2} \right) \quad \dots(3.2)$$

式中  $u, v$  为点  $S$  坐标， $w^2 = u^2 + v^2$ 。

式(3.1)中光源出射立体角对应图 3.1 中点  $C$  所在单元球面上区域  $\Omega_2$ ，且该区域通过球极平面投影与光源出射面上的区域  $\Omega_0$  相关，具体为：

$$d\Omega = |\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v| dudv \quad \dots(3.3)$$

式(3.2)分别对  $u, v$  求偏导, 能够获得:

$$\mathbf{x}_u = (1 + 0.25w^2)^{-2} (1 + 0.25v^2 - 0.25u^2, -0.5uv, -u) \quad \dots(3.4)$$

$$\mathbf{x}_v = (1 + 0.25w^2)^{-2} (-0.5uv, 1 + 0.25u^2 - 0.25v^2, -v) \quad \dots(3.5)$$

将式(3.4)和式(3.5)带入式(3.3)可得:

$$d\Omega = (1 + 0.25w^2)^{-2} dudv \quad \dots(3.6)$$

则式(3.1)转换为:

$$\iint_{\Omega} L(t_x, t_y) dt_x dt_y = \iint_{\Omega_0} I(u, v) (1 + 0.25w^2)^{-2} dudv \quad \dots(3.7)$$

### 3.3.2 光源出射区域 $\Omega_0$ 与目标辐照区域 $\Omega$ 之间的映射关系

根据图 3.1 所示, 光源入射光线  $OF$  和  $OC$  具有相同方向, 且  $OC$  具有单位长度, 假设光源  $O$  到自由曲面对应点  $F$  的距离设为  $\rho$ , 记入射光线的向量为  $\mathbf{A}$ , 则有:

$$\mathbf{A} = \rho \mathbf{x} = \rho \left( \frac{u}{1 + 0.25w^2}, \frac{v}{1 + 0.25w^2}, \frac{1 - 0.25w^2}{1 + 0.25w^2} \right) \quad \dots(3.8)$$

光线入射到自由曲面上点  $F$ , 反射后到达点目标辐照区域点  $T$ , 记光源到点  $T$  的向量为  $\mathbf{X}$ , 有:

$$\mathbf{X} = (t_x, t_y, -1) \quad \dots(3.9)$$

记点  $F$  处的自由曲面法向量为  $\mathbf{N}$ , 有:

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \mathbf{A}_u \times \mathbf{A}_v = (\rho_u \mathbf{x} + \rho \mathbf{x}_u) \times (\rho_v \mathbf{x} + \rho \mathbf{x}_v) \\ &= \rho^2 (1 + 0.25w^2)^{-2} \mathbf{x} - \rho_u \rho \mathbf{x}_u - \rho_v \rho \mathbf{x}_v \end{aligned} \quad \dots(3.10)$$

对于自由曲面入射点  $F$  处的光线反射, 不直接使用反射定律, 而是使图 3.2 所示的反射定律几何关系, 有:

$$\frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} + \frac{\mathbf{A} - \mathbf{X}}{|\mathbf{A} - \mathbf{X}|} = \frac{2\mathbf{N}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{N})}{|\mathbf{A}| |\mathbf{N}|^2} \quad \dots(3.11)$$

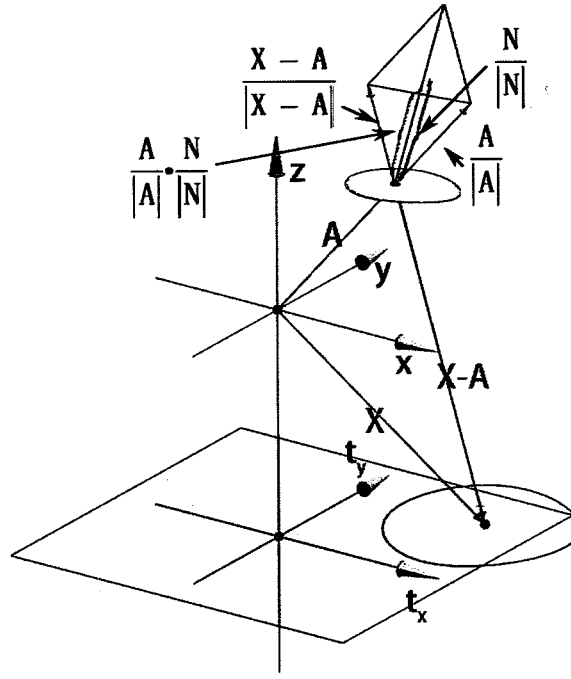


图 3.2 反射定律几何关系示意图

将式(3.8)、(3.9)和(3.10)带入式(3.11), 并令:

$$M = |\mathbf{X} - \mathbf{A}| (1 + 0.25w^2)^{-1} \left[ \rho^2 (1 + 0.25w^2)^{-2} + \rho_u^2 + \rho_v^2 \right]^{-1} \quad \dots(3.12)$$

$$N = \rho (1 + 0.25w^2)^{-1} + M \begin{bmatrix} -\rho^2 (1 + 0.25w^2)^{-2} + \rho_u^2 + \rho_v^2 \\ -\rho (\rho_u u + \rho_v v) (1 + 0.25w^2)^{-1} \end{bmatrix} \quad \dots(3.13)$$

有:

$$t_x = uN + 2\rho\rho_u M \quad \dots(3.14)$$

$$t_y = vN + 2\rho\rho_v M \quad \dots(3.15)$$

带入各参数进行整理可得:

$$M = \frac{1 + \rho(1 - 0.25w^2)(1 + 0.25w^2)^{-1}}{(1 - 0.25w^2) \left[ \rho^2 (1 + 0.25w^2)^{-2} - \rho_u^2 - \rho_v^2 \right] + 2\rho(\rho_u u + \rho_v v)(1 + 0.25w^2)^{-1}} \quad \dots(3.16)$$

容易看出,  $t_x, t_y$  为  $u, v, \rho, \rho_u, \rho_v$  的函数, 式(3.14)和(3.15)可表达为:

$$t_x = t_x(u, v, \rho, \rho_u, \rho_v) \quad \dots(3.17)$$



$$t_y = t_y(u, v, \rho, \rho_u, \rho_v) \quad \dots(3.18)$$

### 3.3.3 自由曲面照明光学系统数学模型

鉴于  $t_x, t_y$  为  $u, v, \rho, \rho_u, \rho_v$  的函数, 对满足式(3.7)、可用  $\rho = \rho(u, v)$  来表达、且具有连续二阶导数的反射镜来说, 式(3.7)能够转化为:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega_0} L(t_x(u, v), t_y(u, v)) \left| \frac{\partial(t_x, t_y)}{\partial(u, v)} \right| du dv \\ &= \iint_{\Omega_0} I(u, v) (1 + 0.25w^2)^{-2} du dv \end{aligned} \quad \dots(3.19)$$

即:

$$L(t_x(u, v), t_y(u, v)) \left| \frac{\partial(t_x, t_y)}{\partial(u, v)} \right| = I(u, v) (1 + 0.25w^2)^{-2} \quad \dots(3.20)$$

式中  $\left| \frac{\partial(t_x, t_y)}{\partial(u, v)} \right|$  为式(3.17)和(3.18)映射关系的 Jacobian 矩阵, 且有:

$$\left| \frac{\partial(t_x, t_y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial t_x}{\partial u} & \frac{\partial t_x}{\partial v} \\ \frac{\partial t_y}{\partial u} & \frac{\partial t_y}{\partial v} \end{vmatrix} \quad \dots(3.21)$$

式中:

$$\frac{\partial t_x}{\partial u} = \frac{\partial t_x}{\partial u} + \frac{\partial t_x}{\partial \rho} \rho_u + \frac{\partial t_x}{\partial \rho_u} \rho_{uu} + \frac{\partial t_x}{\partial \rho_v} \rho_{uv}$$

$$\frac{\partial t_x}{\partial v} = \frac{\partial t_x}{\partial v} + \frac{\partial t_x}{\partial \rho} \rho_v + \frac{\partial t_x}{\partial \rho_v} \rho_{vv} + \frac{\partial t_x}{\partial \rho_u} \rho_{uv}$$

$$\frac{\partial t_y}{\partial u} = \frac{\partial t_y}{\partial u} + \frac{\partial t_y}{\partial \rho} \rho_u + \frac{\partial t_y}{\partial \rho_u} \rho_{uu} + \frac{\partial t_y}{\partial \rho_v} \rho_{uv}$$

$$\frac{\partial t_y}{\partial v} = \frac{\partial t_y}{\partial v} + \frac{\partial t_y}{\partial \rho} \rho_v + \frac{\partial t_y}{\partial \rho_v} \rho_{vv} + \frac{\partial t_y}{\partial \rho_u} \rho_{uv}$$

对具有连续二阶偏导数的自由曲面反射镜来说, 有  $\rho_{uv} = \rho_{vu}$ , 将各参数带入式(3.20), 对其进行展开、合并、化简、整理, 可得:

$$\left| \frac{\partial(t_x, t_y)}{\partial(u, v)} \right| = a_1(\rho_{uu}\rho_{vv} - \rho_{uv}^2) + a_2\rho_{uu} + a_3\rho_{uv} + a_4\rho_{vv} + a_5 \quad \dots(3.22)$$

式中  $a_1 \sim a_5$  为方程系数, 有:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\partial t_x}{\rho_u} \frac{\partial t_y}{\rho_v} - \frac{\partial t_x}{\rho_v} \frac{\partial t_y}{\rho_u}, \\ a_2 &= \frac{\partial t_x}{\rho_u} \frac{\partial t_y}{v} - \frac{\partial t_x}{v} \frac{\partial t_y}{\rho_u} + \rho_v \left( \frac{\partial t_x}{\rho_u} \frac{\partial t_y}{\rho} - \frac{\partial t_x}{\rho} \frac{\partial t_y}{\rho_u} \right), \\ a_3 &= \frac{\partial t_x}{\rho_v} \frac{\partial t_y}{v} - \frac{\partial t_x}{v} \frac{\partial t_y}{\rho_v} + \frac{\partial t_x}{u} \frac{\partial t_y}{\rho_u} - \frac{\partial t_x}{\rho_u} \frac{\partial t_y}{u} + \\ &\quad \rho_u \left( \frac{\partial t_x}{\rho} \frac{\partial t_y}{\rho_u} - \frac{\partial t_x}{\rho_u} \frac{\partial t_y}{\rho} \right) + \rho_v \left( \frac{\partial t_x}{\rho_v} \frac{\partial t_y}{\rho} - \frac{\partial t_x}{\rho} \frac{\partial t_y}{\rho_v} \right), \\ a_4 &= \frac{\partial t_x}{u} \frac{\partial t_y}{\rho_v} - \frac{\partial t_x}{\rho_v} \frac{\partial t_y}{u} + \rho_u \left( \frac{\partial t_x}{\rho} \frac{\partial t_y}{\rho_v} - \frac{\partial t_x}{\rho_v} \frac{\partial t_y}{\rho} \right), \\ a_5 &= \frac{\partial t_x}{u} \frac{\partial t_y}{v} - \frac{\partial t_x}{v} \frac{\partial t_y}{u} + \rho_u \left( \frac{\partial t_x}{\rho} \frac{\partial t_y}{v} - \frac{\partial t_x}{v} \frac{\partial t_y}{\rho} \right) + \rho_v \left( \frac{\partial t_x}{u} \frac{\partial t_y}{\rho} - \frac{\partial t_x}{\rho} \frac{\partial t_y}{u} \right). \end{aligned}$$

鉴于方程系数  $a_1 \sim a_5$  表达式过于复杂, 这里仅给出系数  $a_1$  的化简整理结果:

$$a_1 = \frac{4\rho^2(1+0.25w^2) \left[ \rho^2(1+0.25w^2)^{-2} + \rho_u^2 + \rho_v^2 \right] \left[ 1 + \rho(1-0.25w^2)(1+0.25w^2)^{-1} \right]}{\left\{ (1-0.25w^2) \left[ \rho^2(1+0.25w^2)^{-2} - \rho_u^2 - \rho_v^2 \right] + 2\rho(\rho_u u + \rho_v v)(1+0.25w^2)^{-1} \right\}^3}$$

系数  $a_1 \sim a_5$  均能被表达为:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1(u, v, \rho, \rho_u, \rho_v), a_2 = a_2(u, v, \rho, \rho_u, \rho_v), a_3 = a_3(u, v, \rho, \rho_u, \rho_v), \\ a_4 &= a_4(u, v, \rho, \rho_u, \rho_v), a_5 = a_5(u, v, \rho, \rho_u, \rho_v) \end{aligned}$$

此时系统方程(3.20)能够被表述为:

$$a_1(\rho_{uu}\rho_{vv} - \rho_{uv}^2) + a_2\rho_{uu} + a_3\rho_{uv} + a_4\rho_{vv} + a_5 = I(u, v)(1+0.25w^2)^{-2} / L(t_x, t_y) \quad \dots(3.23)$$

根据图 3.1 所示, 自由曲面在完成能量重新分配的同时, 还需实现预期辐照区域形状, 这就需要给系统方程增加边界条件:

$$\begin{cases} t_x = t_x(u, v, \rho, \rho_u, \rho_v) \\ t_y = t_y(u, v, \rho, \rho_u, \rho_v) \end{cases} : \partial\Omega_0 \rightarrow \partial\Omega_1 \quad \dots(3.24)$$

式中  $\partial\Omega_0, \partial\Omega_1$  分别表示区域  $\Omega_0$  和  $\Omega_1$  的边界, 这是非线性边界条件, 代表着从光源发出光束的边界光线, 经自由曲面折转后到达目标辐照区域的边界。至此自由曲面照明光学系统的数学模型构建完毕, 为:

$$\begin{cases} a_1(\rho_{uu}\rho_{vv} - \rho_{uv}^2) + a_2\rho_{uu} + a_3\rho_{uv} + a_4\rho_{vv} + a_5 = I(u, v)(1 + 0.25w^2)^{-2} / L(t_x, t_y) \\ BC: \begin{cases} t_x = t_x(u, v, \rho, \rho_u, \rho_v) \\ t_y = t_y(u, v, \rho, \rho_u, \rho_v) \end{cases} : \partial\Omega_0 \rightarrow \partial\Omega_1 \end{cases} \quad \dots(3.25)$$

### 3.3.4 自由曲面照明光学系统数学模型的椭圆性

对式(3.23), 令:

$$D = a_1(\rho_{uu}\rho_{vv} - \rho_{uv}^2) + a_2\rho_{uu} + a_3\rho_{uv} + a_4\rho_{vv} + a_5 \quad \dots(3.26)$$

则式(3.23)转化为:

$$DL(t_x, t_y) = I(u, v)(1 + 0.25w^2)^{-2} \quad \dots(3.27)$$

根据二阶偏微分方程椭圆性的定义<sup>[73]</sup>, 要求:

$$Q = 4D_{\rho_{uu}}D_{\rho_{vv}} - D_{\rho_{uv}}^2 > 0 \quad \dots(3.28)$$

式中  $D_{\rho_{uu}} = \partial D / \partial \rho_{uu}, D_{\rho_{vv}} = \partial D / \partial \rho_{vv}, D_{\rho_{uv}} = \partial D / \partial \rho_{uv}$ , 则根据式(3.26)有:

$$\begin{cases} D_{\rho_{uu}} = a_1\rho_{vv} + a_2 \\ D_{\rho_{vv}} = a_1\rho_{uu} + a_4 \\ D_{\rho_{uv}} = -2a_1\rho_{uv} + a_3 \end{cases} \quad \dots(3.29)$$

经整理简化有:

$$Q = 4a_1D \quad \dots(3.30)$$

由于光源出射光能量和目标辐照能量均为正值, 根据式(3.27)有  $D > 0$ , 故整体系统方程的椭圆性取决于系数  $a_1$ 。

系数  $a_1$  中, 基于图 3.1 所示整体系统设置,  $1 + \rho(1 - 0.25w^2)(1 + 0.25w^2)^{-1}$  代表点 F 到目标辐照面距离, 必为正值, 分母为式(3.16)中  $M$  的分母, 根据式(3.12),

有  $(1-0.25w^2) \left[ \rho^2 (1+0.25w^2)^{-2} - \rho_u^2 - \rho_v^2 \right] + 2\rho(\rho_u u + \rho_v v)(1+0.25w^2)^{-1} > 0$ ，且有  $\rho > 0$ ，因此整体系数  $a_1 > 0$ ，系统 Monge-Ampère 方程具有椭圆性，故整体系统方程为椭圆型强非线性二阶 Monge-Ampère 偏微分方程。

### 3.4 采用切比雪夫谱方法解 Monge-Ampère 偏微分方程

整体而言，相对于欧拉法、龙格-库塔法、有限差分法和有限元法等常用的微分方程数值解法，谱方法在计算精度、运算量、稳定性等方面颇具优势，而且谱方法非常简洁、高效、优雅，能够用很短的代码实现对复杂微分方程的解。

#### 3.4.1 切比雪夫点与切比雪夫网格

微分方程常用谱方法包括傅里叶谱方法和切比雪夫谱方法，其中傅里叶谱方法隐含周期性条件，应用有一定局限性。切比雪夫谱方法能够处理有界、非周期区间内的数学问题<sup>[74]</sup>，这里选用切比雪夫谱方法对方程进行处理。

切比雪夫点与常规采样点不同，为非均匀分布点，以区间  $[-1,1]$  为例，切比雪夫点位于区间内不均匀的  $N+1$  个位置，具体为：

$$u_j = \cos(j\pi/N), j=0,1,\dots,N \quad \dots(3.31)$$

根据切比雪夫点的定义，能够把这些切比雪夫点理解为上半个单位圆上等间距点在横轴的投影， $N=8$  和  $N=16$  的情况如图 3.3 所示。

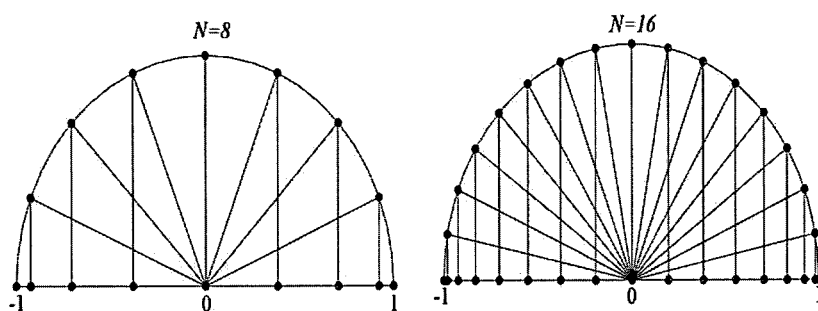


图 3.3 切比雪夫点。左图：  $N=8$ ，右图  $N=16$ 。

这里需要注意的是，切比雪夫点是从右向左排列的。

#### 3.4.2 切比雪夫求导矩阵

对有限区间非周期函数进行数值求导的方法为：首先在计算区间内确定

$N+1$ 个切比雪夫点  $u_0, u_1, \dots, u_N$ ，在这些点上对函数进行代数多项式插值，得到最高次幂小于或等于  $N$  的插值函数  $p(u)$ ，然后求插值函数在切比雪夫点处的导数  $p'(u_0), p'(u_1), \dots, p'(u_N)$ ，且上述过程为线性的，可写成矩阵形式。

为便于讨论，选取计算区间为  $[-1, 1]$ ，坐标被离散为  $u_j = \cos\left(\frac{j\pi}{N}\right)$ ，其中  $j=0, 1, \dots, N$ ，若用  $\mathbf{p}$  代表各离散点处的函数值并组成  $N+1$  维向量  $(\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_N)$ ， $p(u)$  代表其插值函数，定义  $\mathbf{D}_N$  为  $(N+1) \times (N+1)$  切比雪夫求导矩阵，且满足：

$$\mathbf{p}'(u) = \mathbf{D}_N \mathbf{p} \quad \dots(3.32)$$

这里不给出具体推导过程，直接给出切比雪夫求导矩阵的最终结果，有：

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}_N)_{00} &= \frac{2N^2+1}{6}, (\mathbf{D}_N)_{NN} = -\frac{2N^2+1}{6}, (\mathbf{D}_N)_{jj} = -\frac{-u_j}{2(1-u_j^2)}, j=1, 2, \dots, N-1, \\ (\mathbf{D}_N)_{ij} &= \frac{c_i(-1)^{i+j}}{c_j(u_i-u_j)}, i \neq j, \quad i, j=0, 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad \dots(3.33)$$

其中  $(\mathbf{D}_N)_{ij}$  代表切比雪夫求导矩阵  $\mathbf{D}_N$  中第  $i+1$  行第  $j+1$  列的元素。且：

$$c_i = \begin{cases} 2, & i=0, N \\ 1, & i=1, 2, \dots, N-1 \end{cases} \quad \dots(3.34)$$

对矩阵各单元元素进行归纳，形成整体谱求导矩阵为：

$$\mathbf{D}_N = \begin{pmatrix} \frac{2N^2+1}{6} & 2\frac{(-1)^j}{1-u_j} & \frac{1}{2}(-1)^N \\ \vdots & \frac{(-1)^{i+j}}{u_i-u_j} & \vdots \\ -\frac{1}{2}\frac{(-1)^i}{1-u_i} & \frac{-u_j}{2(1-u_j^2)} & \frac{1}{2}\frac{(-1)^{N+i}}{1+u_i} \\ \frac{(-1)^{i+j}}{u_i-u_j} & \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{2}(-1)^N & -2\frac{(-1)^{N+j}}{1+u_j} & -\frac{2N^2+1}{6} \end{pmatrix} \quad \dots(3.35)$$

$\mathbf{D}_N$  为一阶导数切比雪夫求导矩阵，要得到用于求 2 阶导数的切比雪夫求导

矩阵,可直接对  $\mathbf{D}_N$  平方,该思路还可用于高阶求导。且  $\mathbf{D}_N$  表达式来自区间  $[-1,1]$ ,对其他区间函数求导前,需对  $\mathbf{D}_N$  进行缩放,即:  $\partial/\partial u = (2/L)\mathbf{D}_N$ ,  $\partial^n/\partial u^n = [(2/L)\mathbf{D}_N]^n$ , 式中  $L$  为函数定义半区间长度。

对于二维问题,先用切比雪夫点分别在  $x, y$  方向上划分区间  $[-1,1]$ , 即  $u = (u_0, u_1, \dots, u_N)^T$  和  $v = (v_0, v_1, \dots, v_N)^T$ , 于是在  $u-v$  平面的  $-1 \leq u, v \leq 1$  区域内得到了  $(N+1)^2$  个点,如图 3.4 所示。

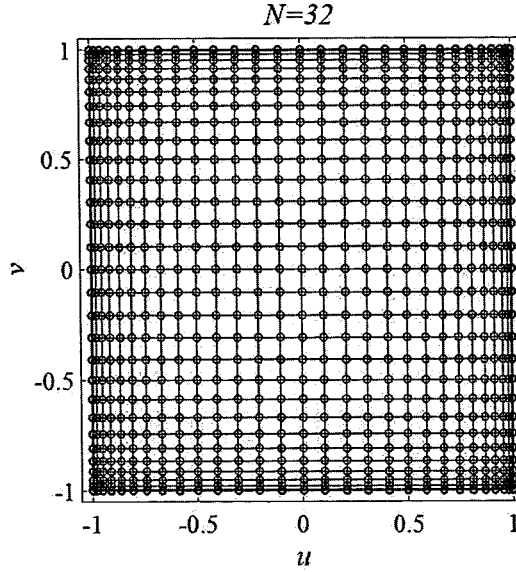


图 3.4 二维切比雪夫点,  $N=32$

用  $N+1$  阶方阵  $\mathbf{p}$  表示这些点上的函数值,有:

$$\mathbf{p}_{(N+1) \times (N+1)} = \begin{pmatrix} \rho_{00} & \cdots & \rho_{0N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{N0} & \cdots & \rho_{NN} \end{pmatrix} \quad \dots(3.36)$$

式中元素  $\rho_{ij}$  对应的坐标为  $(x_i, y_j)$ , 可将  $\partial^n u / \partial y^n$  和  $\partial^n u / \partial x^n$  写为矩阵形式:

$$\partial^n \rho / \partial v^n = \mathbf{D}_N^n \mathbf{p}_{(N+1) \times (N+1)} \quad \dots(3.37)$$

$$\partial^n \rho / \partial u^n = \left( \mathbf{D}_N^n \left( \mathbf{p}_{(N+1) \times (N+1)} \right)^T \right)^T = \mathbf{p}_{(N+1) \times (N+1)} \left( \mathbf{D}_N^n \right)^T \quad \dots(3.38)$$

需要注意的是，本课题所得椭圆型 Monge-Ampère 方程含有混合导数形式  $\partial^2 \rho / \partial u \partial v$ ，其求导表达式为：

$$\partial^2 \rho / \partial u \partial v = \mathbf{D}_N \left( \boldsymbol{\rho}_{(N+1) \times (N+1)} (\mathbf{D}_N)^T \right) \quad \dots(3.39)$$

根据上述切比雪夫网格及其对应求导矩阵，可将所得椭圆型 Monge-Ampère 方程离散化，获得  $(N+1) \times (N+1)$  个高阶非线性方程，解方程组即可获得自由曲面型数据，进而构建模型，搭建光学系统，完成整体设计。

### 3.5 仿真验证

#### 3.5.1 光学系统以及计算初始设定

为验证上述数学模型和计算方法的正确性，拟设计一套自由曲面反射式照明光学系统，采用朗博体 LED 光源，位于系统坐标系原点，光轴与系统坐标系  $z$  轴重合，系统采用单自由曲面反射形式，光源发出的光经自由曲面反射后到达目标辐照面，目标辐照面与光轴垂直，位于  $z$  轴正向距光源  $600\text{mm}$  处，光线被目标辐照面接收后，形成  $360\text{mm} \times 360\text{mm}$  大小的均匀方形光斑，整体示意如图 3.5 所示。

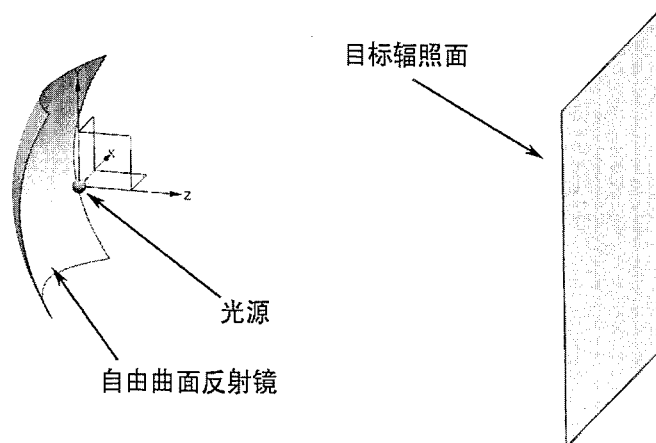


图 3.5 单自由曲面反射镜照明光学系统实验验证示意图

#### 3.5.2 计算初值的获取

自由曲面照明光学系统设计核心在于获得合适的光源出射区域  $\Omega_0$  和目标辐照区域  $\Omega_1$  之间的相互映射关系，不仅需要保证预期辐照输出，同时满足自由曲

面的光滑连续性。

光源出射光强及其对应区域 $\Omega_0$ 、预期辐照强度及其对应区域 $\Omega_1$ 均已知，根据第二章二维设计思想，人为划分网格，将三维设计简单的按照二维设计进行，即分别对 $u, v$ 方向进行能量积分，使各对应网格内包含能量相等，可获得接近实际解的自由曲面参数，作为进一步计算的初值，具体实现方式如下：

首先对沿 $u$ 方向进行能量守恒，通过式(3.40)定义一个函数 $a = a(u)$ ：

$$\int_{-1}^u \int_{-1}^1 I(u, v) (1 + 0.25w^2)^{-2} dv du = \int_{-1}^{a(u)} \int_{-1}^1 L(t_x(u, v), t_y(u, v)) dv du \quad \dots(3.40)$$

将其表达为导数形式，有：

$$\int_{-1}^1 I(u, v) (1 + 0.25w^2)^{-2} dv = a'(u) \int_{-1}^1 L(a(u), t_y(u, v)) dv \quad \dots(3.41)$$

定义函数 $b = b(u, v)$ ，有：

$$\int_{-1}^v I(u, v) (1 + 0.25w^2)^{-2} dv = a'(u) \int_{-1}^{b(u, v)} L(a(u), t_y(u, v)) dv \quad \dots(3.42)$$

通过积分可获得满足能量守恒定律的映射关系 $(u, v) \rightarrow (a(u), b(u, v))$ ，问题在于难以构建光滑连续的自由曲面以实现所得映射关系<sup>[40,61]</sup>，这里采用式(3.14)和(3.15)尽可能逼近所得映射，获得兼顾自由曲面光滑连续性和预期辐照输出的计算初值。

### 3.5.3 结果验证

依上述所得初值对 Monge-Ampère 方程离散化非线性方程组进行计算，可得自由曲面面型数据，进而构建自由曲面模型。构建方法采用 Wu 的缝合 NURBS 自由曲面构建方法<sup>[47]</sup>，基于计算结果的各离散点数据及其对应的两方向切矢，以相邻四个点构建自由曲面片，通过缝合各自由曲面片，形成所需的光滑连续的 NURBS 自由曲面，所构建的自由曲面模型如图 3.6 所示。



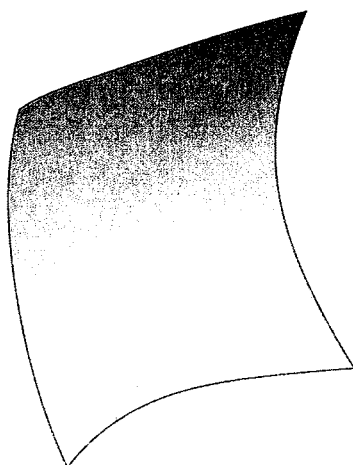


图 3.6 自由曲面模型

图 3.6 所示自由曲面模型边缘具有方形特性,这是由于切比雪夫谱方法的网格分布具有拓扑方形的特性,但光源具有旋转对称性,光源出光区域为拓扑圆形,两者之间存在不匹配现象,这会导致光源能量利用率达不到理想水平,该自由曲面模型对应光源能量利用率理论上约为 70%,尚有提升空间。

计算电脑配置 CPU 为酷睿 i7 5500U,双核 2.4GHz 的频率,8G 内存,计算网格选取  $32 \times 32$ ,计算误差设置为  $10^{-6}$ ,计算耗时 2 小时 48 分钟 37 秒收敛,获得光源出射区域  $\Omega_0$  与目标辐照区域  $\Omega_1$  之间的相互映射关系,如图 3.7 所示。该映射不仅满足能量守恒定律,且满足自由曲面光滑连续性的可积性条件式(1.1),故所得自由曲面光滑连续,这在图 3.6 中已有所体现。

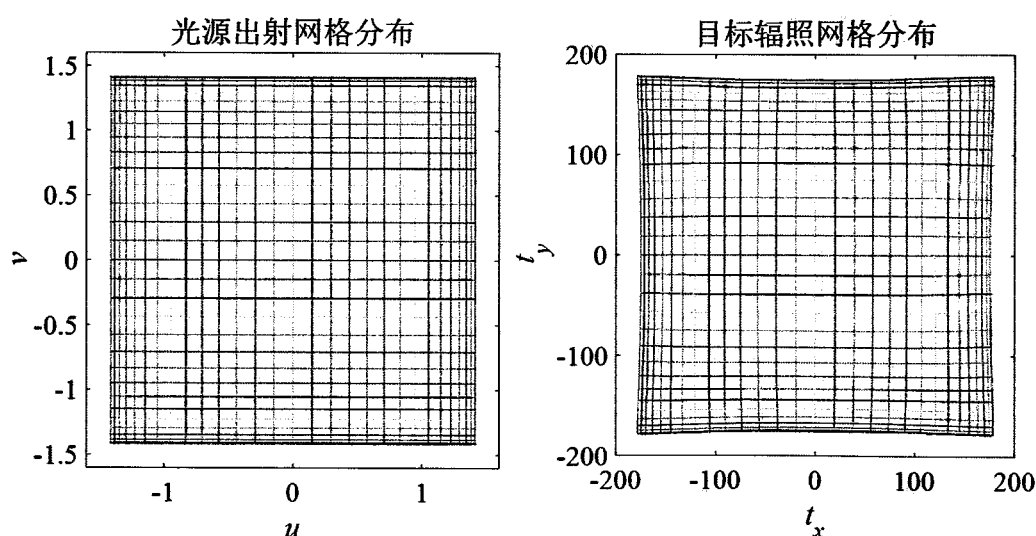


图 3.7 光源与目标之间的映射

依据所构建的自由曲面模型，加入光源与目标辐照面，可构建整体自由曲面照明光学系统，如图 3.8 所示。

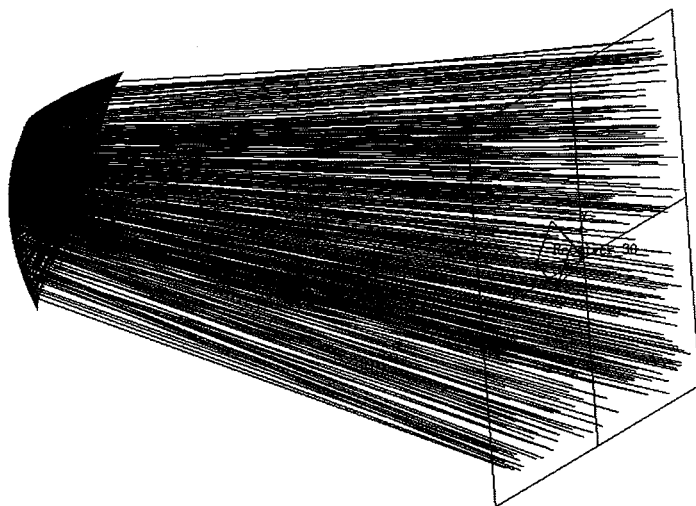


图 3.8 带光线效果的自由曲面照明光学系统

对图 3.8 所示的自由曲面照明光学系统进行仿真计算，追迹 500 万条光线，可获得图 3.9 所示的辐照效果，辐照输出三维数据显示如图 3.10 所示。

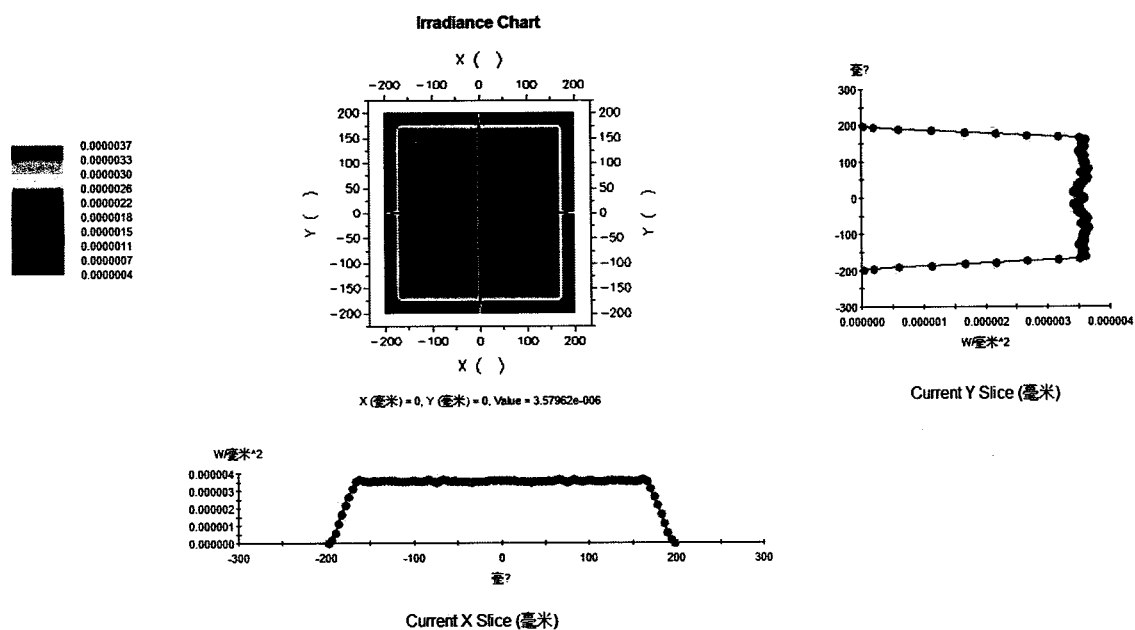


图 3.9 辐照输出效果图

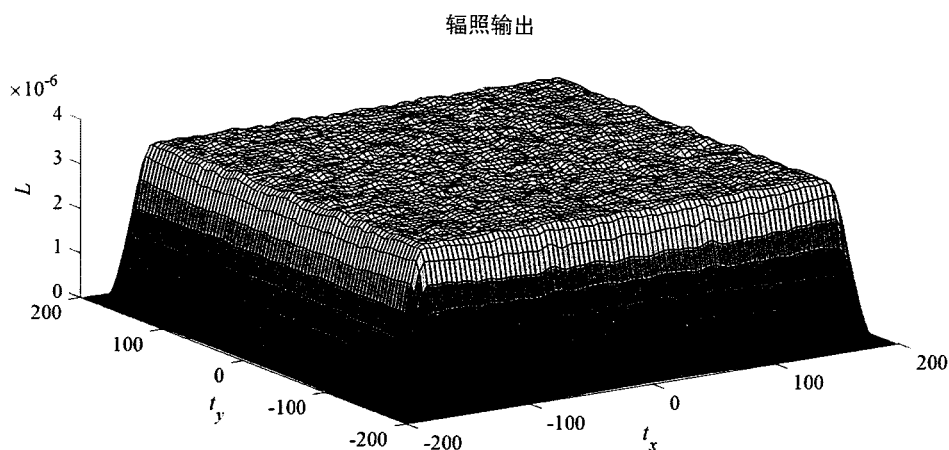


图 3.10 辐照输出三维显示

系统设计目的在预期辐照面上获得  $360\text{mm} \times 360\text{mm}$  的方形均匀辐照光斑，从仿真结果来看，已实现设计目标，为进一步验证辐照输出特性，对输出数据进行处理，如式(3.43)所示：

$$\text{Illumination nonuniformity} = \frac{L_{\max} - L_{\min}}{L_{\max} + L_{\min}} \times 100\% \quad \dots(3.43)$$

式中  $L_{\max}$  为辐照输出区域内辐照度最大值， $L_{\min}$  为辐照输出区域内辐照度最小值。带入仿真结果相应数据，能够得到其辐照不均匀度为 4.91% 的满意效果。

### 3.6 本章小结

本章基于自由曲面照明光学系统设置，构建了系统 Monge-Ampère 数学模型，并引入切比雪夫谱方法解决所得系统模型，构建了相应的谱求导矩阵，基于变量分离法获得计算初值，采用谱求导矩阵对数学模型进行处理，获得了一系列非线性方程，求解非线性方程组获得自由曲面面型数据，完成系统设计。

然后以朗博体 LED 光源和单自由曲面反射镜，实现均匀方形辐照输出的光学系统为例，对上述设计方法进行验证。将所得光学系统进行仿真计算，仿真结果显示，系统实现了预期辐照输出，辐照区域大小形状与预期相符，不均匀度可达 4.91%。

## 第4章 基于简化 Monge-Ampère 方程自由曲面照明光学系统设计

### 4.1 引言

尽管上个研究阶段基于常规 Monge-Ampère 方程自由曲面照明光学系统设计实现了整体光线的精细调控, 获得了预期辐照输出效果, 但还存在不足之处。一是方程过于复杂, 计算耗时长, 系统采用  $33 \times 33$  离散网格, 计算耗时近 3 小时, 设计效率还不够高; 二是该方法光源出射区域为拓扑方形, 与光源旋转对称特性不匹配, 导致光源能量利用率不足, 上述光学系统光源利用率约为 70%, 还有提升空间; 三是切比雪夫采样点具有中心区域稀疏, 边缘区域密集的特性, 面向高分辨率复杂辐照输出时设计效率不高, 且中心区域难以保证设计效果。

针对上述不足之处, 本章将从照明光学系统的本质出发, 探究系统方程的来源、以期寻求一种具有普适性、高效、灵活且面向高分辨率复杂辐照输出的自由曲面照明光学系统设计方法。

### 4.2 自由曲面照明光学系统本质

自由曲面照明光学系统设计本质在于对光源出射能量的保持和重新分配, 且照明系统通常针对两种类型的光源, 平行光光源或点光源, 以点光源为例, 可抽象为图 4.1 所示光学系统。

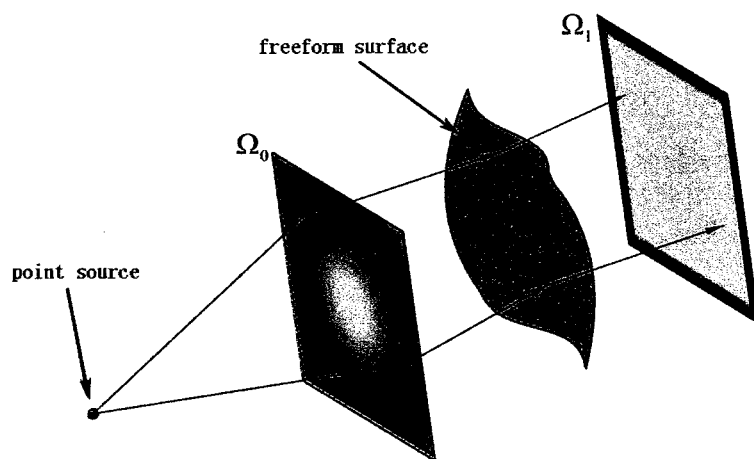


图 4.1 自由曲面照明光学系统示意图

整体系统包括点光源，光源对应出射区域 $\Omega_0$ ，自由曲面(一个或多个)以及目标辐照区域 $\Omega_1$ 组成。光源出射光以一定方式投影形成光源出射区域 $\Omega_0$ ，经自由曲面光学系统偏折后，到达目标辐照区域 $\Omega_1$ ，形成所需辐照分布。整体光学系统设计目的在于寻求光源出射区域和目标辐照区域之间合理的映射关系，不仅需要保证输出辐照分布与预期照明相符，还要保证自由曲面的光滑连续性。

鉴于自由曲面照明光学系统核心在于能量的搬运与重新分配，这隶属于数学上一个非常有名的问题，即 Optimal Mass Transport (OMT) 问题。

### 4.3 Monge-Ampère 方程与 OMT 问题之间的关系

#### 4.3.1 Monge-Kantorovich Mass Transport 问题

OMT 问题最早被 Monge 提出，描述的问题为如何以最小代价将一片给定的沙子运送到预期洞内，该问题代价最为简单，即沙子的运送距离(如图 4.2 所示)，本质在于寻求合适的源集合到目标集合映射 $s(x)$ ，使代价函数(4.1)最小：

$$I[s] = \int_X |x - s(x)| dx \quad \dots(4.1)$$

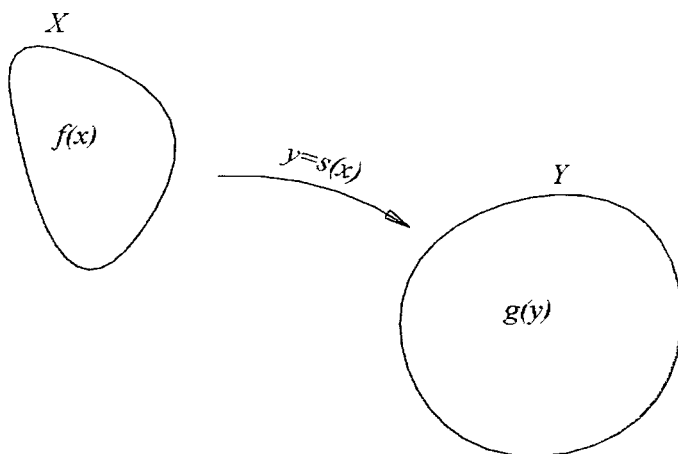


图 4.2 OMT 问题

上述沙子运输问题设定沙子各处密度一致，这是最简单的情况，更为普遍的 Monge-Kantorovich Mass Transport 问题传输具有一定密度的能量/物质，同时也拥有更为普遍的代价函数。即希望寻求一个映射能够将 $X$ 空间中具有密度为

$f(x)$  的能量/物质搬运到  $Y$  空间中, 且分布遵循密度函数  $g(y)$ , 记该映射关系的方程集合为可容许集合  $\mathfrak{R}$ 。这里同样给出代价函数  $c(x, y)$ , 代表从  $x$  位置搬运单位能量/物质到  $y$  位置所付出的代价, 这样问题可描述为寻求合适映射  $s(x) \in \mathfrak{R}$  使得代价函数(4.2)最小:

$$I[s] = \int_X c(x, s(x)) f(x) dx \quad \dots(4.2)$$

Kantorovich 对理解 OMT 问题做出了巨大贡献, 成功的将该问题转化为一个线性规划问题且描述了一个简单的对偶式<sup>[75,76]</sup>。这使得很多理论上的问题更容易理解和回答, 同时维度也增加一倍, 导致计算一个很小规模的问题都要付出很大代价, 推动着新的方法不断涌现以更为有效的解决 OMT 问题。

#### 4.3.2 能量/物质守恒

上述能量/物质搬运过程暗含能量/物质守恒定律, 即需要从源集合  $X$  将所有能量/物质全部搬运到目标集合  $Y$ , 因此对任意连续函数  $h(y)$ , 下面能量/物质守恒公式都必须成立:

$$\int_X h(s(x)) f(x) dx = \int_Y h(y) g(y) dy \quad \dots(4.3)$$

在方程右端引入参数变换  $y = s(x)$ , 可得:

$$\int_X h(s(x)) f(x) dx = \int_Y h(s(x)) g(s(x)) \det(\nabla s(x)) dx \quad \dots(4.4)$$

对式(4.4)进行整理, 可得:

$$\int_X h(s(x)) (f(x) - g(s(x)) \det(\nabla s(x))) dx = 0 \quad \dots(4.5)$$

式(4.5)对任意连续函数  $h(y)$  都成立, 可得方程:

$$\det(\nabla s(x)) = \frac{f(x)}{g(s(x))} \quad \dots(4.6)$$

#### 4.3.3 Monge-Ampère 方程

在上述 OMT 问题中, 最为广泛研究的是二阶代价函数:

$$c(x, y) = \frac{1}{2} |x - y|^2 \quad \dots(4.7)$$

在该代价函数下, Monge-Kantorovich 问题转化为:

$$\begin{aligned} & \text{minimise} \quad \int_X \frac{1}{2} |x - s(x)|^2 f(x) \\ & \text{subject to} \quad \det(\nabla s(x)) = f(x)/g(s(x)) \end{aligned} \quad \dots(4.8)$$

事实上该问题的解是周期单调的, 直观上讲, 就是在搬运过程中, 物质/能量不能被扭曲, 亦即离散化的光源和目标之间的映射网格不能扭曲, Froese 就该问题的单调性给出了简单证明<sup>[77]</sup>。

Rockafellar 证明了定理 1, 在此基础上得出 Monge-Ampère 方程来源于具有二阶代价函数的 Monge-Kantorovich 物质/能量传输问题<sup>[78]</sup>, 即来源于  $L^2$  Monge-Kantorovich Mass Transport 问题。

定理 1: Every cyclically monotone subset of  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  lies in the subdifferential of a convex mapping of  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

根据定理 1,  $L^2$  Monge-Kantorovich Mass Transport 问题的解能够表述为:

$$s(x) = \nabla \omega \quad \dots(4.9)$$

式中  $s(x)$  是上述问题的解,  $\omega$  为凸函数<sup>[79]</sup>。给定式(4.8)所描述问题的约束解  $s(x)$ , 该凸函数必须满足 Monge-Ampère 方程:

$$\begin{cases} \det(D^2 \omega(x)) = f(x)/g(\nabla \omega(x)) & x \in X \\ \nabla \omega: X \rightarrow Y \\ \omega \text{ is convex.} \end{cases} \quad \dots(4.10)$$

#### 4.3.4 自由曲面照明光学系统的简化 Monge-Ampère 方程模型

受上述 Monge-Ampère 方程来源的启发及其解的特性, 设置式(3.17)和式(3.18)所示的光源出射到目标辐照之间的映射关系为  $\nabla \rho'$ , 即有:

$$\begin{cases} t_x = \rho'_u \\ t_y = \rho'_v \end{cases} \quad \dots(4.11)$$

式中  $\rho'$  为虚拟自由曲面参数, 为凸函数。

将式(4.11)映射关系带入式(3.19)能量守恒定律中, 可得:

$$L(t_x(u, v), t_y(u, v)) \left| \frac{\partial(t_x, t_y)}{\partial(u, v)} \right| = I(u, v) (1 + 0.25w^2)^{-2} \quad \dots(4.12)$$

对式(4.12)进行整理、合并、化简可得:

$$\rho'_{uu} \rho'_{vv} - \rho'^2_{uv} = \frac{I(u, v) (1 + 0.25w^2)^{-2}}{L(t_x, t_y)} \quad \dots(4.13)$$

根据图 3.1 所示, 自由曲面在完成能量重新分配的同时, 需要实现预期辐照区域形状, 给系统方程增加边界条件:

$$\begin{cases} t_x = \rho'_u \\ t_y = \rho'_v \end{cases} : \partial\Omega_0 \rightarrow \partial\Omega_1 \quad \dots(4.14)$$

该边界条件意味着光源出射光束的边缘光线, 经虚拟自由曲面光学系统偏折后, 到达预期辐照区域 $\Omega_1$ 的边界。

很显然式(4.13)包含 Monge-Ampère 算子, 易于证明式(4.13)也是一个椭圆型 Monge-Ampère 方程, 相对于式(3.23), 这是一种简化的 Monge-Ampère 方程形式, 结合边界条件, 可得自由曲面照明光学系统简化的数学模型:

$$\begin{cases} \rho'_{uu} \rho'_{vv} - \rho'^2_{uv} = \frac{I(u, v) (1 + 0.25w^2)^{-2}}{L(t_x, t_y)} \\ BC: \begin{cases} t_x = \rho'_u \\ t_y = \rho'_v \end{cases} : \partial\Omega_0 \rightarrow \partial\Omega_1 \end{cases} \quad \dots(4.15)$$

方程(4.15)包含虚拟自由曲面参数信息 $\rho'$ 、光源出射区域 $\Omega_0$ 坐标信息 $u, v$ 、预期辐照区域 $\Omega_1$ 坐标信息 $t_x, t_y$ , 光源出光特性 $I$ 和目标辐照输出参数 $L$ , 不包含图 3.1 所示自由曲面照明光学系统各元素相对位置的几何关系信息。因此完全可根据光源出射特性数据和预期辐照输出数据获得光源出射与目标辐照之间的映射关系, 然后构建真实的自由曲面照明光学系统实现所得映射, 这将大幅提升自由曲面照明光学系统设计的灵活性, 摆脱整体光学系统结构设置的束缚, 同时能够构建多自由曲面照明光学系统以提升整体系统性能, 如能量利用率, 自由曲面可加工性, 映射关系实现精度等。



自由曲面照明光学系统设计核心在于解决一个可逆问题, 给定光源和预期辐照输出, 设计一个或多个自由曲面使光源出射和目标辐照之间能够相互映射, 一方面保证光学系统产生预期辐照输出, 同时保证自由曲面的光滑连续性。该可逆问题所寻求的是光源出射与目标辐照之间相互映射关系, 不仅可基于光源出射到目标辐照的映射, 还可基于目标辐照到光源出射的映射。

因此构建类似式(4.11)从目标辐照到光源出射的映射关系:

$$\begin{cases} u = \rho'_{t_x} \\ v = \rho'_{t_y} \end{cases} \quad \dots(4.16)$$

该映射关系同样需要满足能量守恒定律, 即:

$$\iint_{\Omega_1} L(t_x, t_y) dt_x dt_y = \iint_{\Omega_0} I(u, v) (1 + 0.25w^2)^{-2} du dv \quad \dots(4.17)$$

根据式(4.16)映射关系, 将式(4.17)转化为:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_1} L(t_x, t_y) dt_x dt_y = \\ \iint_{\Omega_1} I(u(t_x, t_y), v(t_x, t_y)) \left(1 + 0.25(w(t_x, t_y))^2\right)^{-2} \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(tx, ty)} \right| dt_x dt_y \end{aligned} \quad \dots(4.18)$$

有:

$$L(t_x, t_y) = I(u(t_x, t_y), v(t_x, t_y)) \left(1 + 0.25(w(t_x, t_y))^2\right)^{-2} \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(tx, ty)} \right| \quad \dots(4.19)$$

对式(4.19)进行展开, 合并、整理, 可得:

$$\rho'_{t_x t_x} \rho'_{t_y t_y} - \rho'^2_{t_x t_y} = \frac{L(t_x, t_y)}{I(u, v) (1 + 0.25w^2)^{-2}} \quad \dots(4.20)$$

边界条件为目标辐照区域 $\Omega_1$ 边界与光源出射区域 $\Omega_0$ 边界之间的映射, 具体形式为:

$$\begin{cases} u = \rho'_{t_x} \\ v = \rho'_{t_y} \end{cases} : \partial\Omega_1 \rightarrow \partial\Omega_0 \quad \dots(4.21)$$

结合所得数学模型与边界条件, 能够获得基于目标辐照到光源出射映射的自由曲面照明光学系统数学模型:

$$\begin{cases} \rho'_{t_x t_x} \rho'_{t_y t_y} - \rho'^2_{t_x t_y} = \frac{L(t_x, t_y)}{I(u, v)(1 + 0.25w^2)^{-2}} \\ BC: \begin{cases} u = \rho'_{t_x} \\ v = \rho'_{t_y} \end{cases} : \partial\Omega_1 \rightarrow \partial\Omega_0 \end{cases} \quad \dots(4.22)$$

基于目标辐照输出到光源出射的映射进行设计是对设计能力的又一大提升,特别是对于辐照输出复杂,难以用常规数学式表达的情况,将大幅降低设计难度,提升设计效率,获得更佳设计效果。

#### 4.4 傅里叶谱方法求解 Monge-Ampère 方程

傅里叶谱方法为一种采样点均匀分布的计算方法,相对于切比雪夫谱方法,傅里叶谱方法更适于复杂辐照输出的光学系统设计,这里给出其计算原理和特性的简单介绍<sup>[74]</sup>。

##### 4.4.1 傅里叶谱方法简介

对于在 $(-\infty, \infty)$ 有定义且绝对可积,且在任一有限区间上满足狄利克莱条件的函数 $m(x)$ ,傅里叶变换(Fourier transform)及其逆变换(inverse Fourier transform)能够定义为:

$$m(k) = \int_{-\infty}^{\infty} m(x) e^{-ikx} dx \quad \dots(4.23)$$

$$m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} m(k) e^{ikx} dk \quad \dots(4.24)$$

式(4.23)和式(4.24)定义了一个傅里叶变换对(Fourier transform pair),这里将其记为 $m(k) = F[m(x)]$ 和 $m(x) = F^{-1}[m(k)]$ 。众所周知,傅里叶变换对的定义并不唯一,上述定义式系数能够随意更改,但前提是其积为 $1/2\pi$ 。此外,定义式中的 $e^{-ikx}$ 和 $e^{ikx}$ (称为积分变换的核)也能够互换。易于证明, $m(x)$ 当经过傅里叶变换及其逆变换后还是其自身,即有: $m(x) = F^{-1}[F[m(x)]]$ 。在物理上,若研究对象为空间上的信号分布 $m(x)$ ,那么 $k$ 就是波数( $2\pi$ 长度上波长的个数,代表信号在空间上的变化速度), $m(k)$ 称为波数谱;类似的,若将上述式中的坐标

$x$  和波数  $k$  代换成时间  $t$  和角频率  $\omega$ ，研究对象就成了时间上的信号  $m(t)$ ，其傅里叶变换就是频谱  $m(\omega)$ ，通过类比可知波数  $k$  就是一种空间上的频率。傅里叶变换及其逆变换就是空域(或时域)与频域之间的转换工具。

当  $m$  为二维函数时，将  $x$  方向和  $y$  方向上的傅里叶变换分别表示为  $F_x[ ]$  和  $F_y[ ]$ ，并在变换后的函数上加“ $\hat{\phantom{x}}$ ”和“ $\sim$ ”进行区分，如： $m(k_x, y) = F_x[m(x, y)]$   
 $m(x, k_y) = F_y[m(x, y)]$ ，其中  $k_x$  和  $k_y$  分别为  $x$  方向和  $y$  方向的波数。在二维情况下，默认  $F[ ]$  和  $F^{-1}[ ]$  分别代表二维傅里叶变换及其逆变换。即  $F[ ] = F_y\{F_x[ ]\}$  或  $F_x\{F_y[ ]\}$ 、 $F^{-1} = F_y^{-1}\{F_x^{-1}[ ]\}$  或  $F_x^{-1}\{F_y^{-1}[ ]\}$ ，并有：

$$\begin{aligned} m(k_x, k_y) &= F[m(x, y)] \\ m(x, y) &= F^{-1}[m(k_x, k_y)] \end{aligned} \quad \dots(4.25)$$

通常来讲，若不对“傅里叶变换”加任何限定，那么它指的就是连续傅里叶变换，也就是针对定义在无限区间内的连续函数  $m(x)$  的傅里叶变换，这是在理想条件下的数学定义。在实际应用中，大部分时候信号是离散的，有限的，离散傅里叶变换(discrete Fourier transform)就是针对这一情况提出的。在 Matlab 中，对于序列  $m_1, \dots, m_j, \dots, m_N$  的离散傅里叶变换及其逆变换定义为：

$$m_k = \sum_{j=1}^N m_j e^{\frac{-2\pi(j-1)(k-1)i}{N}}, k = 1, \dots, N \quad \dots(4.26)$$

$$m_j = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N m_k e^{\frac{2\pi(j-1)(k-1)i}{N}}, j = 1, \dots, N \quad \dots(4.27)$$

同样，上述定义中的归一化系数也可以有其他选择，但他们的乘积必须为  $1/N$ 。如果将序列  $m_1, \dots, m_j, \dots, m_N$  看做等间隔空间(时间)点上的信号幅度值，那么经过傅里叶变换得到的序列  $m_1, \dots, m_k, \dots, m_N$  就是相应的频谱信息。通过定义式(4.26)和式(4.27)容易得到  $m_j = m_{j+N}$  和  $m_k = m_{k+N}$ ，这就是说，离散傅里叶变换已经隐含了周期性边界条件，它假设待做离散傅里叶变换的离散信号在周期为  $2\pi$  的周

期域上。在实际运算中,一般不直接采用上述离散傅里叶变换的定义式进行计算,而是使用快速傅里叶变换(fast Fourier transform)算法,此算法是二十世纪六十年代中期由 Cooley 和 Tukey 提出的,被誉为二十世纪最伟大的十大算法之一。离散傅里叶变换的运算量(arithmetical operation)是  $O(N^2)$ ,而快速傅里叶变换可将运算量降低到  $O(N\log(N))$ 。特别是当  $N$  很大时,  $N\log(N)$  的增长速度接近于  $N$ ,可以大大的节省运算时间。但是,为了获得较高的运算速度,待变换序列的元素数量必须是  $2^n$  个,即其个数必须为 2,4,8,16,32,64... ..。

#### 4.4.2 求导、积分与傅里叶谱方法

对于  $F[m'(x)]$ ,由傅里叶变换的定义和分部积分法,得到:

$$F[m'(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} m'(x) e^{-ikx} dx = m(x) e^{-ikx} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} m(x) (-ik) e^{-ikx} dx \quad \dots(4.28)$$

当  $|x| \rightarrow \infty$  时,  $m(x) \rightarrow 0$ , 则:

$$F[m'(x)] = ik \int_{-\infty}^{\infty} m(x) e^{-ikx} dx = ik F[m(x)] \quad \dots(4.29)$$

类似的,能够得到:

$$F[m^{(n)}(x)] = (ik)^n F[m(x)] \quad \dots(4.30)$$

其中  $m^{(n)}(x)$  代表  $m(x)$  的  $n$  阶导数,式(4.30)的意义在于,函数求导运算在傅里叶变换的作用下,能够转化为相对简单的代数运算:  
 $m^{(n)}(x) = F^{-1}[(ik)^n F[m(x)]]$ 。基于此原理,傅里叶谱方法(Fourier spectral method)利用傅里叶变换将微分方程中的空域(space domain)或时域(time domain)上的求导运算简化为频域(spectral domain)上的代数运算,求解后在通过傅里叶逆变换得到空域或时域上的结果。

#### 4.4.3 谱求导矩阵

在很多情况下,某些函数关系的具体表达式是未知的,只能得到一些离散的数据点,因此需要利用这些离散点构造一个已知函数来近似描述并替代未知函数。另外,尽管一些函数表达式已知,但过于复杂繁琐,不便于对其进行分析和

处理，也有必要构造简单函数来替代它。

用数学语言描述这个问题，即：已知在区间 $[a, b]$ 上的 $N$ 个位置 $x_1, x_2, \dots, x_N$ 的函数值 $m_1, m_2, \dots, m_N$ ，求函数 $p(x)$ 通过所有已知点 $(x_1, m_1), (x_2, m_2), \dots, (x_N, m_N)$ ，即：

$$m_j = p(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, N \quad \dots(4.31)$$

这里谱方法插值方法的思路为：首先求出周期 $\delta$ 函数的插值函数 $S_N(x)$ ，然后将任意序列 $m_1, m_2, \dots, m_N$ 写为周期 $\delta$ 函数的线性组合，进而能够把其插值函数 $p(x)$ 写为 $S_N(x)$ 的线性组合，最后求出 $p(x)$ 和 $S_N(x)$ 在 $x_1, x_2, \dots, x_N$ 处的导数关系，并写为矩阵形式，这就是任意序列 $m_1, m_2, \dots, m_N$ 的谱求导矩阵。

周期 $\delta$ 函数的定义为：

$$\delta_j = \begin{cases} 1 & (j \% N = 0) \\ 0 & (j \% N \neq 0) \end{cases} \quad \dots(4.32)$$

其中 $\%$ 为求余计算，周期 $\delta$ 函数在 $j = nN$  ( $n$ 为任意整数)时取值为1，其他情况为0，它对应的横坐标为 $x_j = jh$ ，求周期 $\delta$ 函数的离散傅里叶变换，结果为常数 $h$ ：

$$\delta_k = h \sum_{j=1}^N e^{-ikx_j} \delta_j = h, \quad k = -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2} \quad \dots(4.33)$$

进而能够求周期 $\delta$ 函数的插值函数：

$$p(x) = \frac{h}{2\pi} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} ' e^{ikx} \quad \dots(4.34)$$

式中 $\sum'$ 表示求和时在 $k = \pm \frac{N}{2}$ 的项乘上 $1/2$ 。

对式(4.34)进行整理，能够获得：

$$p(x) = \frac{h}{2\pi} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)} \quad \dots(4.35)$$

最终得到的周期 $\delta$ 函数的插值函数为周期sinc函数 $S_N$ ：

$$S_N(x) = \frac{\sin(\pi x/h)}{(2\pi/h)\tan(x/2)} \quad \dots(4.36)$$

若将区间 $[0, 2\pi]$ 上的序列 $m_1, m_2, \dots, m_N$ 写为周期 $\delta$ 函数的线性叠加, 即:

$$m_j = \sum_{n=1}^N m_n \delta_{j-n} \quad \dots(4.37)$$

那么, 将其中的周期 $\delta$ 函数替换为周期 sinc 函数 $S_N$ , 就得到序列 $m_1, m_2, \dots, m_N$

的插值函数 $p(x)$ :

$$p(x) = \sum_{n=1}^N m_n S_N(x - x_n) \quad \dots(4.38)$$

这里 $p(x)$ 就是 $S_N$ 的线性组合, 如果用 $p(x)$ 来估算序列 $m_1, m_2, \dots, m_N$ 在 $x_j = jh$ 处的一阶导数, 则有:

$$p'(x_j) = \sum_{n=1}^N m_n S'_N(x_j - x_n) \quad \dots(4.39)$$

式中 $x_j - x_n = (j-n)h$ , 将式(4.39)写为矩阵形式有:

$$\begin{pmatrix} p'(x_1) \\ p'(x_2) \\ p'(x_3) \\ \vdots \\ p'(x_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S'_N(0) & S'_N(-h) & S'_N(-2h) & \cdots & S'_N(-(1-N)h) \\ S'_N(h) & S'_N(0) & S'_N(-h) & & \\ S'_N(2h) & S'_N(h) & S'_N(0) & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ S'_N((N-1)h) & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_N \end{pmatrix} \quad \dots(4.40)$$

因此只需在向量 $(m_1, m_2, \dots, m_N)^T$ 上乘以一个 $N$ 阶方阵即可得到由它的谱方法插值函数 $p(x)$ 的导数组成的向量 $(p'(x_1), p'(x_2), \dots, p'(x_N))^T$ , 这个 $N$ 阶方阵就是谱求导矩阵(spectral differentiation matrix)。这里用 $D_N$ 表示一阶 $N \times N$ 谱求导矩阵,  $D_N^{(n)}$ 表示 $n$ 阶 $N \times N$ 谱求导矩阵。

这里不进行推导, 直接给出 $n$ 阶 $N \times N$ 谱求导矩阵计算方法:

(1) 计算周期 sinc 函数 $S_N(x)$ 在 $x_j = jh$ 处的 $n$ 阶导数 $S_N^{(n)}(x_j)$ 。

(2)  $D_N^{(n)}$  的第一列为  $(S_N^{(n)}(x_N), S_N^{(n)}(x_1), S_N^{(n)}(x_2) \dots S_N^{(n)}(x_{N-1}))^T$ ,  
 第二列为  $(S_N^{(n)}(x_{N-1}), S_N^{(n)}(x_N), S_N^{(n)}(x_1), S_N^{(n)}(x_2) \dots S_N^{(n)}(x_{N-2}))^T$ ,  
 第三列为  $(S_N^{(n)}(x_{N-2}), S_N^{(n)}(x_{N-1}), S_N^{(n)}(x_N), S_N^{(n)}(x_1), S_N^{(n)}(x_2) \dots S_N^{(n)}(x_{N-3}))^T$ , 依此类推。

此外周期函数  $S_N^{(n)}(x_j)$  的奇偶性是由  $n$  的奇偶性决定的, 这在构造  $D_N^{(n)}$  时可以利用产生一定的便利:

$$\left. \frac{\partial^n S_N(x)}{\partial x^n} \right|_{x=x_j} = (-1)^n \left. \frac{\partial^n S_N(x)}{\partial x^n} \right|_{x=x_{N-j}} \quad \dots(4.41)$$

当  $n$  为奇数时, 必有:

$$\left. \frac{\partial^n S_N(x)}{\partial x^n} \right|_{x=x_j} = 0 \quad \dots(4.42)$$

当  $n$  为偶数时,  $S_N^{(n)}(x_j)$  在  $x=x_j$  处 ( $j \% N = 0$ ) 的取值是无穷小/无穷小的形式, 需要用洛必达法则求其极限, 即:

$$\left. \frac{\partial^n S_N(x)}{\partial x^n} \right|_{x=x_j} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial^n S_N(x)}{\partial x^n}, \quad j \% N = 0 \quad \dots(4.43)$$

由于谱求导矩阵是  $D_N^{(n)}$  是在计算区间长度为  $2\pi$  的前提下进行构造的, 因此如实际的计算区间长度为  $L$ , 则必须在  $D_N^{(n)}$  上乘以缩放系数才可保证结果是正确的, 即:  $(2\pi/L)^n D_N^{(n)}$ 。

#### 4.4.4 利用谱求导矩阵求解 Monge-Ampère 方程

获得傅里叶谱求导矩阵后, 可对所得的 Monge-Ampère 方程(4.15)和(4.22)进行处理, 谱求导矩阵对偏微分方程的微分项进行处理参考式(3.37)、式(3.38)和式(3.39)。

需要注意的是, 傅里叶谱方法隐含周期性边界条件, 以序列  $m_1, m_2, \dots, m_N$  为例, 在周期性边界条件作用下, 可等效认为  $m_{nN+j} = m_j$ , 也就是说一端边界处的函数

值会对另一端边界处的函数值产生影响。为消除这种影响,需要对模型进行特殊处理,采用谱求导矩阵处理方程,中心点满足 Monge-Ampère 方程,边界点采用有限差分法处理,满足边界条件,这样即可保证整体解的精度,又可摆脱傅里叶谱方法周期性的影响。

按上述方法对模型进行处理,可得  $N \times N$  个非线性方程,解所得非线性方程组可获得 Monge-Ampère 方程的解,进而获得光源出射与目标辐照之间的映射关系,构建自由曲面照明光学系统实现所得映射关系,即可完成整体系统设计。

为了验证上述设计方法的有效性,本课题设计了两个典型的自由曲面照明光学系统,一为具有复杂辐照输出的光学系统,二为具有高能量利用率特性的光学系统,并采用仿真分析结合实验验证的方法对所得系统进行评价。

## 4.5 复杂辐照输出自由曲面照明光学系统设计

### 4.5.1 光学系统设置

光源采用具有朗博体发光特性的 LED,位于整体系统坐标系原点;自由曲面采用透射式,内部为球面,外部为自由曲面,如图 4.3 所示。目标辐照面位于坐标系 Z 轴正向距光源 600mm 处且与光轴垂直,光源发出的光经自由曲面偏折后到达目标辐照面,形成 360mm×360mm 的方形辐照区域,内有“A”字型的辐照光斑,光斑与背景之间的辐照强度比值为 2:1,整体光学系统示意如图 4.4 所示。

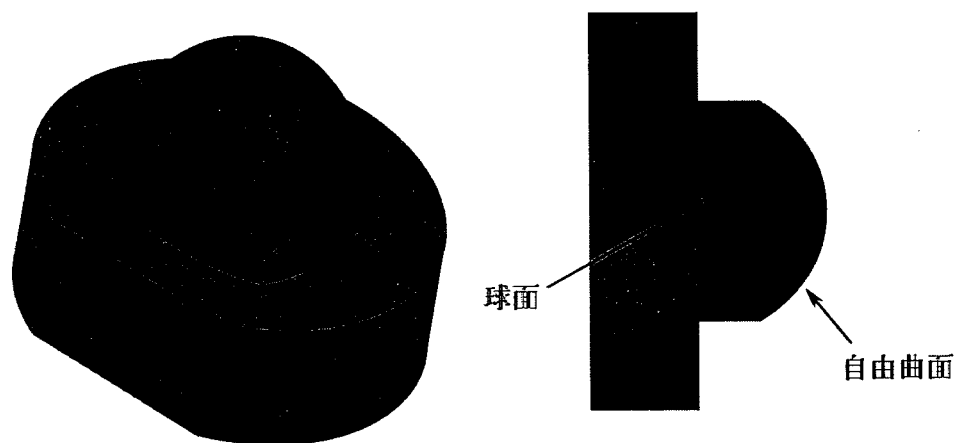


图 4.3 自由曲面模型



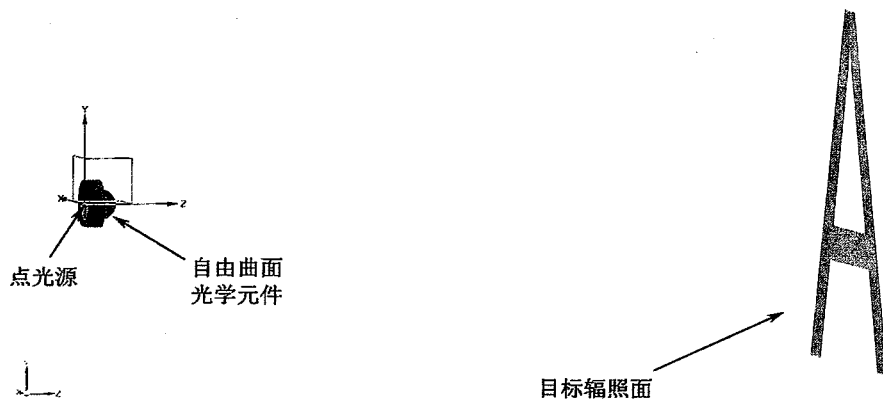


图 4.4 透射式自由曲面照明光学系统

#### 4.5.2 设计计算

鉴于系统数学模型为强非线性二阶偏微分方程，方程计算难以收敛，为了保证计算过程稳定性，方程处理后共分三个部分：

- 1) 内部节点非线性方程组，由傅里叶谱求导矩阵对方程进行处理所得；
- 2) 边界条件采用有限差分法进行处理，可避免傅里叶谱方法暗含的周期性对计算结果产生影响；
- 3) 稳定性附加项，该项为防止计算过程中出现奇异性而增加的惩罚函数，具体为映射旋度。

在计算过程中，三部分分别赋予不同权重，计算过程分为两步，第一步计算目的在于形成所需辐照区域形状，其中稳定性附加项和边界条件给予较大权重，当获得所需的辐照形状之后，进行第二步的计算，内部节点的非线性方程组部分给予较大权重，这是在保证辐照形状的基础上，获得最佳辐照输出效果。

#### 4.5.3 设计结果

根据以上设定对系统方程进行计算，模型采用从光源到目标的映射，即公式(4.15)，并以光源到目标辐照面之间的距离为 1 对整体系统进行归一化，计算电脑配置 CPU 为酷睿 i7 5500U，双核 2.4GHz 的频率，8G 内存，计算网格采用  $64 \times 64$ ，计算误差设置为  $10^{-6}$ 。在计算过程中，系统在 28 分钟左右收敛到了预期的结果，获得了光源到目标面之间的映射关系，如图 4.5 所示：

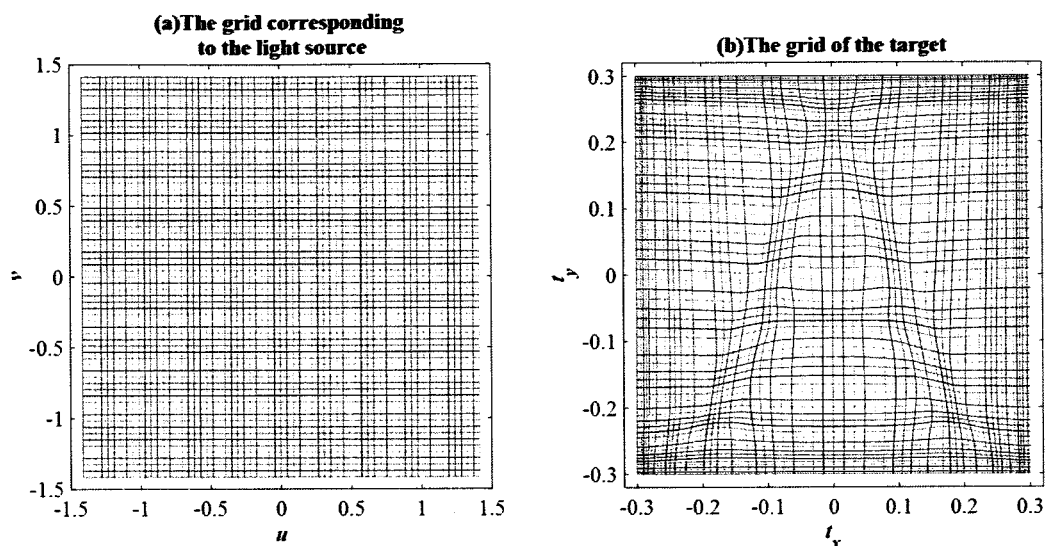


图 4.5 计算所得的光源与目标面之间的映射关系

#### 4.5.4 自由曲面照明光学系统的构建

图 4.5 所示光源输出到目标辐照的映射关联式(4.11)，鉴于式(4.11)包含虚拟自由曲面参数，需搭建实际自由曲面照明光学系统，获得光源出射与目标辐照之间的对应关系实现所得映射，透射式自由曲面照明光学系统光源出射与目标辐照之间的对应关系表达式参考附录 A，其具有式(3.17)和(3.18)所示形式。

需要注意的是，附录 A 中的对应关系模型与式(4.11)并不完全等价，仅能实现对图 4.5 所示映射关系的逼近，逼近误差如图 4.6 所示。

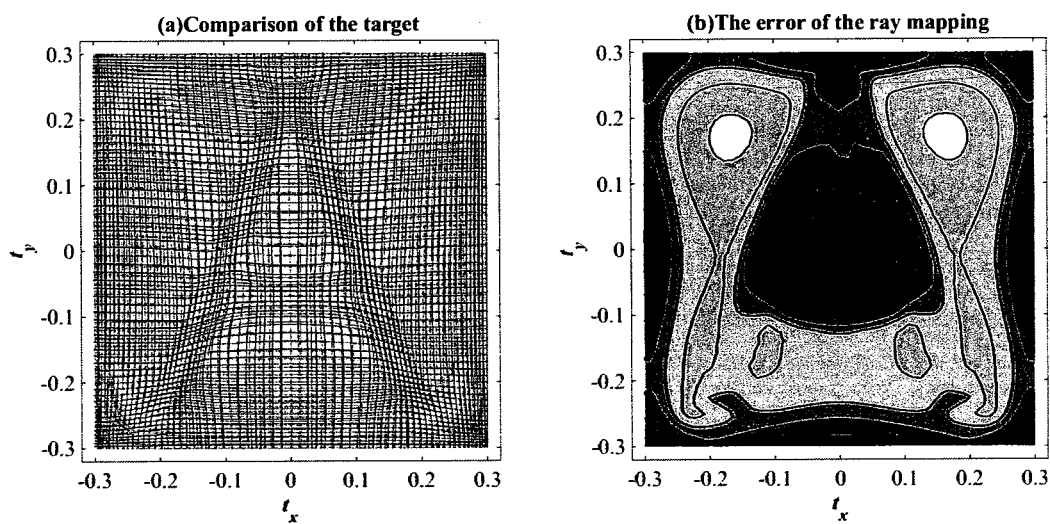


图 4.6 映射误差示意图

图 4.6 映射误差显示，所构建的自由曲面光学系统模型基本实现了预期辐照

的网格分布, 仅在局部存在小幅误差。根据所实现的映射关系, 获得实际自由曲面参数信息, 采用缝合 NURBS 曲面片法<sup>[47]</sup>构建自由曲面, 如图 4.7 所示。鉴于自由曲面照明光学系统数学模型内含映射可积性, 所得自由曲面光滑连续, 这在图 4.7 中有所体现。为探究自由曲面面型信息, 采用双五次多项式对自由曲面面型进行拟合, 计算自由曲面与拟合曲面的矢径误差, 所得结果如图 4.8 所示。

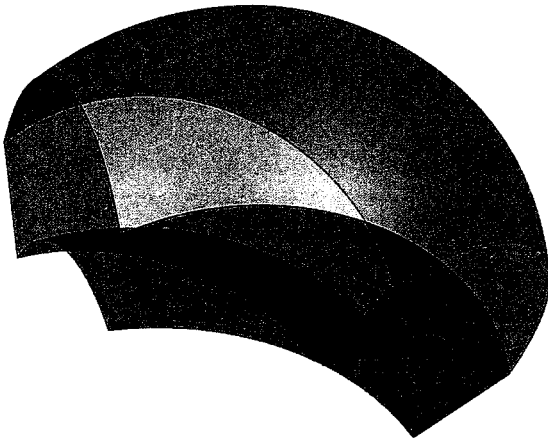


图 4.7 实际构建的自由曲面模型

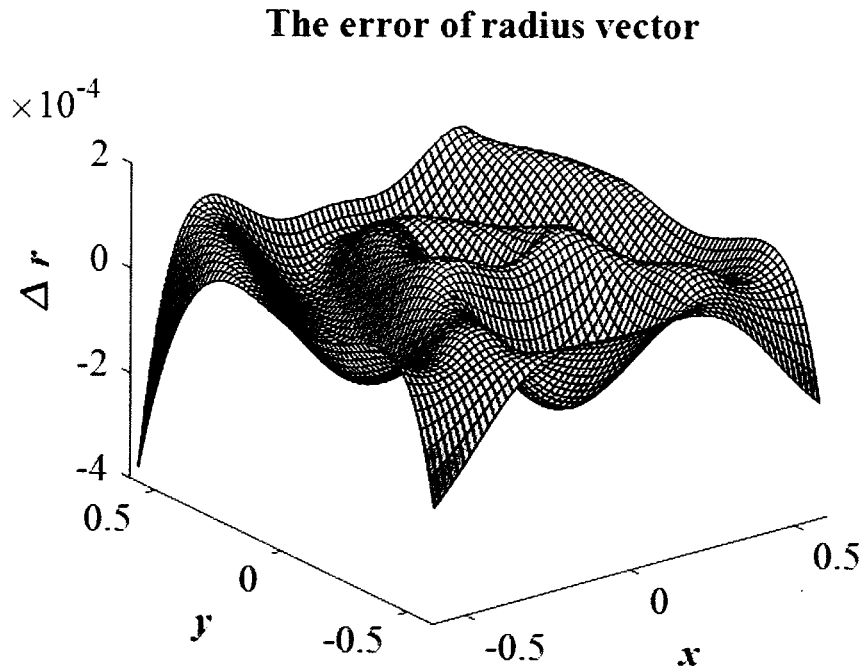


图 4.8 透镜矢径信息

根据图 4.7 的自由曲面模型和图 4.8 所示的自由曲面矢径信息, 曲面面型具有“A”字型特性, 基于该模型, 引入光源和目标辐照面, 构建整体自由曲面照明光学系统, 如图 4.9 所示。

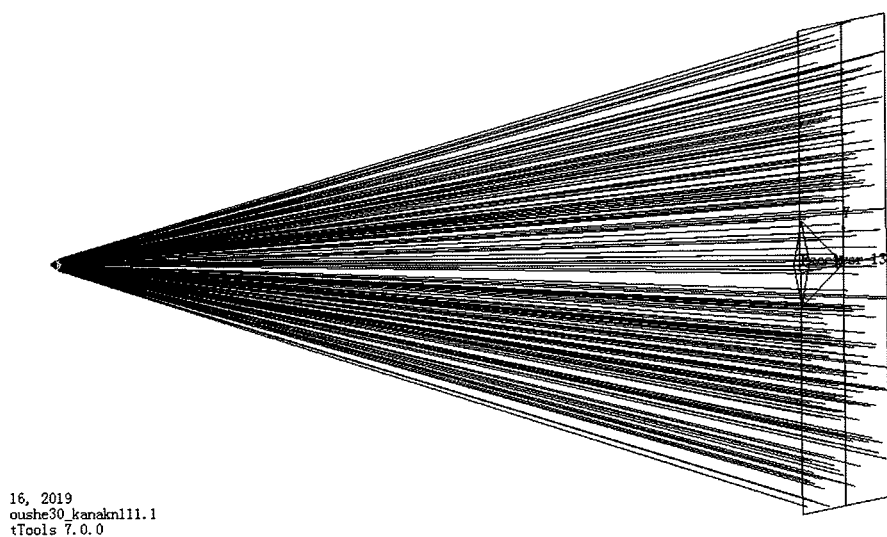


图 4.9 透射式自由曲面照明光学系统

#### 4.5.5 仿真分析

根据图 4.9 所示透射式自由曲面照明光学系统, 追迹 500 万条光线, 获得图 4.10 所示的辐照输出, 将仿真分析所得辐照输出与预期辐照输出进行对比, 获得图 4.11 所示的辐照误差图。

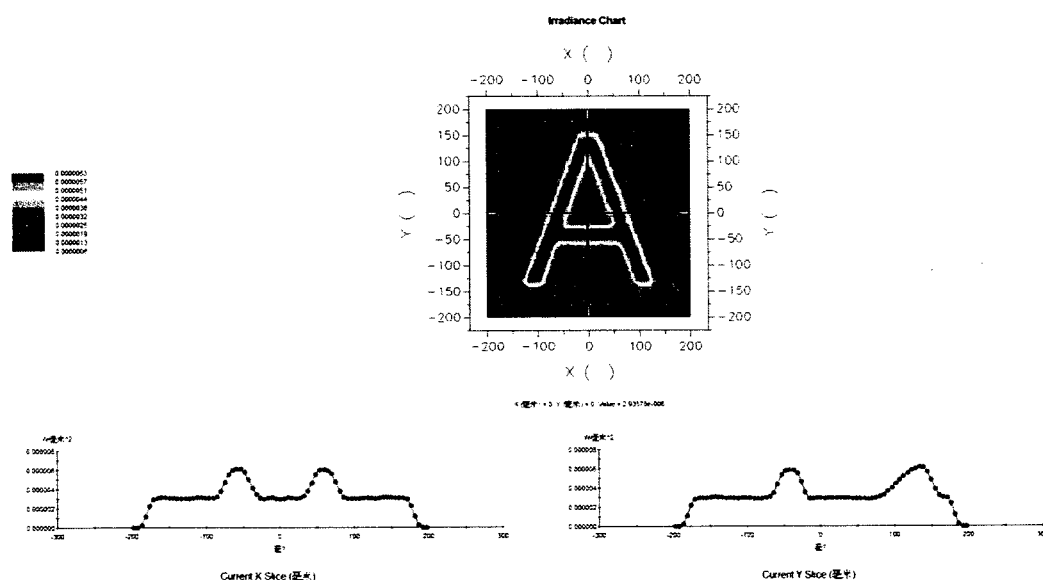


图 4.10 透射式自由曲面照明光学系统辐照输出

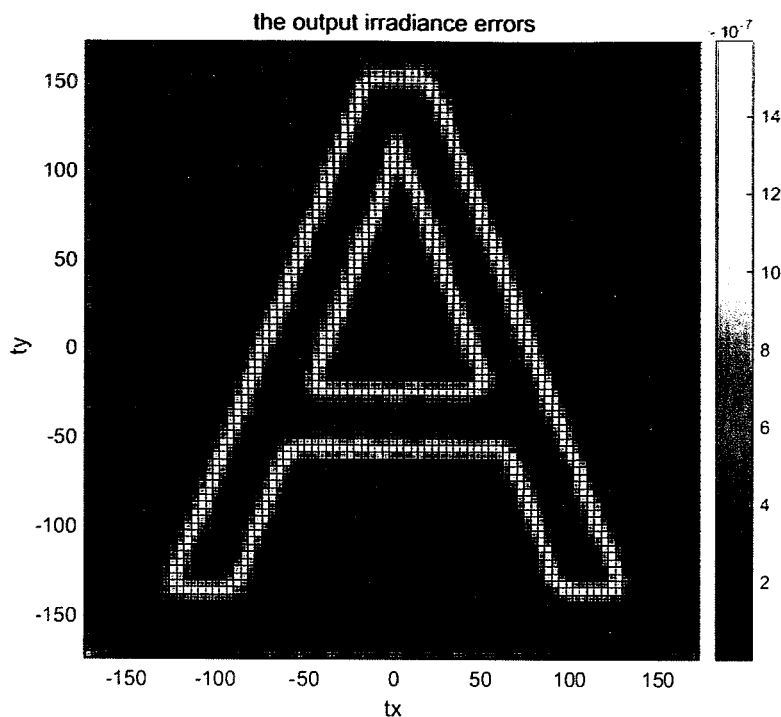


图 4.11 仿真分析辐照输出误差图

图 4.10 和图 4.11 所示的辐照输出及其输出误差显示,所构建的透射式自由曲面照明光学系统在目标辐照面上实现了“A”字型辐照输出。对仿真分析结果进行处理,能够获得“A”型的辐照输出和辐照背景之间的比例为 2.02:1,这与预期 2:1 辐照比相符。采用辐照输出数据的 relative root-mean-square deviation(RRMSD)对辐照输出进行评价,评价函数定义为:

$$RRMSD = \sqrt{\sum (L_{out} - L_{desired})^2 / \sum L_{desired}^2} \quad (4.44)$$

经计算,辐照输出的 RRMSD 大小为 1.84%,结果令人满意。当然,辐照输出还存在进步空间:1) 辐照输出边缘不够锐利;2) 字母“A”以及背景自身的均匀度还有待提升。边缘不够锐利归因于所取离散点数量不足,后者则因为所得映射存在误差。设计所得的自由曲面模型还可作为实际自由曲面照明光学系统数学模型的初值,即形如式(3.25)数学模型进行进一步设计优化。

#### 4.5.6 实验验证

为进一步确认上述光学设计的正确性,搭建实验平台对所设计的光学系统进行实验验证,首先加工图 4.7 所示自由曲面模型,为给予自由曲面加工和实验装

调基准,对模型进行修正,采用 Moore Nanotech 250UPL 精密单点金刚石加工中心对修正后模型进行加工,所得元件如图 4.12 所示,鉴于所设计自由曲面模型的光滑连续性,曲面加工情况良好,未出现瑕疵。

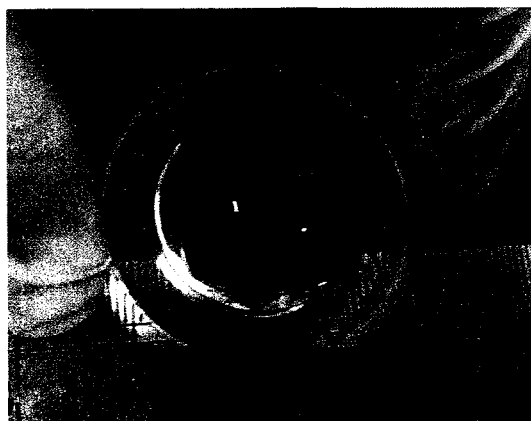


图 4.12 加工所得的自由曲面透镜模型

采用 Zygo NewView 6300-Demo 对所加工的自由曲面进行检测,测量所得曲面透镜顶点附近的粗糙度,所得结果如图 4.13 所示,其中  $Ra = 49.26\text{nm}$ , 满足使用要求。

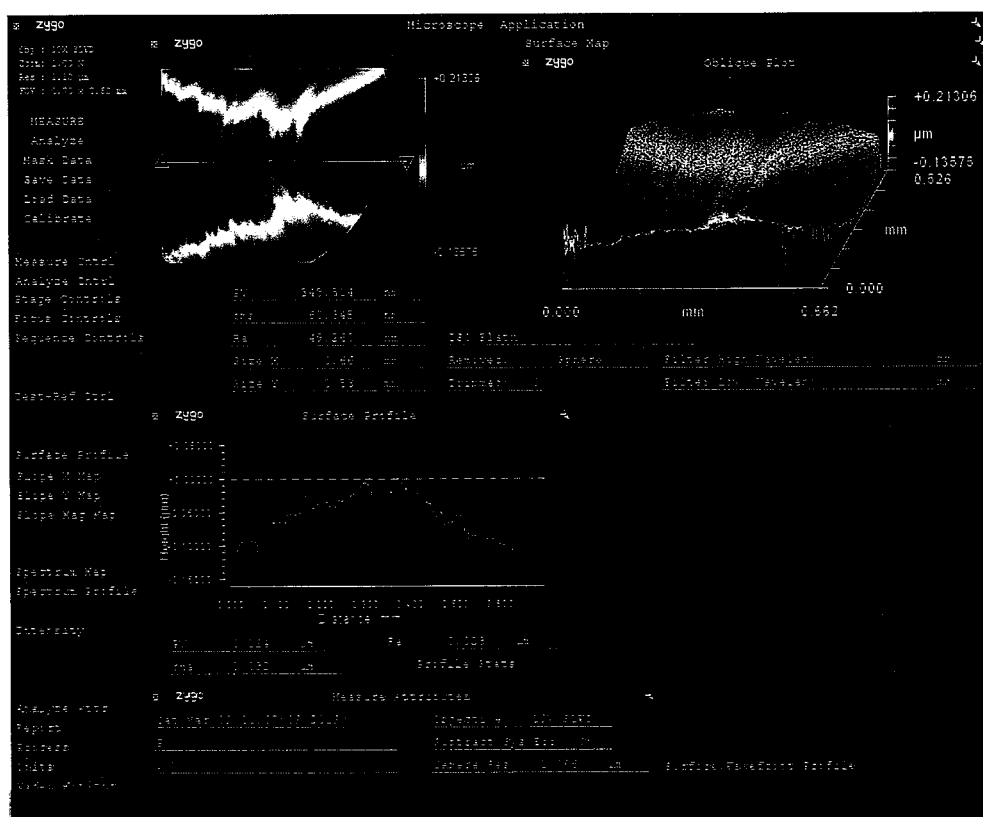


图 4.13 自由曲面透射镜粗糙度

基于所加工自由曲面模型,按照图 4.9 所示自由曲面照明光学系统搭建实验平台。光源选用飞利浦 LED 的 Lumileds 系列,型号选用 LXML-PM01-0090,一方面因为该 LED 光源较小,接近点光源;另外其发光特性与朗博体较为接近。光源出光颜色为绿色,实物如图 4.14 所示,所搭建的自由曲面照明光学系统实验平台如图 4.15 所示。

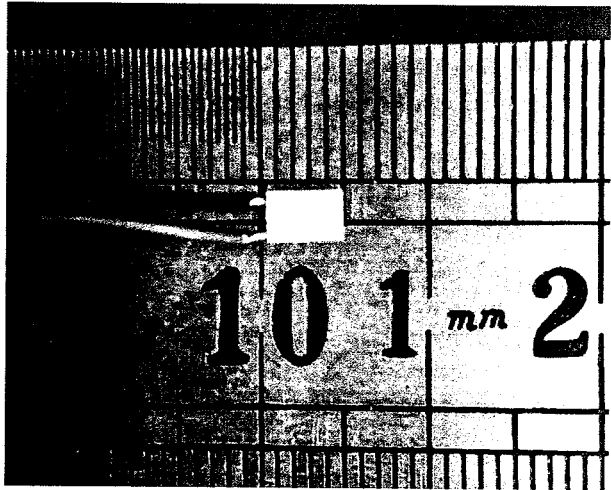


图 4.14 LED 光源实物图

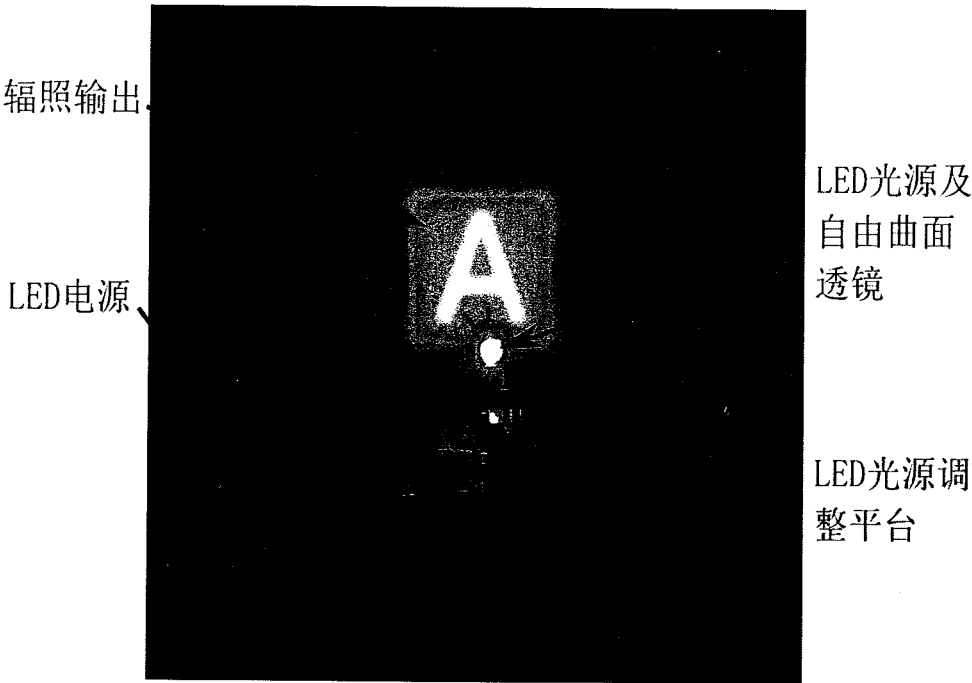


图 4.15 透射式自由曲面光学系统实验平台

平台搭建完成后进行光学装调,保证辐照距离下,主要工作就是调整光源与

自由曲面透镜之间的相对位置关系,将自由曲面固定在支撑架上,调整透射镜与辐照面平行,调整光源位置,使其处于与透镜合适的相对位置,如图 4.16 所示,能够获得如图 4.17 所示的辐照输出。

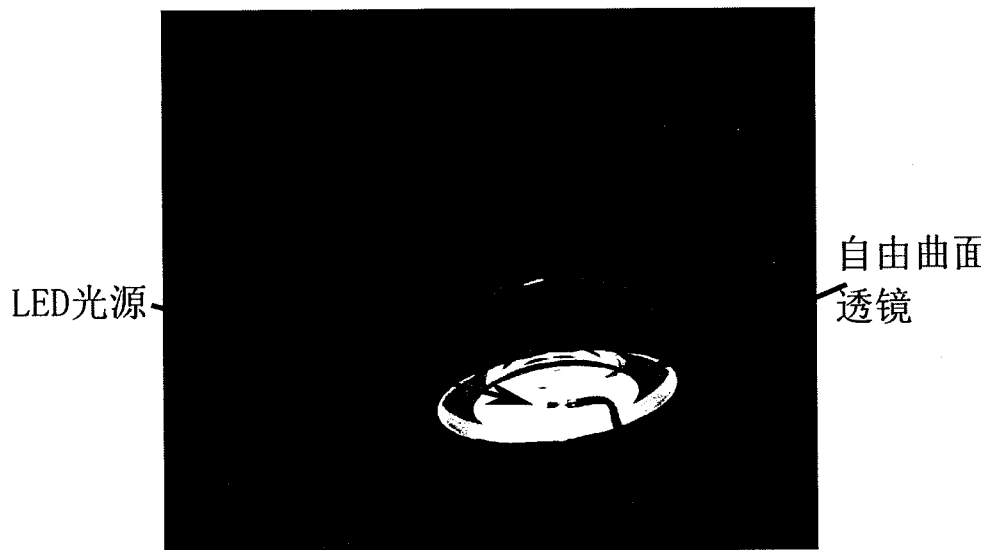


图 4.16 LED 光源与自由曲面相对位置关系

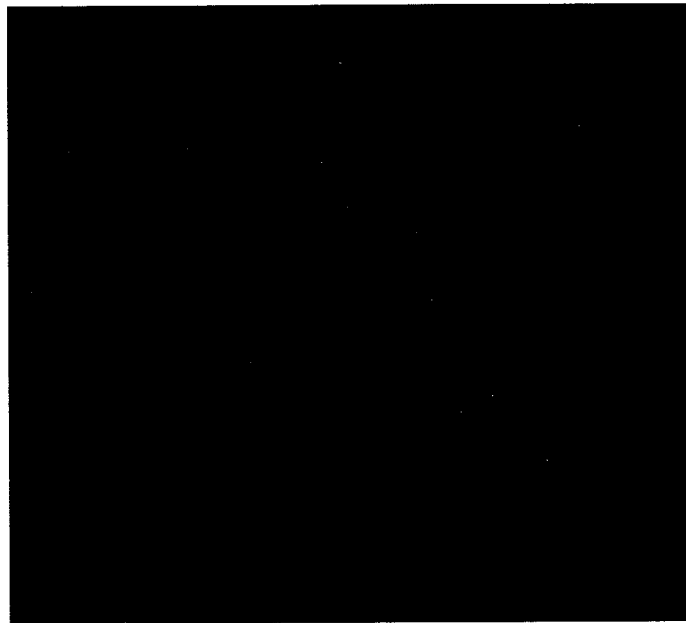


图 4.17 透射式自由曲面照明光学系统辐照输出

图 4.17 显示系统在预期辐照面上形成了形状和大小符合要求的辐照分布,实现了预期“A”字型辐照分布。采用标准太阳电池对辐照输出结果进行检测,并对结果进行整理,以背景辐照强度为基准进行归一化,形成如图 4.18 所示的输



出分布图。

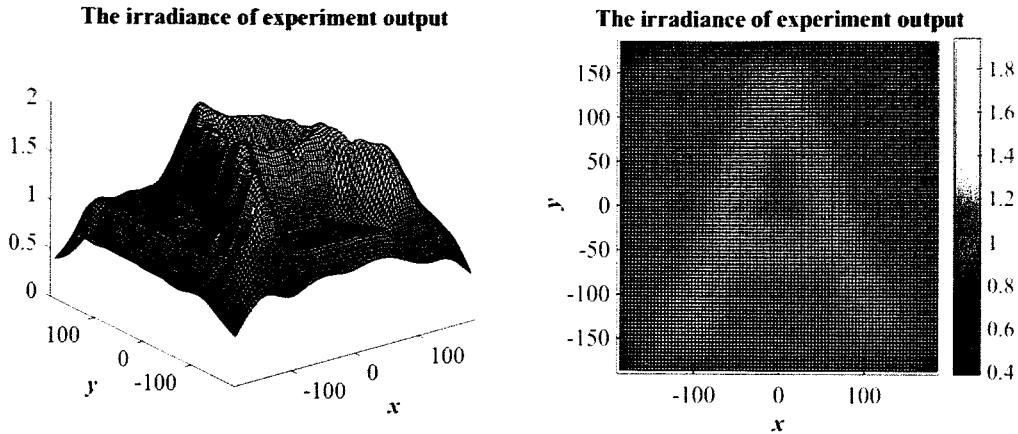


图 4.18 实验数据处理结果

图 4.18 结果显示，背景均匀度令人满意，“A”字形辐照分布的均匀度还有提升空间，所得的“A”字形的辐照分布形状与预期一致，辐照强度与背景之间比例约为 1.75:1，接近设计值。为了进一步验证自由曲面照明光学系统输出结果，选取  $y=0\text{mm}$  和  $y=150\text{mm}$  两处数据与仿真结果进行对比，如图 4.19 所示。

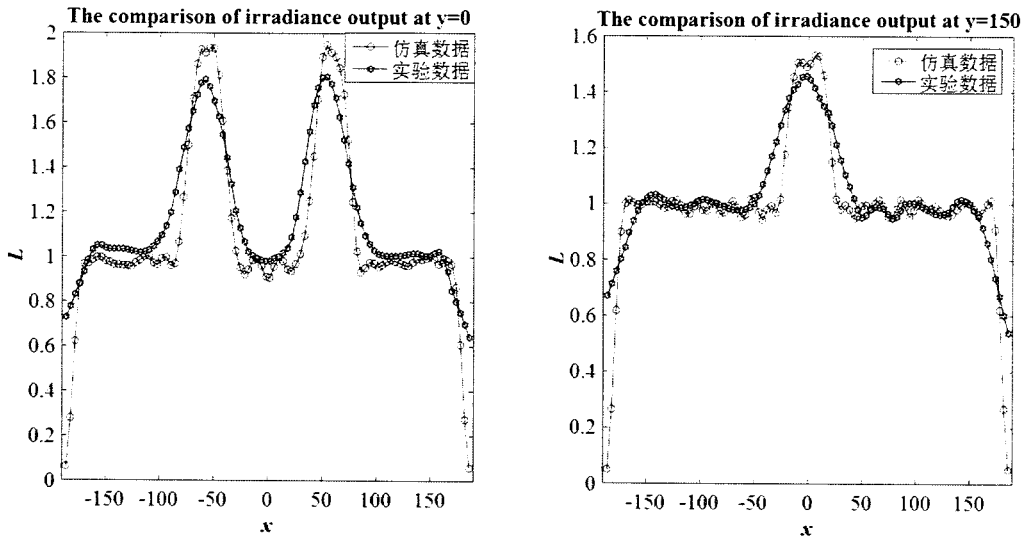


图 4.19 仿真与实验数据对比

图 4.19 所示仿真数据和实验数据的对比显示，实验结果较好的吻合了仿真结果，说明所设计的光学系统数据与预期相符。为进一步研究整体光学系统特性，测试不同位置辐照输出特性，以预期辐照面起始，分别测试距光源不同距离处的辐照输出特性，所得结果如图 4.20 所示；

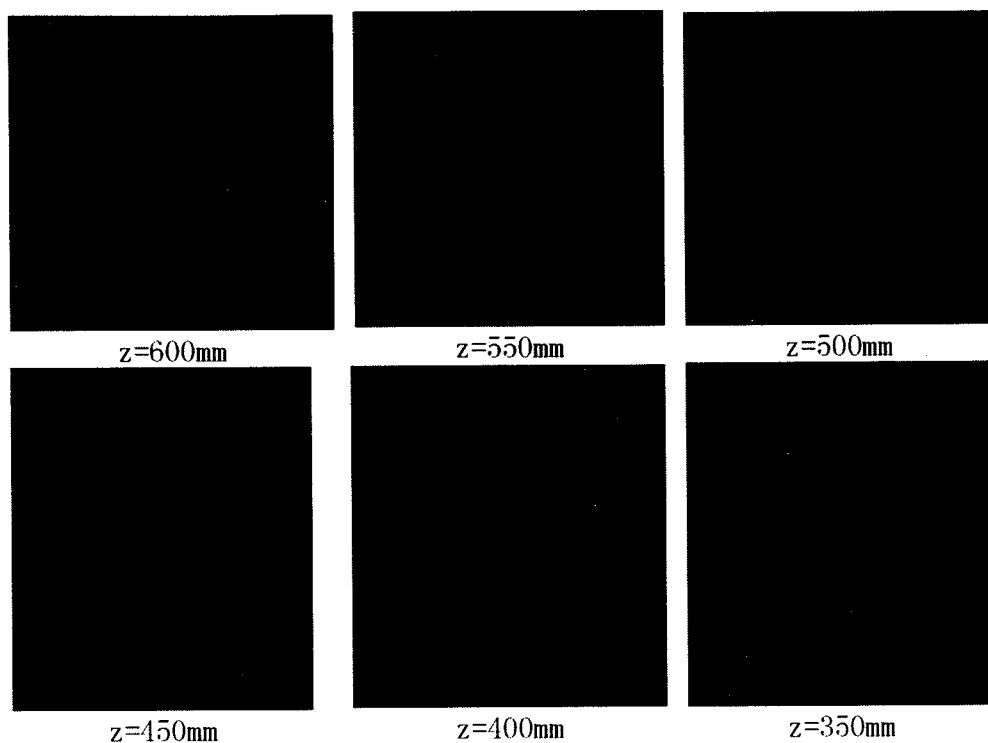
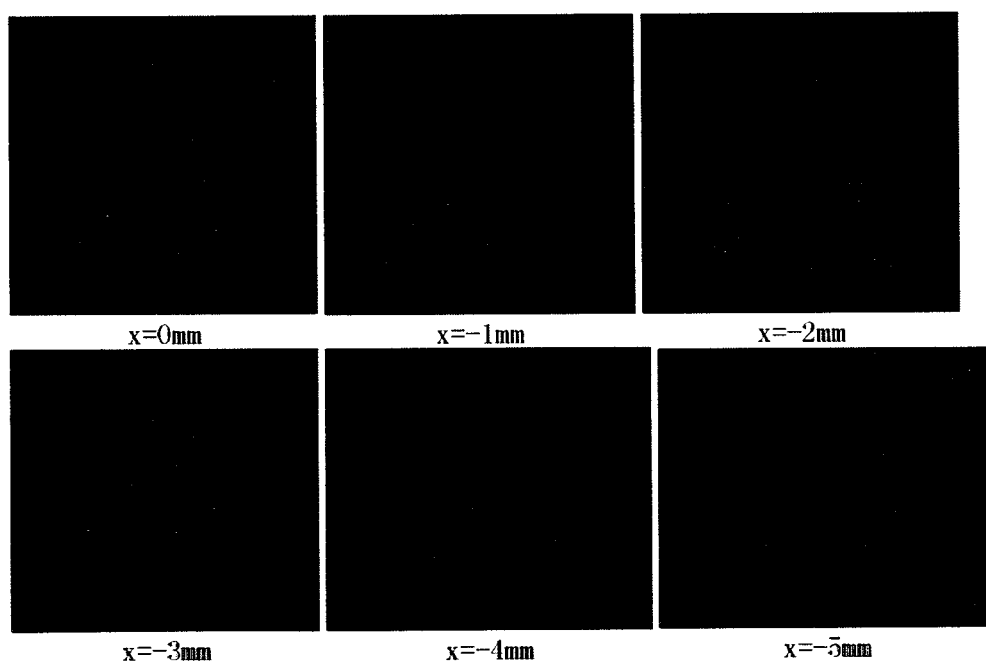


图 4.20 不同位置辐照输出情况

另外分别对光源进行  $x$  轴负向,  $z$  轴正向和  $z$  轴负向离焦, 探究光源不同方向离焦对预期辐照面上辐照输出的影响, 所得结果如图 4.21、图 4.22 和图 4.23 所示。

图 4.21 光源沿  $x$  轴负方向离焦对辐照输出的影响

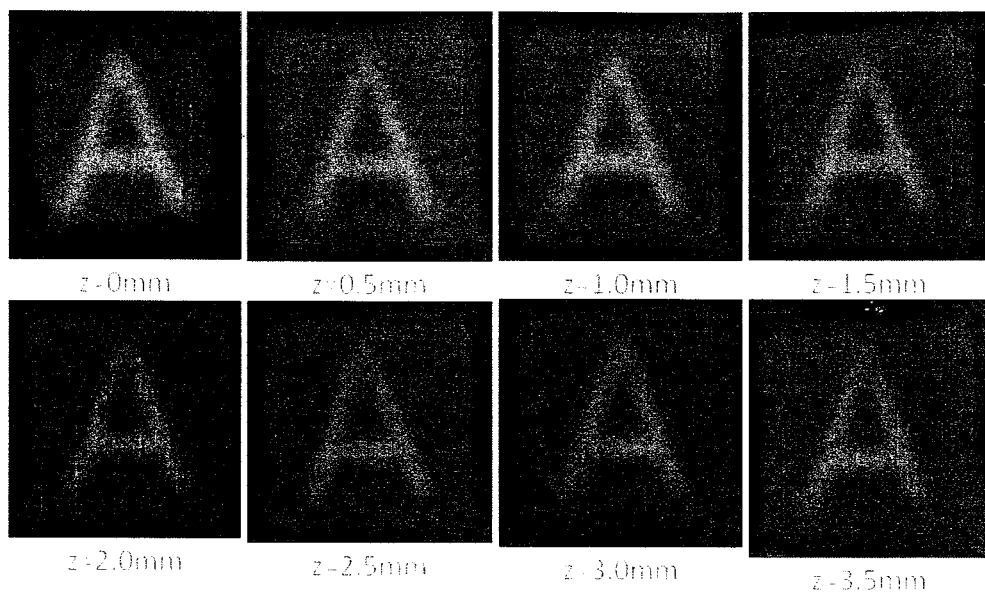


图 4.22 光源沿  $z$  轴正方向离焦对辐照输出的影响

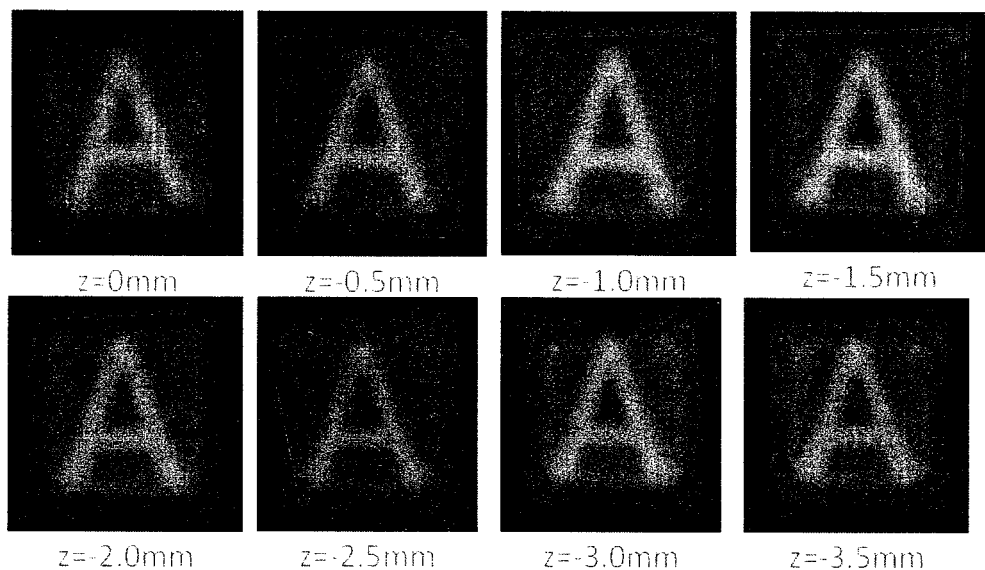


图 4.23 光源沿  $z$  轴负方向离焦对辐照输出的影响

图 4.20~图 4.23 辐照输出特性变化显示，当光源位于焦点位置，辐照面从预期辐照位置向光源方向移动时，整体辐照面在保持形状的情况下逐渐减小，辐照强度逐渐增大，边缘辐照强度有一定程度提升；当光源向  $x$  负向离焦时，辐照区域向  $x$  轴正向移动，上下两端移动速度比中心区域更高，导致辐照区域形状发生变化，同时辐照区域  $x$  轴负向边缘辐照强度增大， $x$  轴正向边缘辐照强度减小；当光源向  $z$  轴正向离焦时（光源逼近自由曲面），整体辐照面大小增大，形状保

持不变,辐照强度减小,当离焦量达到  $3.5\text{mm}$  时,辐照面已经达到了坐标纸大小,即  $500\text{mm}\times 500\text{mm}$ ;当光源向  $z$  轴负方向离焦时(光源远离自由曲面),整体辐照面大小减小,辐照强度增大,辐照面形状保持正方形不变,边缘辐照强度有一定程度的提升。这里需要强调的时,不管是不同辐照位置,还是光源向不同方向离焦,辐照面上始终保持“A”字形辐照,且较为清晰。

## 4.6 高能量利用率自由曲面照明光学系统设计

### 4.6.1 自由曲面照明光学系统能量利用率分析

自由曲面照明光学系统设计时,当采用投影法对光源出射光进行投影时,采样网格常为拓扑方形或拓扑长方形,但光源常具备旋转对称性,对应出射区域 $\Omega_0$ 为拓扑圆形,两者存在不匹配现象,通常有两种方法来处理,如图 4.24 所示。

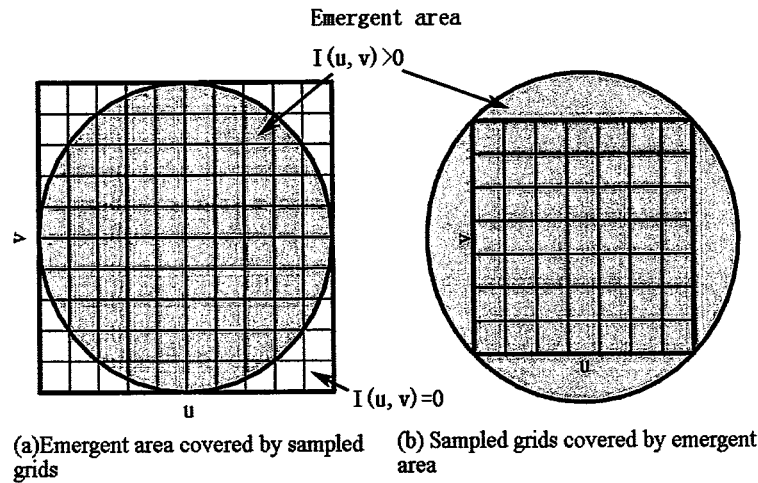


图 4.24 光源出射区域与离散网格的不匹配

图 4.24(a)所示方法为采样网格覆盖光源出射区域,此时光源出射区域内能量由光源发光特性确定,光源出射区域外的部分对应能量为 0,该情况可保证光源能量利用率最大化,但光源出射区域外的部分经自由曲面偏折后,在目标面上映射区域会收缩成线或点,这意味着在处理系统数学模型时存在奇异性,难以获得方程的解。图 4.24(b)所示的方法为光源出射区域覆盖离散网格,此时不存在方程解的奇异性,但会导致光源能量利用率不足。

根据能量守恒定律,当不考虑自由曲面照明光学系统能量的光路损失时,光

源出射能量与目标辐照能量相等,即光源出射能量经自由曲面照明光学系统偏折后全部到达目标辐照面上。在实际应用中,鉴于自由曲面照明光学系统所包含的光学元件较少,光路损失不大,光源的能量利用率就成为自由曲面照明光学系统整体能量利用率的决定性因素。

Ma 采用非均匀网格处理这类问题<sup>[80]</sup>,获得了不错的效果,但这种方法对光源的能量利用率还有提升空间。本课题采用不同方法来处理该问题,具体实施方式为:1)采用从目标辐照到光源出射的映射进行系统设计;2)边界条件为辐照输出区域边界与光源出射区域边界的映射;3)选定光源发光区域,设置其投影边界与映射区域边界匹配。在此基础上获得光学系统数学模型的解,可达到光源高光源能量利用率的目的。

该设置涉及从拓扑方形向拓扑圆形区域映射的问题,在 Monge-Ampère 方程中是非常难以解决的问题,是对本章所述设计方法易用性和灵活性的重大挑战。

#### 4.6.2 光学系统设置

采用具有朗博体发光特性的 LED 作为光源,设置光源位于整体自由曲面照明光学系统原点,具有半球发光区域;光学系统为反射式单自由曲面照明,即光源发出的光经自由曲面反射后到达目标辐照面,形成一个  $360\text{mm} \times 360\text{mm}$  大小的均匀方形辐照区域。目标辐照面位于光学系统坐标系  $z$  轴正向,距光源  $600\text{mm}$  且与  $z$  轴垂直,这里  $z$  轴与光学系统光轴重合。光学系统的设计目标为在实现目标辐照的前提下尽可能提升光源能量利用率,基本设置如图 4.25 所示:

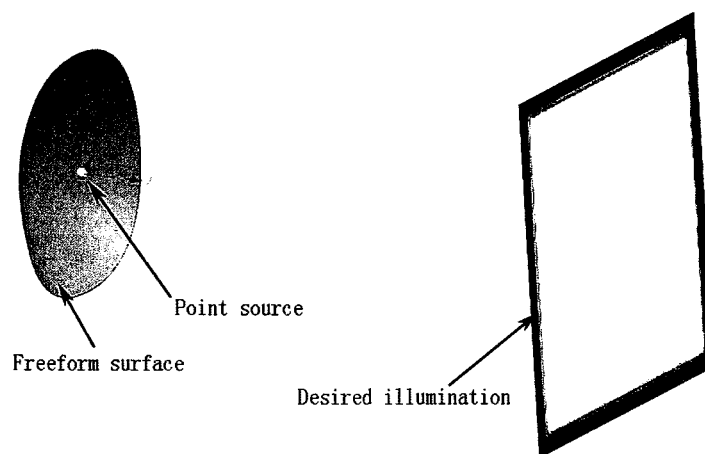


图 4.25 高能量利用率自由曲面照明光学系统设置

### 4.6.3 设计计算

设计计算与 4.5.2 小节的设置相同，同样包含了内部区域非线性方程组、边界条件和计算稳定性附加项，这里不在赘述。

### 4.6.4 设计结果

计算采用式(4.22)的数学模型，利用傅里叶谱求导矩阵对该模型进行处理，计算整体系统设置及计算机情况与 4.5.3 相同，以光源到目标辐照面之间的距离为 1 对光学系统进行归一化，计算所得的目标辐照区域到光源出射区域的映射关系如图 4.26 所示。

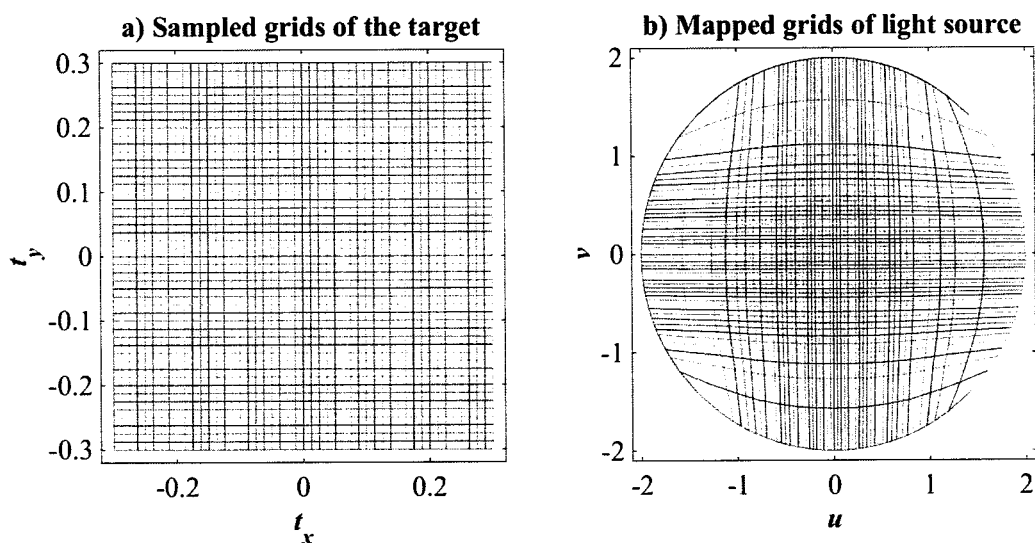


图 4.26 计算所得的目标辐照区域到光源出射区域的映射关系

图 4.26 显示，光源出射离散网格具备圆形特征，与光源出射区域形状匹配，有能力获得光源高能量利用率。但所得映射关系不能直接用于构建自由曲面模型，不仅因为方程的解为虚拟自由曲面参数，也因为自由曲面模型的构建常采用光源出射到目标辐照的映射。故对图 4.26 所示映射关系进行转换，为匹配光源出射区域拓扑圆形的特性，光源出射网格采用球坐标映射网格，所得光源出射区域到目标辐照区域映射关系如图 4.27 所示。

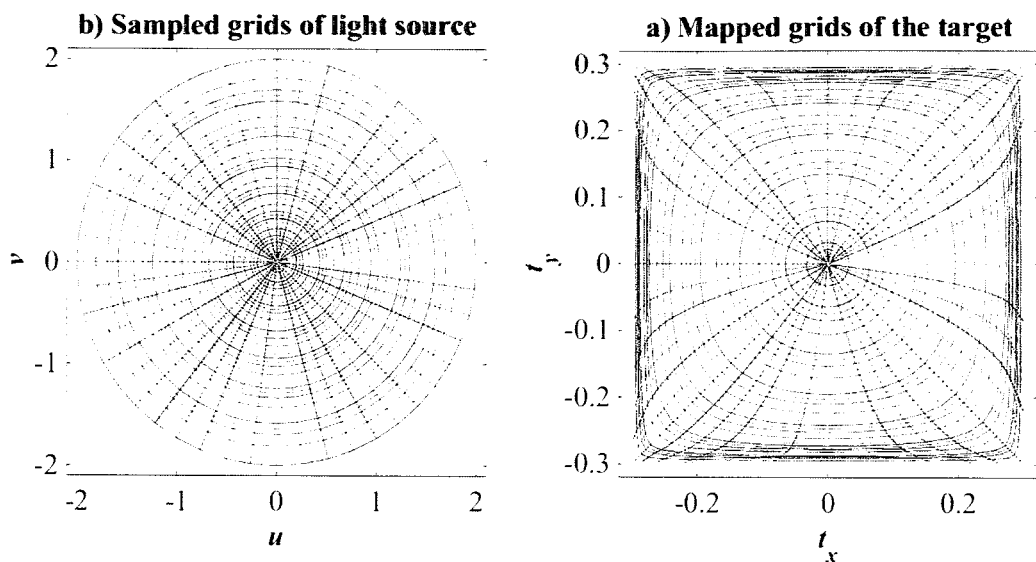


图 4.27 转换所得的光源到目标辐照之间的映射关系

#### 4.6.5 自由曲面照明光学系统构建

图 4.27 所示映射关联式(4.16), 但式(4.16)基于虚拟自由曲面参数。需搭建实际自由曲面照明光学系统, 根据所建光学系统的几何关系和光线传输定律, 获得目标辐照与光源出射之间的对应关系表达式, 其具有式(3.17)和(3.18)的形式。球坐标系下反射式自由曲面照明光学系统光源出射与目标辐照之间的对应关系表达式参考附录 B, 用以实现图 4.27 所示的映射关系。鉴于附录 B 中所描述的对对应关系表达式与式(4.16)并不完全等价, 仅能实现对图 4.27 映射关系的逼近, 逼近误差如图 4.28 所示:

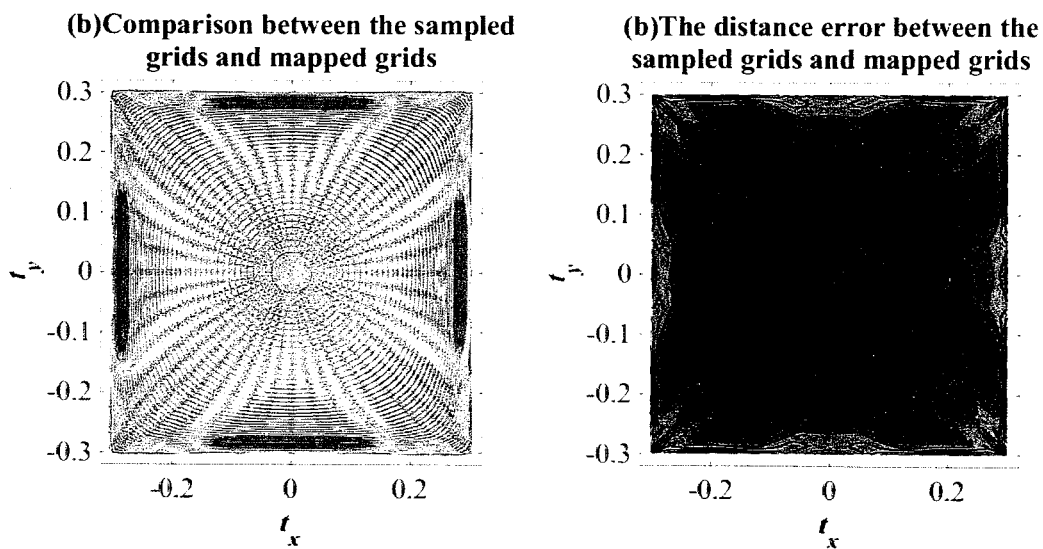


图 4.28 逼近误差

图 4.28 误差显示, 自由曲面照明光学系统模型基本实现了预期辐照网格分布, 仅在边缘处存在小幅误差, 根据所实现的映射关系, 获得实际自由曲面参数信息, 采用缝合 NURBS 曲面片法<sup>[47]</sup> 构建自由曲面模型, 如图 4.29 所示, 引入光源和目标辐照面, 构建整体自由曲面照明光学系统, 如图 4.30 所示。

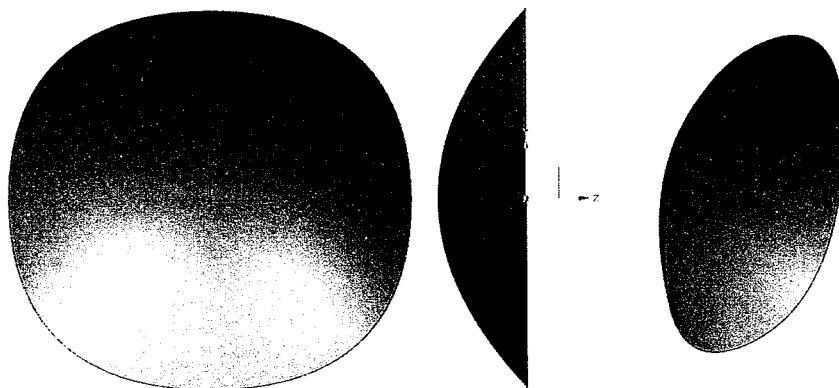


图 4.29 自由曲面模型

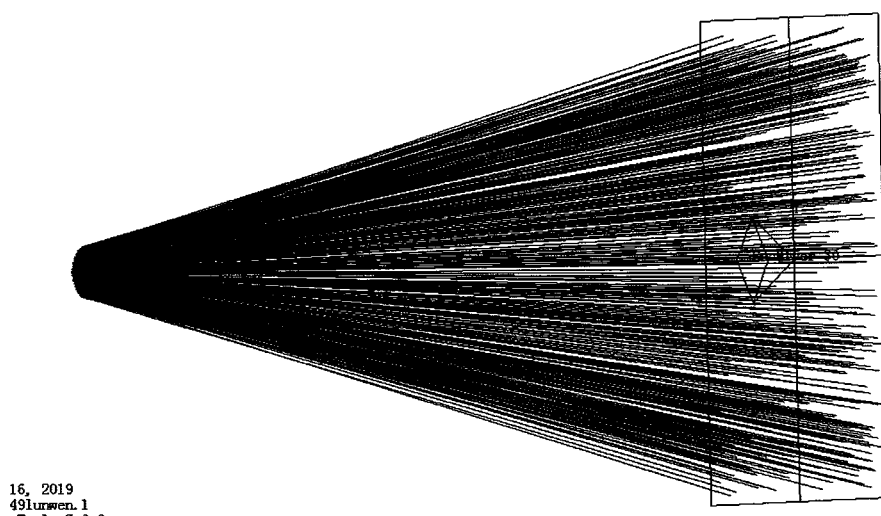


图 4.30 反射式自由曲面照明光学系统

图 4.29 显示, 自由曲面模型不仅具有光滑连续性, 且边缘为类圆形, 具有拓扑圆形的特性。对位于坐标原点的光源来说, 自由曲面完全包括了光源发光的半球区域, 因此自由曲面模型具备了实现光源高能量利用率的特性。

#### 4.6.6 仿真分析

对图 4.30 所示自由曲面照明光学系统进行仿真分析, 追迹 500 万条光线, 所得辐照输出结果如图 4.31 所示。



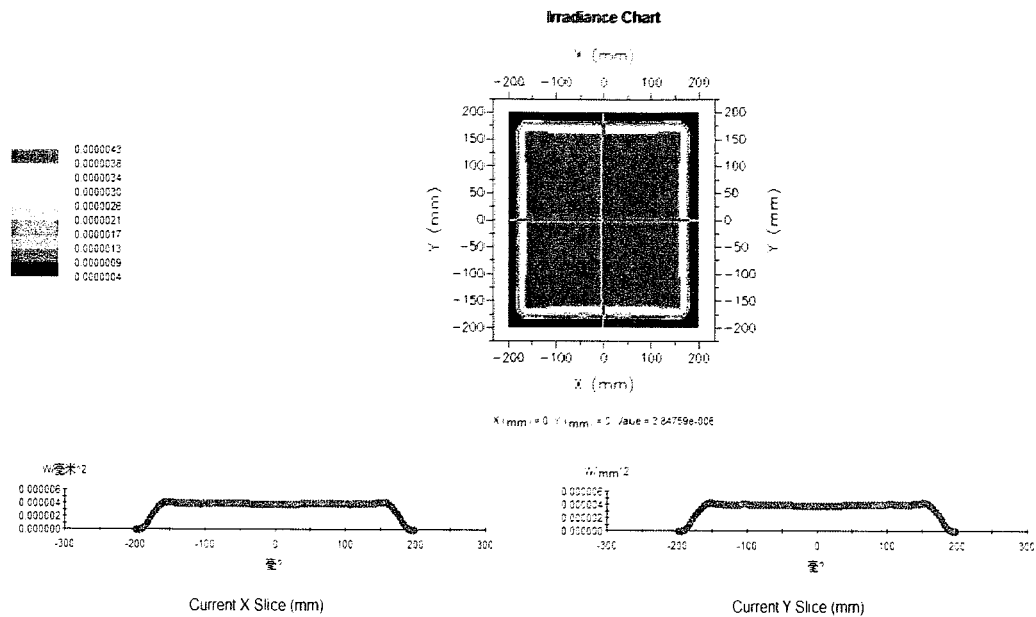


图 4.31 仿真分析结果

图 4.31 显示，自由曲面照明光学系统在目标辐照面上形成均匀方形辐照区域，且所得辐照输出的均匀度令人满意，但在边缘区域，辐照强度有一定程度下降，整体不够锐利。

为评价辐照面上的均匀度，采用式(3.43)计算辐照输出不均匀度，计算区域选取  $340\text{mm} \times 340\text{mm}$  的方形区域，辐照不均匀度计算结果为 5.78%，结果令人满意。

对于辐照区域边缘能量下降的问题，归因于两点，一为图 4.28 所示的逼近误差，二为蒙特卡洛追迹自身的特性，在仿真分析中，边缘处能量为常规值的 1/2。

在不考虑光路损失的情况下，即设置反射镜的反射率为 100%，目标辐照面上接收的能量等于光源出射总能量，此时光源出射能量经自由曲面偏折后全部到达目标辐照面，这样，整体系统拥有理论上 100% 的能量利用率，仿真结果显示，所构建自由曲面照明光学系统在目标面上的能量接收率为 99.8%，非常接近理论值。若将接收区域设置为  $360\text{mm} \times 360\text{mm}$ ，即在该区域内接收的能量为有效能量，对应的能量利用率为有效能量利用率，则整体光学系统的有效能量利用率能够达到 97.94%。

#### 4.6.7 实验验证

仿真分析获得了理想的输出效果,为进一步验证所设计的自由曲面照明光学系统,根据图 4.29 所示的自由曲面模型及图 4.30 所示的自由曲面照明光学系统搭建实验平台进行验证。

自由曲面模型具有光滑连续的特性,可加工性好,采用 Moore Nanotech 250UPL 精密单点金刚石加工中心对自由曲面反射镜进行加工,所得镜面如图 4.32 所示。

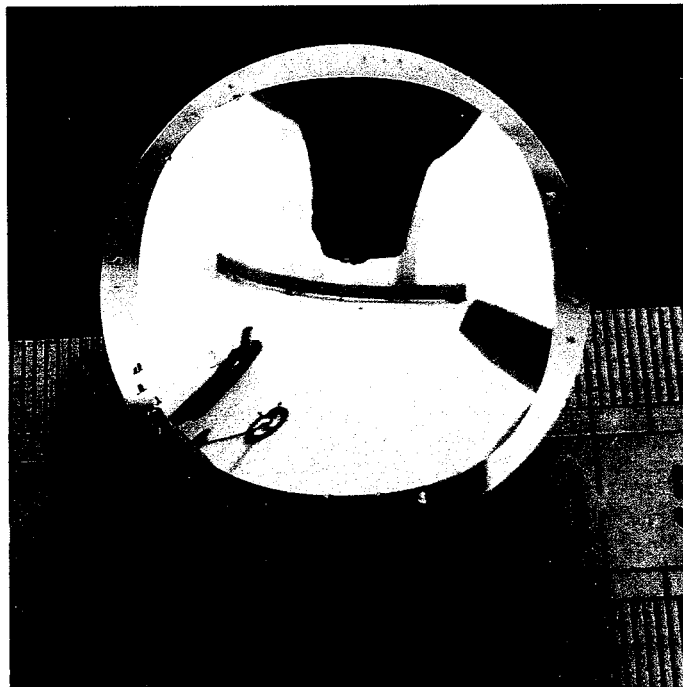


图 4.32 反射式自由曲面加工结果

采用 Zygo NewView 6300-Demo 对所加工的自由曲面面型进行检测,测量所得自由曲面反射镜顶点附近粗糙度如图 4.33 所示,其中  $Ra = 28.664nm$ , 满足使用要求。

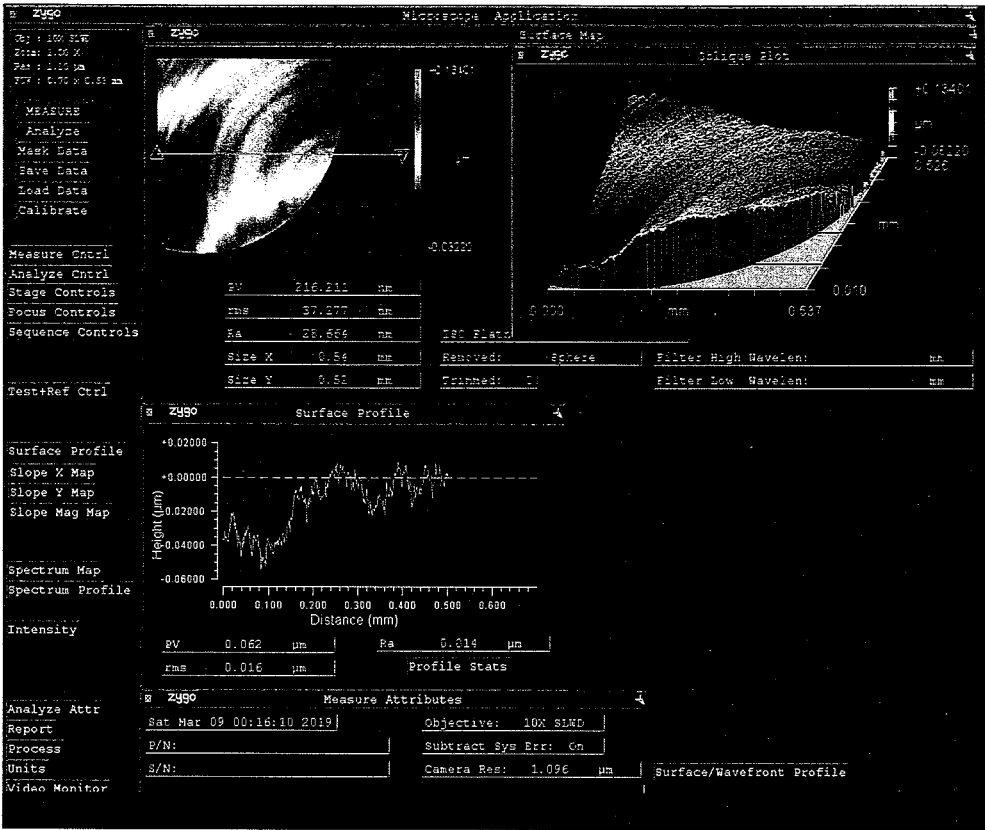


图 4.33 自由曲面顶点附近粗糙度测量结果

光源采用 Philips LED 中 Lumileds 系列，型号为 LXML-PM01-0090，一方面因为该 LED 发光区域小，接近点光源，另外其发光特性与朗博体较为接近，光源出光颜色为绿色，实物如图 4.34 所示。



图 4.34 LED 实物图

由于所设计的光学系统存在光源遮挡,为避免遮挡区域过大,未对光源作进一步处理,致使光源散热状况一般,实验中工作在适中功率,并未满功率运行。

根据图 4.30 所示光学系统搭建实验台,如图 4.35 所示,在保证光源位置与目标辐照面之间相对距离的前提下,对光源与自由曲面相对位置及位姿进行调节,光源与自由曲面相对位置关系如图 4.36 所示,采用坐标纸作为接收面,并在坐标纸上标记预期辐照区域,获得图 4.37 所示辐照输出效果。

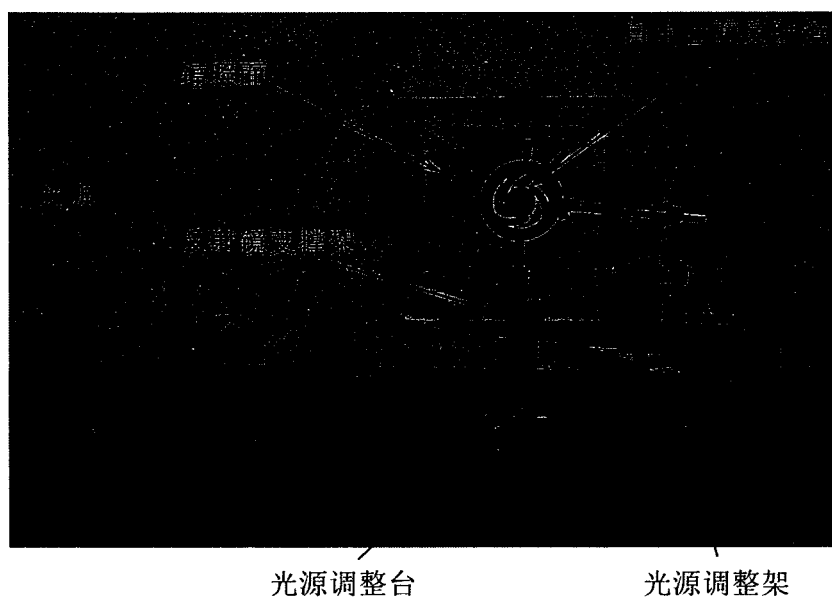


图 4.35 实验平台搭建

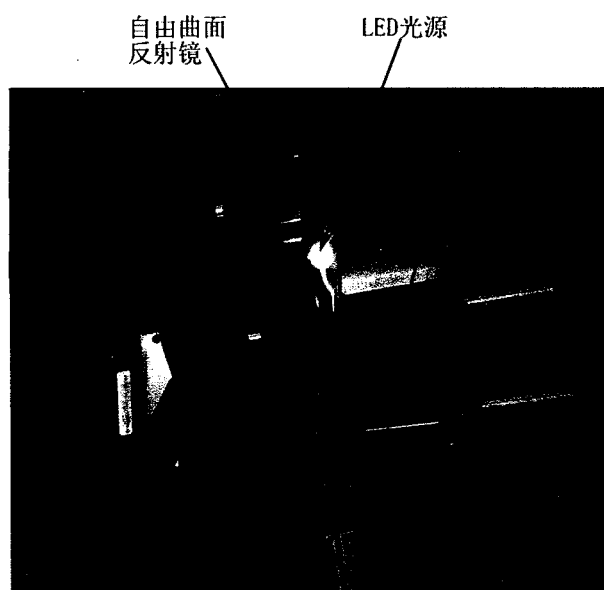


图 4.36 自由曲面与 LED 相对位置关系

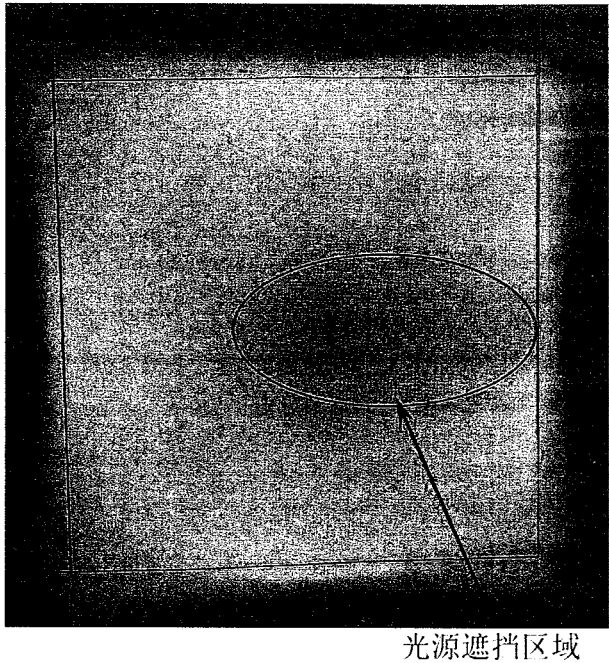


图 4.37 辐照输出效果

图 4.37 辐照输出效果显示，自由曲面照明光学系统在目标面上形成了预期大小的方形辐照光斑。鉴于系统光源的自身遮挡，辐照输出中心位置出现暗区。整体来说，辐照输出与预期结果保持一致，中心暗区与实际情况相符。为进一步探究辐照输出特性，采用标准太阳电池对辐照输出结果进行检测，并对结果进行整理，形成如图 4.38 所示的辐照强度分布图。

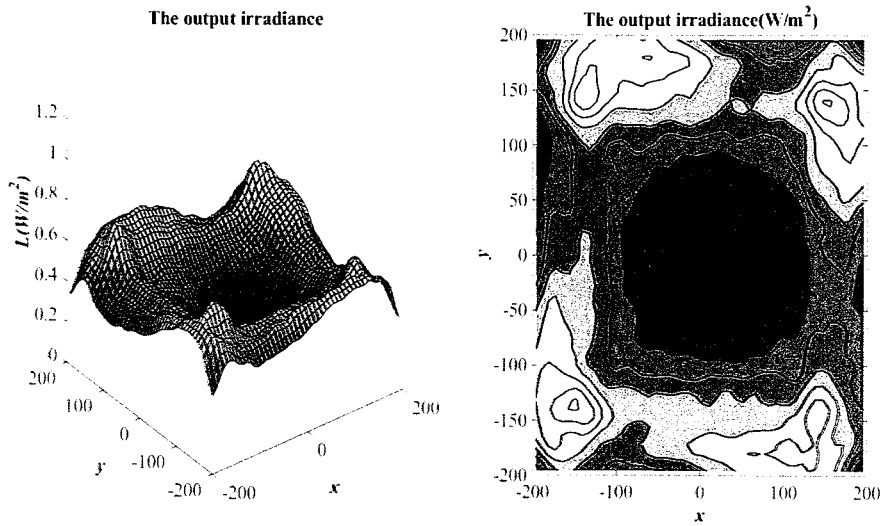


图 4.38 实验数据处理所得辐照强度分布图

将实验数据与仿真数据进行对比, 分别选取  $y=0\text{mm}$  与  $y=150\text{mm}$  辐照面上两条线数据进行对比, 所得结果如图 4.39 所示。

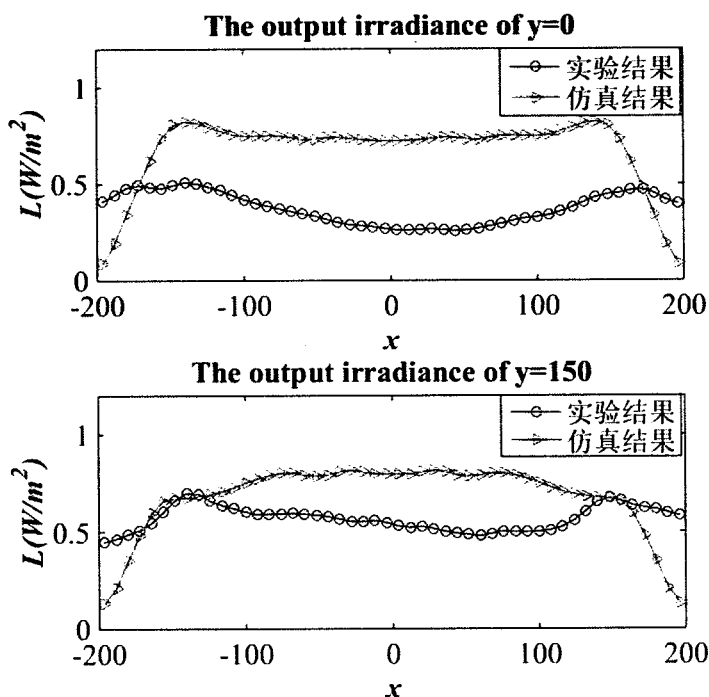


图 4.39 实验与仿真结果对比图

图 4.38 和图 4.39 实验结果显示, 辐照输出实现了预期方形辐照区域, 大小比预期略大。在均匀度方面, 受光源扩展性和自身遮挡的影响, 辐照输出中心区域出现阴影, 导致均匀度不高; 对目标面上所测数据进行积分, 获得系统有效能量利用率为 49.81%。这与理想情况有差距。

该现象与光学系统本身特性相关, 光学系统设置决定了自由曲面整体较浅, 光源的扩展性会对辐照输出产生较大影响: 1) 光源自身存在遮挡, 导致遮挡区域影响范围较大; 2) 光源扩展性导致部分光线落在预期辐照区域之外, 整体辐照强度降低; 3) 仿真分析中设置反射率较高, 加工所得镜面反射率未达预期。

光源扩展性对辐照输出的影响, 根据以往设计经验, 当光源自身大小与光源与自由曲面距离比值在 1:3 以上时, 光源扩展性对辐照输出影响非常大; 当此比值在 1:10 以下时, 光源扩展性对辐照输出的影响很小, 当介于 1:3~1:10 时, 扩展光源会对辐照输出产生影响, 比值越小, 产生影响越小。鉴于本课题加工经费较少, 仅能设计和加工较小的自由曲面反射镜, 光源大小与距离的比值约为

1:1.5, 因此能够预见的是, 光源的扩展性会对输出很大影响, 4.5.6 小节中面向复杂辐照输出的透射式光学系统, 光源自身大小和光源与自由曲面的距离的比值较小, 约为 1:5.4, 此时光源的扩展性对辐照输出的影响较小, 且光学系统不存在光源自身遮挡, 获得了较为理想的辐照输出效果。若经费充足, 重新设计和加工反射式高能利用率自由曲面照明光学系统, 保证光源尺寸与距离比值在合适大小时, 能够减小光源扩展性影响, 获得更佳的输出效果。

采用边缘区域能量对中心区域光源遮挡阴影进行修正, 重新进行计算结果, 获得修正后光源能量有效利用率为 75.08%。构建扩展光源模型, 替代原点光源进行仿真, 仿真结果有效利用率为 78.41%, 与实验修正结果相符。

为探究整体光学系统特性, 测试不同位置的辐照输出, 以预期辐照面为基准, 分别测量不同偏移距离下的辐照输出情况, 如图 4.40 所示。另外分别测量光源沿  $x$  轴和  $z$  轴不同离焦量下的辐照输出特性变化, 由于  $x$  轴两侧离焦影响情况相近, 因为这里选取了  $x$  轴负向,  $z$  轴正向和负向离焦下的辐照输出特性变化, 如图 4.41、图 4.42 和图 4.43 所示。

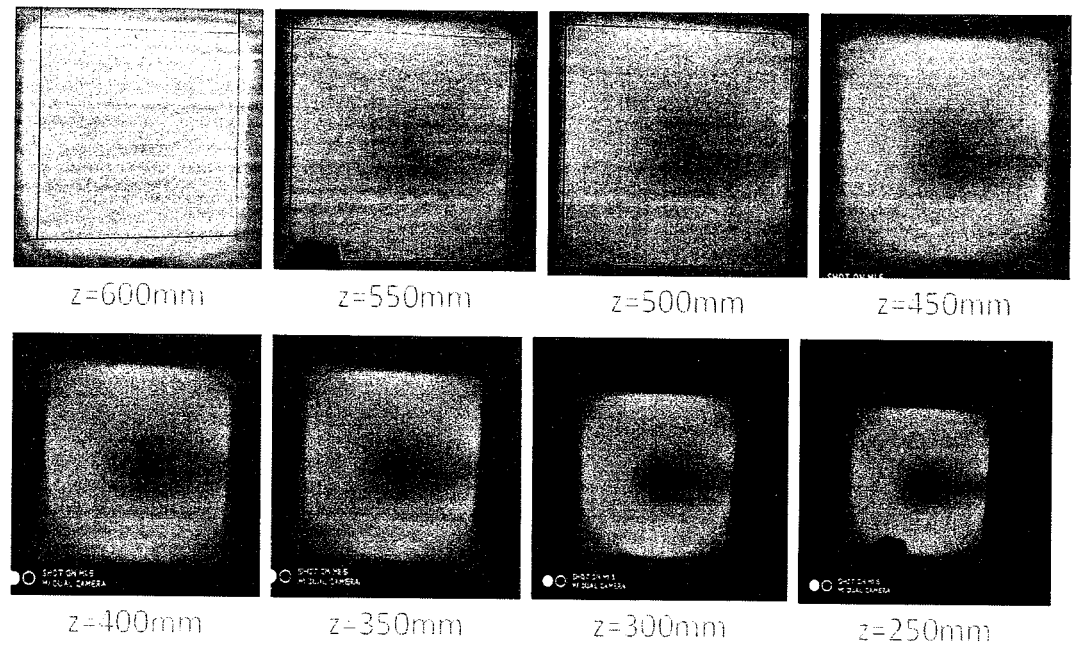


图 4.40 不同辐照位置下的辐照特性输出

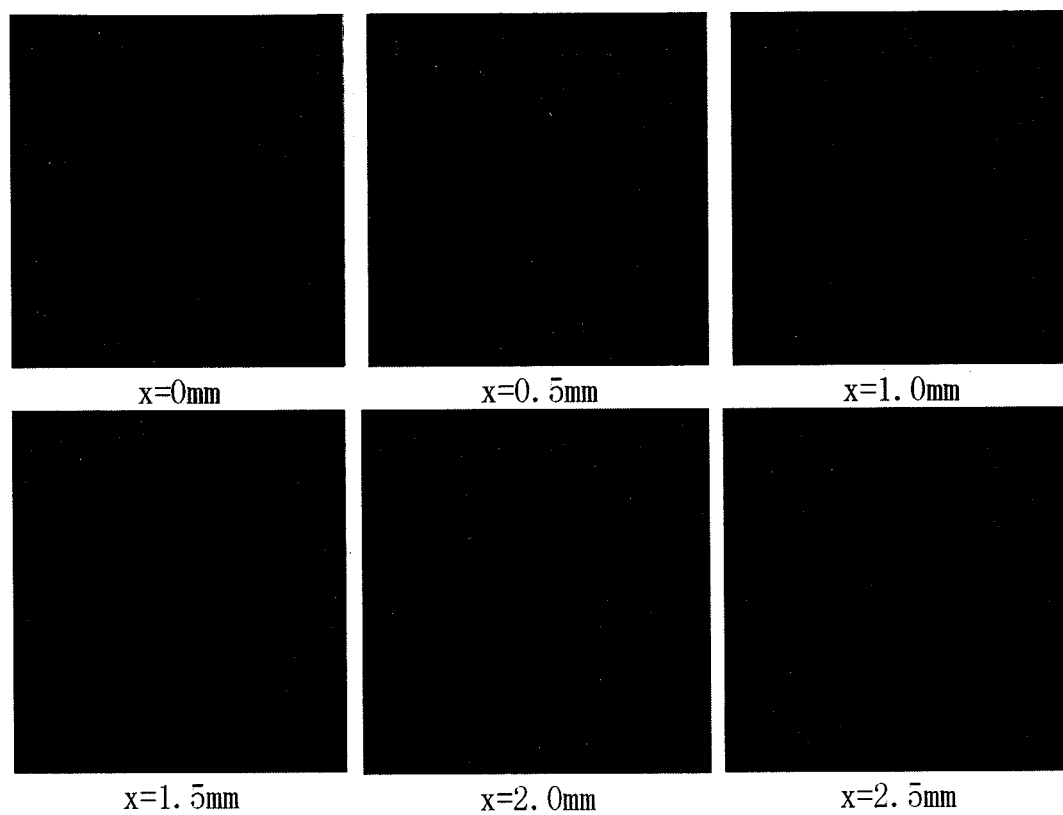


图 4.41 光源沿  $x$  轴负向离焦对辐照输出的影响

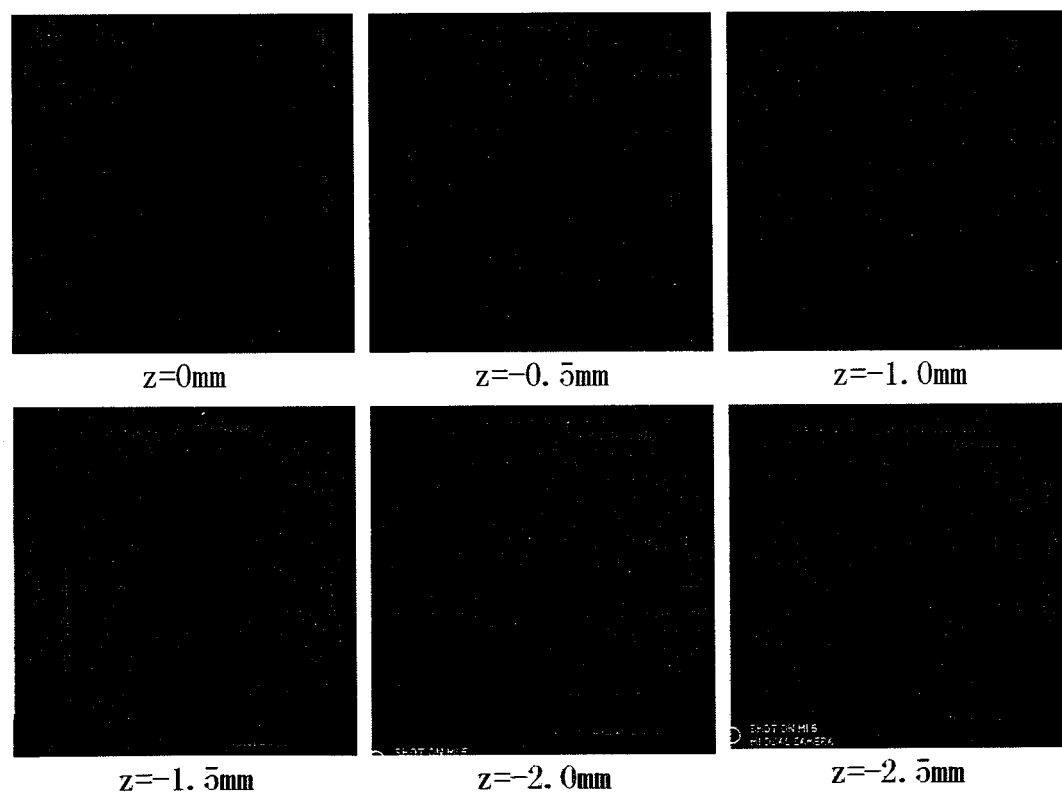


图 4.42 光源沿  $z$  轴负向离焦时对辐照输出影响



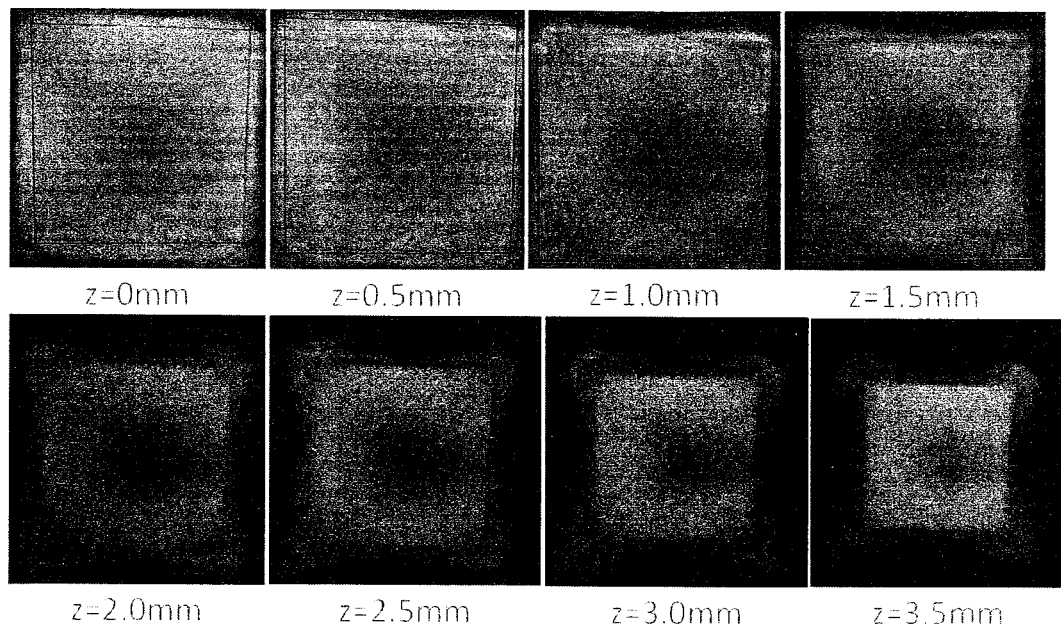


图 4.43 光源沿  $z$  轴正向离焦时对辐照输出影响

图 4.40~图 4.43 辐照输出特性变化显示, 光源处于焦点时, 接收面从预期辐照位置向光源移动时, 辐照输出形状保持不变, 大小变小, 整体辐照强度增加; 当光源沿  $x$  轴负向离焦时, 整体辐照面向  $x$  轴正向有小幅偏移, 辐照区域  $x$  轴正向边缘收缩, 辐照强度增加,  $x$  轴负向边缘扩张, 辐照强度减小; 光源沿  $z$  轴负向离焦时 (接近自由曲面), 辐照区域整体扩张, 当离焦量达  $2.5\text{mm}$  时, 整体辐照区域超出坐标纸范围, 其中坐标纸大小为  $500\text{mm} \times 500\text{mm}$ , 辐照区域边缘中心位置扩张速度大于边缘位置, 整体形状向圆形方向过渡, 整体辐照强度减小; 当光源沿  $z$  轴正向离焦时 (远离自由曲面), 辐照区域整体缩小, 辐照区域边缘中心位置收缩速度大于端部位置, 整体辐照面出现两方向的束腰现象, 整体辐照强度增加。

根据图 4.21~图 4.23 所示光源沿不同方向离焦对复杂辐照输出特性的影响以及图 4.41~图 4.43 所示光源沿不同方向离焦对高能量利用率辐照输出特性的影响进行对比能够得出, 光源的离焦对高能量利用率光学系统辐照输出特性的影响更大, 以光源向自由曲面元件离焦时, 当离焦量达  $2.5\text{mm}$  时, 高能量利用率辐照输出光斑面积已达到  $500\text{mm} \times 500\text{mm}$ , 当辐照输出光斑面积达到相似大小时, 复杂辐照输出的离焦量需要达到  $3.5\text{mm}$ , 且光源沿  $x$  方向离焦时, 高能量利

用率光学系统辐照输出的光斑位移效果更为明显；这归因于光源大小和光源与自由曲面距离的比值大小，其中高能量利用率光学系统该比值约为 1:1.5，而复杂辐照输出光学系统该比值约为 1:5.4，能够得出，当该比值越小时，不仅光源扩展性对辐照输出的影响更小，且光源的离焦对辐照输出特性影响更小，系统辐照输出更为稳定，因此在进行该类光学系统设计时，光源大小和光源与自由曲面距离的比值参数是需要重点考虑对象，设计合理光学系统，保持该比值合适大小，不仅能够减小光源扩展性的影响，同样能够降低系统装调难度，提升整体系统输出稳定性。

#### 4.7 本章小结

本章首先探究了 Monge-Ampère 方程与 OMT 问题的关系，得出 Monge-Ampère 方程来源于  $L^2$  Monge-Kantorovich Mass Transport 问题，且其解具有特殊性质。基于此实现了自由曲面照明光学系统数学模型的简化，获得了两种简化形式的 Monge-Ampère 方程，一种基于光源出射到目标辐照的映射，另一种则基于目标辐照到光源出射的映射。

引入采样网格均匀分布的傅里叶谱方法处理所得数学模型，克服了切比雪夫谱方法不适于复杂辐照输出的不足。针对傅里叶谱方法隐含的周期性条件，对边界节点进行特殊处理，消除了其周期性对计算结果的影响。获得了系统数学模型的解，即虚拟自由曲面参数，生成了光源出射与目标辐照间的映射关系，进而构建实际光学系统实现所得映射，完成系统设计。

以两种典型的自由曲面照明应用为例设计了光学系统，一种为面向复杂辐照输出的透射式光学系统，一种为面向高能量利用率的反射式光学系统，并对设计结果进行了仿真计算和实验验证。对复杂辐照输出的光学系统，仿真与实验结果相符，均实现了预期大小和形状的辐照区域，内部具备预期的“A”字型辐照分布，与背景辐照强度的比值设计值为 2:1，仿真分析结果约为 2.02:1，实验结果约为 1.75:1，取得了满意的效果；对高能量利用率光学系统，仿真分析与实验结果均实现了预期大小和形状的辐照输出，其中仿真分析不均匀度为 5.78%，有效能量利用率为 97.94%，但鉴于光源扩展性和自身遮挡的影响，实验结果辐照输出中

心存在暗区,不均匀度未达预期目标,有效能量利用率接近 50%,修正后的有效能量利用率约为 75%,尚有提升空间,通过增大曲面模型,控制光源大小和光源与自由曲面距离比值在合理范围,能够减小光源扩展性和遮挡影响,提升光学系统输出效果。探究了两个光学系统特性,检测了不同辐照位置、光源不同方向离焦对辐照输出的影响效果,其中光源位于焦点,预期辐照位置的输出效果最好。

该设计方法基于解决简化系统数学模型,降低了设计难度,提升了设计效率,且设计过程不受实际光学系统几何关系的束缚,不仅可基于光源出射到目标辐照映射进行系统设计,还可基于目标辐照到光源出射映射进行系统设计,具有更高灵活性,对于某些特殊辐照输出,基于目标辐照到光源出射映射的系统设计可大幅提升设计效率,获得更佳设计结果。通过验证,该设计方法不仅能够实现高分辨率复杂辐照输出,且能够处理拓扑方形和拓扑圆形之间映射关系的实现,获得更高的系统能量利用效率,是一种具有普适性、高效、简单、实用的自由曲面照明光学系统设计方法。

## 第5章 总结和展望

### 5.1 全文总结

本课题的开展立足于数学方法,力求在实现不同照明输出要求、保持自由曲面光滑连续的前提下,能够高效、简单、高精度的实现自由曲面照明光学系统的设计。围绕这一目的,在前人研究的基础上,先后经历了三个主要的研究阶段:基于一阶微分方程的自由曲面照明方法、基于常规 Monge-Ampère 方程的自由曲面照明光学系统设计和基于简化 Monge-Ampère 方程的自由曲面照明光学系统设计,最终建立了一套简单实用的自由曲面照明光学系统设计方法,各阶段的研究成果总结如下:

#### 1) 基于一阶微分方程的自由曲面照明设计方法

基于一阶微分方程的自由曲面照明光学系统设计是典型的二维设计,可实现光线的一维精细调控,是自由曲面照明光学系统最简单形式,本阶段的目的是对这种类型的光学系统进行深入分析,探究其光学系统特性,为面向复杂辐照输出的三维设计提供基础。

基于此,根据光学系统各元素几何关系,结合能够守恒定律,分别获得显式和隐式两种形式的自由曲面数学模型。通过不同途径求解所得数学模型,构建了对应光学系统,并进行仿真分析,结果表明,采样点较少时,两种模型获得了相近的曲面模型,但辐照输出均存在不足,显式模型所得辐照输出整体较为均匀,中心区域存在暗区;隐式模型辐照输出不存在暗区,但中心区域存在明暗相间的能量不均条纹。增加采样点数可使两种数学模型所得曲面面型趋于一致,辐照输出均能有所改善,但该方法不适于面向复杂辐照输出的三维设计,因为采样点数的增加在三维设计中会严重增加计算负担,降低设计效率。因此,在二维设计中解决该问题,在少量采样点下获得理想辐照输出效果,是二维向三维设计过渡前必须解决的问题。经分析,隐式设计结合 B 样条母线构建方法可实现目标,样条母线的构建不仅保证隐式设计离散点信息,且能够保证离散点切矢信息,实现入射光线落点精确控制,实现少量离散点下的理想辐照输出效果。

以短弧氙灯作为光源,均匀圆形辐照光斑作为预期辐照输出,对上述方法设计所得光学系统进行实验验证。结果表明,系统获得了预期大小和形状的辐照输出,光源扩展性和氙灯铜辫的遮挡对辐照输出产生影响,使得输出均匀度还有提升空间。对光学系统特性进行研究,获得了光源离焦对辐照输出的影响规律,确定了垂轴方向光源居于光轴之上,在光轴方向,可保持 $z$ 轴负向适当离焦量的装调准则。鉴于该自由曲面光学系统光源与太阳模拟器光源一致,设计目标接近,将实验结果与太阳模拟器光学系统进行对比,选用常规能量型太阳模拟器,准直角度为 $\pm 0.5^\circ$ ,结果显示,自由曲面照明光学系统均匀度对于具备匀光系统的太阳模拟器来说稍逊,但输出能量是其3倍以上,这与预期相符。将自由曲面照明光学系统进一步优化,减小光源扩展性和遮挡影响,可提升其均匀度,未来有望取代太阳模拟器光学系统,实现预期均匀度下的高能量辐照输出效果。

## 2) 基于常规 Monge-Ampère 方程自由曲面照明光学系统设计

针对二维设计仅面向对称性辐照输出,难以处理非对称性复杂照明的不足,该阶段的研究目的在于实现一种对整体输出光线精确控制的三维设计方法。

基于此,构建了整体系统坐标系,推导获得了自由曲面照明光学系统的数学模型,即椭圆型强非线性二阶偏微分 Monge-Ampère 方程。引入切比雪夫谱方法求解所得数学模型,获得了自由曲面面型数据,进而完成设计。并以朗博体发光 LED 光源,经单自由曲面反射后在预期辐照面上形成  $360\text{mm} \times 360\text{mm}$  均匀方形辐照输出的光学系统为例进行设计,对设计结果进行了仿真分析,结果表明,系统实现了预期大小和形状的辐照输出,且不均匀度能够达到 4.91%。

该设计方法实现了预期设计目标,但还存在不足之处,一是方程非常复杂,设计效率还不够高,在  $32 \times 32$  离散网格下,耗时近三小时才完成设计;二是切比雪夫谱方法采样区域为拓扑方形或长方形,而多数光源具有旋转对称性,出射区域为拓扑圆形,两者不匹配导致系统对光源能量利用率不足,上述光学系统光源能量利用率约为 70%,尚有提升空间;三是切比雪夫谱方法离散点存在中心区域稀疏,边缘区域密集的特性,难以保证高分辨率复杂辐照输出中心区域设计效果。

## 3) 基于简化 Monge-Ampère 方程的自由曲面照明光学系统设计

针对上阶段常规 Monge-Ampère 方程照明光学系统设计的不足,本阶段拟进

一步研究,以期获得一种具有普适性、简单、灵活、高效的自由曲面照明光学系统设计方法。

本阶段的研究从 Monge-Ampère 方程与 Optimal Mass Transport(OMT)问题的关系出发,获得了 Monge-Ampère 方程来源于  $L^2$  Monge-Kantorovich Mass Transport 问题的结果,且其解具有特殊的性质。基于此,采用虚拟自由曲面参数构建了两简化的 Monge-Ampère 方程系统模型,一种基于光源出射到目标辐照的映射,另一种基于目标辐照到光源出射的映射。求解所得系统方程能够获得光源出射与目标辐照之间的映射关系,构建自由曲面光学系统实现所得映射,获得实际自由曲面面型数据,完成整体系统设计。

引入傅里叶谱方法解决所得的数学模型,克服了切比雪夫谱方法不适于复杂辐照输出的不足,介绍了傅里叶谱方法的基本概念和计算流程,获得了傅里叶谱求导矩阵。针对傅里叶谱方法内含的周期性条件,对边界条件进行特殊处理,消除了傅里叶谱方法内含周期性对计算结果的影响,引入稳定性附加项来保证整体计算的稳定性,使得计算能够快速收敛,获得方程的解。

为了验证上述设计方法的正确性,采用两种典型的辐照输出作为预期照明进行光学系统设计,一种面向复杂辐照输出,一种面向系统高能量利用率辐照输出。并用仿真分析和实验验证结合的方法对输出结果进行验证,结果表明,该设计方法所得自由曲面照明光学系统辐照输出与预期相符。面向复杂辐照输出的光学系统实现了预期辐照输出,输出了预定大小和形状的辐照光斑,实现了“A”字型辐照输出,其与背景间辐照强度设计值为 2:1,仿真分析结果为 2.02:1,实验结果为 1.75:1,且实验与仿真数据吻合;高能量利用率光学系统实现了预期大小的方形辐照输出,仿真分析结果显示,光源有效能量利用率可达 97.94%,均匀度也能达到 5.78%,鉴于光源大小和光源与自由曲面距离的比较较大,光源扩展性及自身遮挡会对辐照输出产生较大影响,使得实验结果辐照中心区域出现了光源自身遮挡阴影,均匀度不高,能量利用率能够达到 50%左右,修正后有效能量利用率约为 75%,后续通过增大自由曲面模型,或者对光源的扩展性进行修正,可进一步提升该光学系统的表现,获得更优辐照输出结果。

该设计方法核心在于解决简化 Monge-Ampère 方程,降低了设计难度,提升

了设计效率，稳定性附加项保证了计算过程不至出现奇异性，在选用  $64 \times 64$  离散网格下，不足半小时即收敛到了理想结果；且该设计方法将设计过程从自由曲面照明光学系统几何关系束缚中解脱出来，保证了系统设计的灵活性；基于从目标辐照到光源出射的数学模型进行设计，进一步提升了设计能力，特别是针对辐照输出复杂，难以用数学表达式描述的情况，能够大幅提升设计效率和精度，获得满意的设计效果。通过两种典型光学系统设计，验证了该设计方法不仅能够处理高分辨率复杂辐照输出的光学系统设计，还能解决光源出射与目标辐照间拓扑圆形和拓扑方形的相互映射，保证了光源的能量利用率。因此该方法是一种简单、高效、且具有普适性的自由曲面照明光学系统设计方法。

## 5.2 创新点

本课题的创新点如下：

1. 提出了适用于对称性辐照输出的自由曲面照明光学系统设计方法，将该方法引入到太阳模拟技术领域，可简化太阳模拟器光学系统的结构，并提高系统能量利用效率。
2. 提出了基于光源出射到目标辐照映射关系的自由曲面照明光学系统简化 Monge-Ampère 数学模型，实现了高分辨率复杂辐照输出效果。
3. 提出了基于目标辐照到光源出射映射关系的自由曲面照明光学系统简化 Monge-Ampère 数学模型，获得了系统高能量利用率的设计效果。

## 5.3 展望

本课题虽然建立了一套高效实用的自由曲面照明光学系统设计方法，但在以下两个方面还需继续进行研究：

### 1. 多自由曲面照明光学系统设计

虽然通过简化 Monge-Ampère 方程获得光源出射与目标辐照之间的映射关系，但本课题仅研究了单自由曲面的照明光学系统，并未对多自由曲面照明光学系统构建方法进行深入分析，多自由曲面照明光学系统在整体系统能量利用率，映射逼近的精度上较单自由曲面有着先天上的优势，因此，构建多自由曲面照明

光学系统是下一步研究工作的重要方向；

## 2. 面向扩展光源的自由曲面照明光学系统设计

本课题所研究自由曲面照明光学系统全部为面向点光源，对扩展光源和非理想平行光光源，并未进行深入研究，在二维设计及高能量利用率光学系统中，光源扩展性对辐照输出均有影响。因此，面向扩展光源的自由曲面照明光学系统设计方法的研究也是下一步研究工作的重要方向。





$$\begin{aligned} I &= \rho x \\ &= \rho(1+0.25w^2)^{-1}(u, v, 1-0.25w^2) \end{aligned}$$

自由曲面上入射点对应点的法矢量为:

$$\begin{aligned} N &= I_u \times I_v \\ &= (\rho_u x + \rho x_u) \times (\rho_v x + \rho x_v) \\ &= \rho^2(1+0.25w^2)^{-2} x - \rho \rho_u x_u - \rho \rho_v x_v \end{aligned}$$

通过化简, 能够获得:

$$N = \frac{\rho}{(1+0.25w^2)^3} \begin{pmatrix} \rho u + 0.0625 \rho_u (u^4 - (4+v^2)^2) + 0.5 \rho_v uv(1+0.25w^2), \\ \rho v + 0.0625 \rho_v (v^4 - (4+u^2)^2) + 0.5 \rho_u uv(1+0.25w^2), \\ \rho(1-0.25w^2) + (\rho_u u + \rho_v v)(1+0.25w^2) \end{pmatrix}$$

法矢量单位向量为:

$$N^0 = \begin{pmatrix} \frac{\rho_u (0.0625u^4 - (1+0.25v^2)^2) + \rho u + 0.5 \rho_v uv(1+0.25w^2)}{(1+0.25w^2) \sqrt{\rho^2 + (\rho_u^2 + \rho_v^2)(1+0.25w^2)^2}}, \\ \frac{\rho_v (0.0625v^4 - (1+0.25u^2)^2) + \rho v + 0.5 \rho_u uv(1+0.25w^2)}{(1+0.25w^2) \sqrt{\rho^2 + (\rho_u^2 + \rho_v^2)(1+0.25w^2)^2}}, \\ \frac{\rho(1-0.25w^2) + (\rho_u u + \rho_v v)(1+0.25w^2)}{(1+0.25w^2) \sqrt{\rho^2 + (\rho_u^2 + \rho_v^2)(1+0.25w^2)^2}} \end{pmatrix}$$

根据折射率公式有:

$$\Gamma N^0 = n_o R^0 - n_i I^0$$

式中  $\Gamma$  为折转系数,  $n_o$  为出射方折射率,  $n_i$  为入射方折射率, 且有:

$$\Gamma = \sqrt{n_o^2 - n_i^2 + (N^0 \cdot n_i I^0)^2} - N^0 \cdot n_i I^0$$

通过计算能够获得:

$$N^0 \cdot niI^0 = \frac{\rho ni}{\sqrt{\rho^2 + (\rho_u^2 + \rho_v^2)(1+0.25w^2)^2}}$$

则有:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \sqrt{\frac{no^2 \left( \rho^2 + (\rho_u^2 + \rho_v^2)(1+0.25w^2)^2 \right) - ni^2 (\rho_u^2 + \rho_v^2)(1+0.25w^2)^2}{\rho^2 + (\rho_u^2 + \rho_v^2)(1+0.25w^2)^2}} - \\ &\quad \frac{\rho ni}{\sqrt{\rho^2 + (\rho_u^2 + \rho_v^2)(1+0.25w^2)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{\rho^2 no^2 + (no^2 - ni^2)(\rho_u^2 + \rho_v^2)(1+0.25w^2)^2}{\rho^2 + (\rho_u^2 + \rho_v^2)(1+0.25w^2)^2}} - \frac{\rho ni}{\sqrt{\rho^2 + (\rho_u^2 + \rho_v^2)(1+0.25w^2)^2}} \end{aligned}$$

根据光学系统设定, 折射光线的单位矢量为:

$$\begin{aligned} R^0 &= (T - F) / |T - F| \\ &= \frac{(t_x - \rho u(1+0.25w^2)^{-1}, t_y - \rho v(1+0.25w^2)^{-1}, t_z - \rho(1-0.25w^2)(1+0.25w^2)^{-1})}{|T - F|} \end{aligned}$$

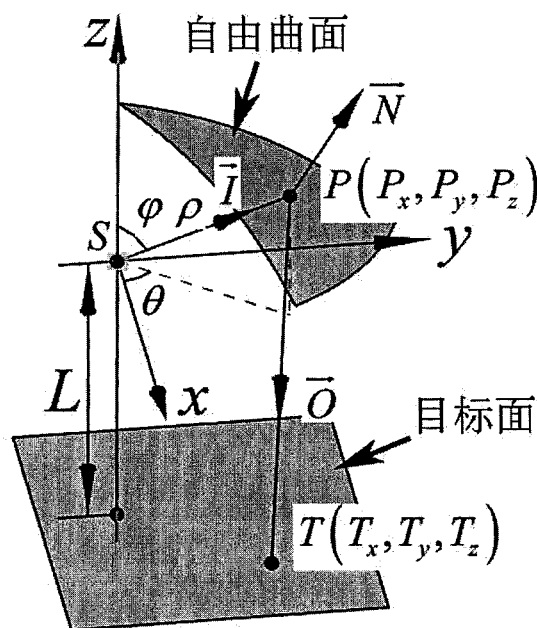
根据折射定律, 能够获得方程组, 并对其整理和化简, 能够获得:

$$\begin{aligned} K &= \frac{\sqrt{\rho^2 no^2 + (no^2 - ni^2)(\rho_u^2 + \rho_v^2)(1+0.25w^2)^2} - \rho ni}{(1+0.25w^2)(\rho^2 + (\rho_u^2 + \rho_v^2)(1+0.25w^2)^2)} \\ G &= \frac{t_z - \rho(1-0.25w^2)/(1+0.25w^2)}{K(\rho(1-0.25w^2) + (\rho_u u + \rho_v v)(1+0.25w^2))(1+0.25w^2) + ni(1-0.25w^2)} \\ \begin{cases} t_x = \rho \frac{u}{(1+0.25w^2)} + G \left( K \begin{pmatrix} \rho_u (0.0625u^4 - (1+0.25v^2)^2) + \rho u + \\ 0.5\rho_v uv(1+0.25w^2) \end{pmatrix} (1+0.25w^2) + niu \right) \\ t_y = \rho \frac{v}{(1+0.25w^2)} + G \left( K \begin{pmatrix} \rho_v (0.0625v^4 - (1+0.25u^2)^2) + \rho v + \\ 0.5\rho_u uv(1+0.25w^2) \end{pmatrix} (1+0.25w^2) + niv \right) \end{cases} \end{aligned}$$



## 附录 B 球坐标反射式自由曲面照明光学系统光源出射与目标辐照之 间映射关系推导

球坐标形式反射式自由曲面照明光学系统光源出射与目标辐照之间的映射关系采用下图所示的坐标系设定。



反射式球坐标自由曲面照明光学系统设定

根据光学系统设定，光源  $S$  位于坐标系中心，由光源出射的一条光线入射至自由曲面上一点  $P$ ，反射后到达目标面上的点  $T$ ，令点  $P$  的直角坐标为  $P(P_x, P_y, P_z)$ ，球坐标为  $P(\rho(\theta, \phi), \theta, \phi)$ ，则有关系：

$$\begin{cases} P_x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ P_y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ P_z = \rho \cos \phi \end{cases}$$

假定向量  $\vec{P}$  为点  $P$  的位置矢量，向量  $\vec{P}_\theta$  和  $\vec{P}_\phi$  分别为向量  $\vec{P}$  关于  $\theta$  和  $\phi$  的一阶偏导数，显然  $\vec{P}_\theta$  和  $\vec{P}_\phi$  是位于  $P$  点处自由曲面切平面内的相互正交的向量，且有：

$$\vec{P} = \rho \vec{I}$$

$$\vec{P}_\theta = \rho_\theta \vec{I} + \rho \vec{I}_\theta$$

$$\vec{P}_\phi = \rho_\phi \vec{I} + \rho \vec{I}_\phi$$

其中, 入射光线的单位方向矢量  $\vec{I} = (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi)$ , 由此可确定曲面在点 P 处的单位法矢量:

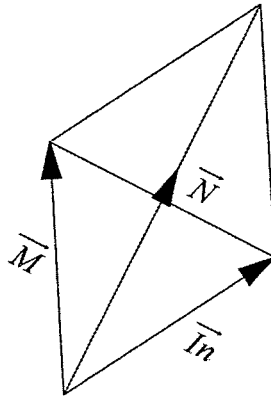
$$\vec{N} = \frac{\vec{P}_\phi \times \vec{P}_\theta}{|\vec{P}_\phi \times \vec{P}_\theta|}$$

通过计算能够获得点 P 处的单位法矢量为:

$$\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{\rho_\theta^2 + \sin^2 \phi (\rho^2 + \rho_\phi^2)}} \begin{pmatrix} \rho_\theta \sin \theta + \cos \theta \sin \phi (\rho \sin \phi - \rho_\phi \cos \phi) \\ -\rho_\theta \cos \theta + \sin \theta \sin \phi (\rho \sin \phi - \rho_\phi \cos \phi) \\ \sin \phi (\rho \cos \phi + \rho_\phi \sin \phi) \end{pmatrix}$$

构造单位矢量  $\vec{M} = -\frac{\vec{O}}{|\vec{O}|}$ , 即矢量  $\vec{M}$  为出射光线的反向矢量, 则根据反射定律

和点 P 处光线传播, 能够构造如下示意图:



反射定律示意图

Schematic diagram of reflection law

基于上图, 反射定律有如下形式:

基于上图，反射定律有如下形式：

$$\vec{I} + \vec{M} = 2(\vec{I} \cdot \vec{N})\vec{N}$$

其中：

$$\vec{M} = \frac{1}{|\vec{M}|}(\rho \sin \phi \cos \theta - tx, \rho \sin \phi \sin \theta - ty, \rho \cos \phi - tz)$$

即可根据反射定律能够解出：

$$\left\{ \begin{array}{l} tx = \frac{\sin \phi \left\{ \cos \theta \sin \phi \left[ (\rho^2 - \rho_\phi^2) tz \sin \phi + 2\rho\rho_\phi (\rho - tz \cos \phi) \right] \right.}{\sin^2 \phi \left[ (\rho^2 - \rho_\phi^2) \cos \phi + 2\rho\rho_\phi \sin \phi \right] - \rho_\theta^2 \cos \phi} \\ \quad \left. + 2\rho\rho_\theta \sin \theta (tz - \rho \cos \phi) - tz\rho_\theta^2 \cos \theta \right\} \\ ty = \frac{\sin \phi \left\{ \sin \theta \sin \phi \left[ (\rho^2 - \rho_\phi^2) tz \sin \phi + 2\rho\rho_\phi (\rho - tz \cos \phi) \right] \right.}{\sin^2 \phi \left[ (\rho^2 - \rho_\phi^2) \cos \phi + 2\rho\rho_\phi \sin \phi \right] - \rho_\theta^2 \cos \phi} \\ \quad \left. + 2\rho\rho_\theta \cos \theta (\rho \cos \phi - tz) - tz\rho_\theta^2 \sin \theta \right\} \\ |\vec{M}| = \frac{\left[ \rho_\theta^2 + (\rho^2 + \rho_\phi^2) \sin^2 \phi \right] (tz - \rho \cos \phi)}{\sin^2 \phi \left[ (\rho^2 - \rho_\phi^2) \cos \phi + 2\rho\rho_\phi \sin \phi \right] - \rho_\theta^2 \cos \phi} \end{array} \right.$$