

分类号 \_\_\_\_\_

密级 \_\_\_\_\_

U D C \_\_\_\_\_

编号 \_\_\_\_\_

# 中国科学院研究生院 硕士学位论文

光子晶体中拓扑绝缘体缺陷的研究

王 鹏

指导老师 蒋寻涯 研究员 中国科学院上海微系统与信息技术研究所

申请学位级别 工学硕士 学科专业名称 微电子与固体电子学

论文提交日期 2010年5月10日 论文答辩日期 2010年5月26日

培养单位 中国科学院上海微系统与信息技术研究所

学位授予单位 中国科学院研究生院

委员会主席 \_\_\_\_\_

申请中国科学院上海微系统与信息技术研究所硕士学位论文

## 光子晶体中拓扑绝缘体缺陷的研究

专业：微电子与固体电子学

Specialty: Microelectronics and Solid-state Electronics

研究方向：光子晶体与拓扑绝缘体学

Research Direction: Photonic Crystal and Topological Insulator

# 光子晶体中拓扑绝缘体缺陷的研究

王鹏（微电子与固体电子学）

指导老师：蒋寻涯 研究员

## 摘要

近年来，拓扑绝缘体材料是一个热门的研究领域，众多工作对其各方面性质进行了深入的研究。拓扑绝缘体一个很重要的性质是其特异的表面态，由于这种表面态的效应，使得电磁波经过拓扑绝缘体材料表面时，会发生偏振角的变化，前人曾展开一系列的研究来分析在拓扑绝缘体介质表面折射与反射的性质。本文的主要内容，就是在此基础之上，来分析拓扑绝缘体平板的透射光与反射光的性质，并且将拓扑绝缘体平板放入了一维光子晶体结构内进行研究，得到了一些新颖的结果。

我们的主要研究方法是用一束线偏振光从体系一侧入射，然后在另一端测其透射谱，并对透射光的偏振态性质进行分析研究。我们研究发现了一些比较新颖的结果：1. 透射率随着入射光频率发生着丰富的变化，并且，在透射谱带隙里，透射谱上有两个明显的 0.5 透射峰；2. 透射光的偏振态也随着入射光频率在不断变化，在这两个 0.5 透射峰频率处的偏振态分别为左旋圆偏振和右旋圆偏振，在它们中间频率处透射光为线偏振，但其法拉第角接近  $90^\circ$ ；3. 这两个 0.5 透射峰的位置及它们之间的峰值差反映了拓扑绝缘体材料的拓扑项，通过对峰值位置的测量，我们可以精确计算精细结构常数  $\alpha$ ；4. 我们还发现，我们这个结构下，由于拓扑绝缘体材料的表面磁电耦合效应，产生了很大的光学霍尔效应，使得透射光产生横向位移，我们对此现象也进行了分析研究。

关键词：光子晶体，拓扑绝缘体，传输矩阵，表面态；

---

# Study on Topological Insulator as a Defect in 1-D Photonic Crystal

Wang Peng

Directed by Prof. Xunya Jiang

## Abstract

Topological insulator (TI) is a new kind of material which is well concerned in recent years. Many studies have been worked on the properties of TI. A very important property of TI is its surface topological magneto-electric effect which is the manifestation of its topological property. Because of this surface effect, there will be a change in polarization angles of reflection and transmission when a linearly polarized light is incident on the surface of TI. Many researches have been done on the properties of reflection and transmission on these surfaces. Based on the above researches, the main contents of this thesis is to study the properties of reflection and transmission of a TI slab and one dimensional photonic crystal where a TI slab is included as a defect.

The main method in our work is using a linearly polarized light incident from one side of the TI slab system, and study the transmission on the other side, as well as the polarization states. We find a lot of new characters caused by the magneto-electric effect, such as: 1. there are 'double 0.5 transmissions' in the gap which is different from the normal defect; 2. the polarization states are left- and right-handed circular polarization at the double 0.5 transmissions frequencies respectively; 3. the frequency difference between the double 0.5 peaks response the property of TI and has been found to be modulated by different parameters of photonic crystal, from these new characters we can research the surface state of TI, as well as the fine structure constant; 4. we have also found a giant optical hall effect in this TI defect system which can emerge a transverse shift and studied some work on it.

**Key words:** photonic crystal; topological insulator; transmission matrix; surface state

## 目录

摘要.....	I
Abstract.....	II
目录.....	III
第一章 绪论.....	1
1.1 光子晶体简介.....	2
1.1.1 光子晶体的分类.....	2
1.1.2 光子晶体的应用.....	3
1.2 光子晶体能带介绍.....	5
1.2.1 光子晶体能带的特点.....	6
1.2.2 光子晶体能带研究方法.....	7
1.3 光子晶体仿真模拟的常用方法.....	9
1.3.1 散射矩阵法.....	10
1.3.2 有限差分域法.....	10
1.3.3 传输矩阵法.....	13
1.3.4 平面波展开法.....	13
1.4 光子晶体的制备.....	14
1.5 拓扑绝缘体及其光学性质.....	14
1.5.1 拓扑绝缘体简介.....	14
1.5.2 拓扑绝缘体光学性质简介.....	15
1.6 本文的主要工作.....	16
第二章 传输矩阵理论.....	17
2.1 传输矩阵简介.....	17
2.1.1 传输矩阵的特点.....	17
2.1.2 传输矩阵方法应用举例.....	17
2.2 传输矩阵中矩阵元的计算方法.....	18
2.2.1 单界面传输矩阵.....	19
2.2.2 介质内传输矩阵.....	21
2.2.3 周期体系传输矩阵.....	22
2.3 传输矩阵小结.....	22
第三章 拓扑绝缘体体系传输矩阵的计算方法.....	23
3.1 单拓扑绝缘体界面上的透射、反射计算.....	23
3.2 单拓扑绝缘体界面上垂直入射的传输矩阵.....	25
3.3 单拓扑绝缘体界面上斜入射的传输矩阵.....	28
3.4 拓扑绝缘体周期体系的研究方法.....	29
3.5 透射光偏振态的分析方法.....	31

3.6 本章小结.....	33
第四章 拓扑绝缘体作为光子晶体缺陷的光学性质研究.....	34
4.1 拓扑绝缘体缺陷体系介绍.....	34
4.2 拓扑绝缘体缺陷体系材料参数的选择.....	35
4.2.1 拓扑绝缘体平板及镀铁磁的方法.....	35
4.2.2 光子晶体参数的选择.....	36
4.3 拓扑绝缘体缺陷态透射谱的特点.....	38
4.3.1 与普通缺陷透射谱的对比研究.....	40
4.3.2 透射谱随光子晶体层数变化的研究.....	42
4.3.3 透射谱随光子晶体折射率变化的研究.....	43
4.3.4 透射谱随体系随浸入不同环境的研究.....	43
4.4 对精细结构常数的测量.....	45
4.5 光学霍尔效应.....	46
4.6 镀反方向磁化铁磁层的对比研究.....	48
4.7 本章小结.....	49
第五章 总结.....	50
参考文献.....	51
硕士期间发表文章及成果.....	55
致谢.....	55
个人简历.....	55
中国科学院上海微系统与信息技术研究所 学位论文独创性声明.....	55
中国科学院上海微系统与信息技术研究所 学位论文使用授权声明.....	55

## 第一章 绪论

近年来, 兴起一门新的基本材料学科, 那就是拓扑绝缘体<sup>[1-7]</sup>材料的研究。拓扑绝缘体是一种新的量子物态, 完全不同于传统意义上的“绝缘体”, 虽然这种物质的电子“体态”是有能隙的, 但是, 其能隙与传统的绝缘体(被称为“带绝缘体”, band insulator)并不同, 而是所谓的“负能隙”, 同时, 在这种物质的表面存在所谓的“拓扑表面态”, 是无能隙的金属态。

拓扑绝缘体的表面金属态完全是由材料体电子态的拓扑结构所决定, 是由时间反演对称性所保护的, 与表面的具体细节无关, 所以它的存在非常稳定, 基本不受到非磁杂质与无序的影响。拓扑绝缘体材料一个很重要的性质就是它的表面电磁性质<sup>[8]</sup>, 即电磁波在包含拓扑绝缘体材料的体系中的传播特性, 由于拓扑绝缘体材料的拓扑性质, 其内部电磁场的拉格朗日量与一般的体系并不相同, 出现一个“拓扑项”  $\frac{\Theta}{2\pi} \frac{\alpha}{2\pi} \vec{E} \cdot \vec{B}$ :

$$L = L_0 + L_{topo} = \frac{1}{8\pi} (\epsilon \vec{E}^2 - \frac{1}{\mu} \vec{B}^2) + \frac{\Theta}{2\pi} \frac{\alpha}{2\pi} \vec{E} \cdot \vec{B}$$

其中,  $\epsilon$  为介电常数,  $\mu$  为磁导率,  $\alpha$  为精细结构常数,  $\Theta$  为一个唯象参数。对于普通材料,  $\Theta$  一般为 0 或  $2\pi$ ; 而对于拓扑绝缘体其值为  $\pi$  或  $-\pi$ , 其符号由磁化强度的方向决定<sup>[9]</sup>。这项的效果也曾经在粒子物理场论中广泛讨论过, 被称为轴子电动力学。由于这项可以写成矢势的全微分形式, 所以, 在拓扑绝缘体材料内部, 它并不会导致任何可观测的物理效应, 即在其内部的电磁场传播态与一般介质完全一样, 但是, 在拓扑绝缘体材料与一般材料的界面上, 可以产生可观测的物理效应, 被称为拓扑绝缘体材料的磁电效应。具体的说, 由于受到拓扑性质的影响, 拓扑绝缘体材料内的电磁本构方程与普通材料并不一样, 多了拓扑项因子  $\Theta$ , 为:

$$\begin{cases} D = \epsilon \cdot E + \alpha(\Theta/\pi)B \\ H = B/\mu - \alpha(\Theta/\pi)E \end{cases}$$

在新的本构方程下, 我们用边界连续条件进行计算, 就会发现, 当一束线偏振光从普通材料垂直入射到拓扑绝缘体材料表面上时, 在拓扑绝缘体材料界面上的反射光和透射光相对于入射光均会发生一个偏振角的变化, 即克尔角和法拉第角<sup>[10]</sup>。但是, 由于克尔角和法拉第角一般来说都正比于精细结构常数  $\alpha$ , 所以相当小, 很容易被其它干扰因素淹没。

目前为止, 很多基于此原理的工作都在单拓扑绝缘体界面上进行研究分析, 我们这里对拓扑绝缘体材料平板结构进行了深入的理论分析, 并把拓扑绝缘体平

板结构放入了一维光子晶体结构之中,来分析这个体系的透射与反射信息,发现这样可以有效增大拓扑绝缘体材料表面的克尔角和法拉第角,并且可以通过光子晶体带隙里透射峰位置来观察拓扑绝缘体材料的表面磁电耦合效应,将拓扑绝缘体表面性质探测与光子晶体结合起来,对理论分析以及实验测量有着重要的意义。

## 1.1 光子晶体简介

当今科技的发展,很大程度上是在材料科学的发展基础之上建立起来的,半导体理论的出现,推动着整个微电子产业往前发展。类比与半导体晶格对电子波函数的调制,半导体晶体能够通过能带来控制电子的运动,光子晶体能够调制具有相应波长的电磁波,光子晶体和半导体在基本模型和研究思路上有着许多相似之处,原则上,人们可以类比半导体的一些基本理论来设计和制造光子晶体及其器件,以达到控制光子运动的目的。光子晶体的出现,使人类操纵和控制光子的梦想成为可能。

光子晶体即光子禁带材料,是在1987年由E.Yablonovitch在研究如何控制材料的自发辐射时提出的概念<sup>[1]</sup>,简单的来说光子晶体是一类在光学尺度上具有周期性介电常数的晶体。由于介电常数呈周期性排列,电磁波经过光子晶体时,会受到布拉格散射,使得特定的频率的电磁波无法通过。相当于在频谱上出现能隙,这很类似于晶体中的电子输运的情况,我们在这里用色散关系来描述电磁波谱,就会发现这种色散关系具有带状结构,即所谓的光子能隙结构。我们将具有这类性质的材料称为光子晶体,或者叫它光子禁带材料。

### 1.1.1 光子晶体的分类

光子晶体的研究和人工制作是近几十年的事情,但是自然界早就存在这类结构的物质。如蝴蝶的翅膀,其翅膀上能呈现色彩斑斓的颜色就是由于其结构就是一种天然的光子晶体材料。另外,澳大利亚有一种色彩亮丽的蛋白石,它所呈现出来的色彩并不是由色素造成的,而是由于其结构上具有周期性,使得不同方向上反射光的颜色有所变化。这些自然界的光子晶体材料有些比我们现有实验室条件做出来的效果更好,也许可以给我们优化现有光子晶体提供思路。

细说起来,人们很早就开始利用光子晶体,比如最简单的多层膜系统,就是一种一维光子晶体结构,被人们用来作为滤波器等各种光学系统之中。但是,直到1987年,E.Yablonovitch和John第一次将经典电磁学和固体物理学这两个理论结合起来,从晶格的角度来看待周期性光学系统,将电子体系里的能



带理论应用在这种周期性介电常数体系时，人们才意识到，这种被将称为“光子晶体”的材料在未来光集成中所具有的巨大潜力。

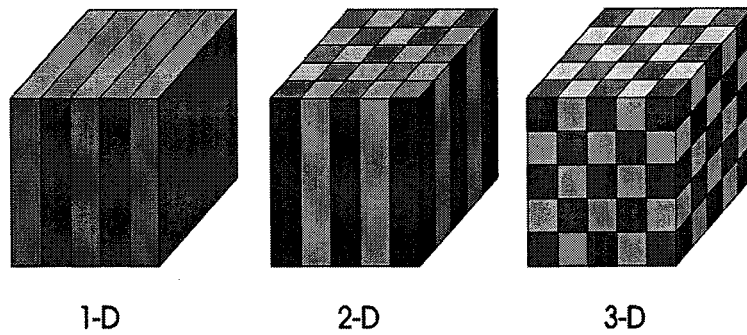


图 1.1 一维、二维、三维光子晶体示意图。

目前，光子晶体的研究和制作中，有一维，两维和三维结构。如图 1.1 所示，一维光子晶体一般是折射率周期交替的平板结构，两维的一般是周期性孔或者周期性柱子结构，三维的一般是周期性交替排列的二维平板组成。这几种是比较典型的光子晶体结构，另外，还有着各种缺陷的光子晶体，缺陷有点缺陷，线缺陷等。这些带着缺陷结构的光子晶体有着各种各样的用途，比如光学微腔、光波导等等，在实际应用中非常广泛。

### 1.1.2 光子晶体的应用

到目前为止，人们已经相继提出多种基于光子晶体的全新光子学器件，包括高品质因子的光学微腔，无阈值的激光器，无损耗的反射镜和弯曲光路，光子晶体选频器，光子晶体光纤，以及波长分辨率极高而体积极小的超棱镜等。光子晶体的出现使信息处理技术的“全光子化”和光子技术的微型化与集成化成为可能，它可能在未来导致信息技术的一次革命，其影响可能与当年半导体技术相提并论。下面我简单介绍一下光子晶体在这几个方面的应用。

#### 光学微腔<sup>[12]</sup>

光子晶体能够有效控制材料的自发辐射，利用这一特点，人们可以通过光子晶体来降低激光器的阈值，做成无阈值或低阈值的激光器，来改进激光器的性能。具体方法是在光子晶体中制造缺陷形成共振腔，然后将增益介质放入共振腔之中。通过对光子晶体参数进行调节，我们可以使得原子自发辐射频率刚好落在光子晶体的带隙内，这样，光子晶体就相当于一个势垒，可以阻止电磁波的发散，以减少损耗，从而使激光器的发光效率得以大幅提高。

这方面的实验工作有 1999 年 O.Painter 小组通过实验实现室温下点缺陷光子晶体激光器的光泵浦激光发光，以及 2002 年他们根据傅里叶空间的性质和微腔模的对称性，实现了高达 13000Q 值的微腔<sup>[13-14]</sup>。

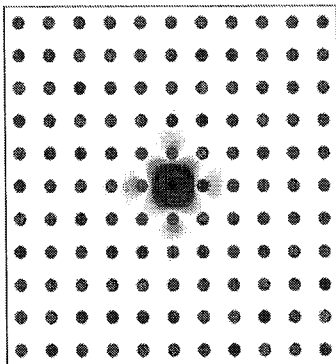


图 1.2 光子晶体微腔示意图。

### 光子晶体波导<sup>[15-19]</sup>

在集成光路设计上，一个最基本的要求就是对光路的控制。集成电路中我们可以利用导线来精确控制电流的流动，但光的难以控制使得集成光路的发展受到极大限制。光子晶体的出现，为解决这一难题指明了一条道路。光子晶体利用不同方向模式共振匹配的原理，能够对直线、曲线光波导，以及分支波导都有很高的传输效率，而不会造成回波损耗和严重的能量损失。

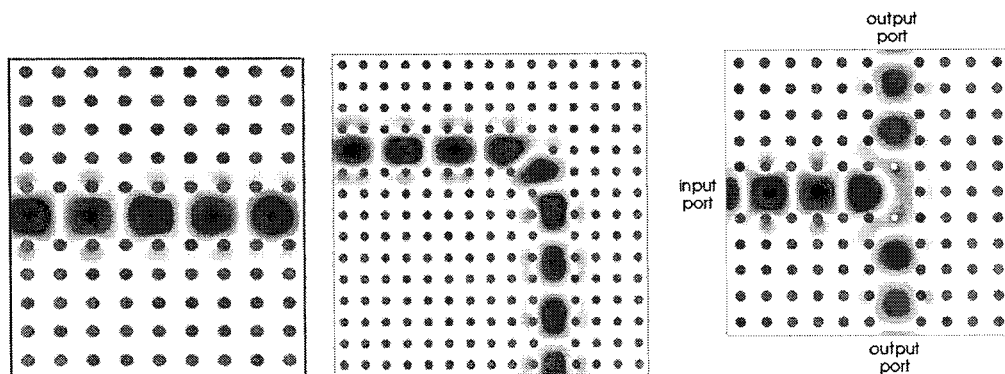


图 1.3 各种光子晶体波导示意图：直线、曲线、分支波导。

### 光子晶体选频器<sup>[20]</sup>

光子晶体对光的强大控制能力，吸引着光通讯系统的不少专家，因为在光通讯业迅速发展的今天，高性能选频器的研制是提升波分复用系统的一大瓶颈。光子晶体得天独厚的光学性能必将为这一领域带来一片新的天地。

### 光子晶体光纤<sup>[21-22]</sup>

光纤的诞生，给当今世界的通讯带来的革命性的变化。但是，传统光纤也有其自身的一些局限性，比如其传输过程中能量的损耗，传输频带窄等，为了有效改善传统光纤的性能，人们提出了光子晶体光纤的概念。光子晶体光纤又称为微结构光纤或多孔光纤，其横截面是周期性排列的沿轴向均匀分布的圆空气孔，在芯的位置处，周期结构被破坏形成缺陷，光可以沿缺陷纵向传播。由于光子晶体光纤中的光传输是在光子晶体带隙内传播，使得其能

量损耗极小。而且不会影响数据的传输效率。并且，只要满足光子晶体传输带隙要求，所有频率的光都可以进行传输，使得光子晶体光纤有着极宽的传输频带。目前，光子晶体光纤已经发展的比较成熟，主要有多孔光子晶体光纤、光子晶体带隙光纤和布拉格光纤等。

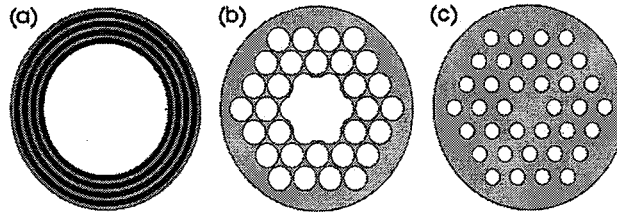


图 1.4 光子晶体光纤示意图。

### 超棱镜<sup>[23-25]</sup>

超棱镜的概念是相对于普通棱镜而言的，我们知道，棱镜由于其色散性质，可以实现不同频率光的分离，从而对不同频率的光实现分辨功能，这给色散光学以及由此制造的光学器件指明了方向。但是，普通棱镜的色散效果越来越不能满足人们对光学器件日益提高的要求。光子晶体的出现，为这一领域带来了希望。光子晶体超棱镜通过对光子晶体能带的分析，可以实现在特殊频率、特殊方向上对光的超分辨性能，与普通棱镜相比，这种光子晶体超棱镜的超分辨性能得到了极大的提高，可以达到普通棱镜的千倍以上。

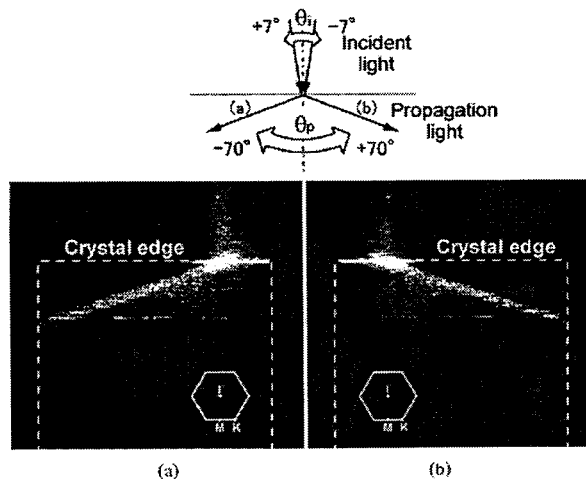


图 1.5 光子晶体超棱镜示意图。

## 1.2. 光子晶体能带介绍

能带理论是人们在研究电子晶体体系问题提出来的一种分析理论，应用这种理论，人们可以清晰有效地对电子晶体体系进行研究，包括对绝缘体、导体、半导体以及金属的定义等。当人们类比电子晶体来研究光子晶体时，能带理论的研究方法自然的被引了进来。同样，固体物理中的许多其它概念

也可以用在光子晶体中，不过需要指出的是光子晶体与常规的晶体虽然有相同的地方，也有本质的不同，如光子服从的是麦克斯韦（Maxwell）方程，电子服从的是薛定谔方程；光子波是矢量波，而电子波是标量波；电子是自旋为  $1/2$  的费米子，光子是自旋为  $1$  的玻色子；电子之间有很强的相互作用，而光子之间没有，这使得光子晶体的能带有着新的特点和研究方法。

### 1.2.1 光子晶体能带的特点

光子晶体是类似于电子体系提出来的一种概念，在电子体系里，由于存在离子散射，电子运动受到周期性调制，使得电子按一定方式运动，我们可以用能带来刻画这种运动，用能带来描述电子的运动，同理，在光子晶体里，我们也可以用能带理论来描述，不同的是，在这里能带调控的是光子的运动。而周期性介电常数影响的是描述电磁波的布洛赫波。

对于一维光子晶体，周期性结构使得透射谱呈带状分布，即band-gap结构（如图 1.6 左所示），特定频率的电磁波无法通过<sup>[26]</sup>，这很类似于电子体系。当我们在体系里加入缺陷时，即在周期性结构里加入其它其它共振模式的结构时，在透射谱gap上会出现透射峰（如图 1.6 右所示），这个透射峰描述的就是缺陷态的性质。

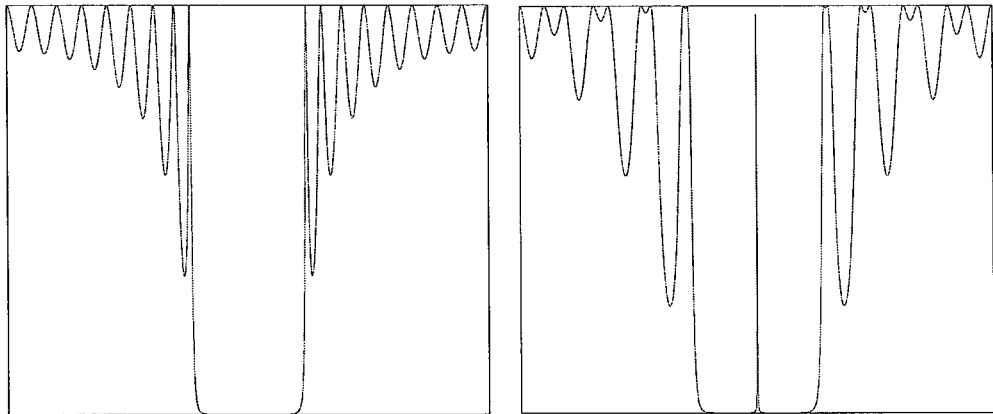


图 1.6 一维光子晶体带隙（左图）和带隙中的缺陷态（右图）。

二维体系的能带结构我们常用等频图来描述，不同体系的等频图差别很大，我们可以依据等频图来做各种分析，比如简单的自准直效应<sup>[27-28]</sup>，如图 1.7 所示：与空气圆形等频图所不同的是，具有自准直的光子晶体体系的等频图呈正方形，频率落在正方形边上的光束将平行出射，这种特性是可以由等频图分析得来，并可以通过体系的等频图来进行优化，选择最好的自准直区域。在二维体系里我们可以引入缺陷，常用的有点缺陷和线缺陷。点缺陷常用来做腔模分析，线缺陷可以用来做线模，引导光束运动。

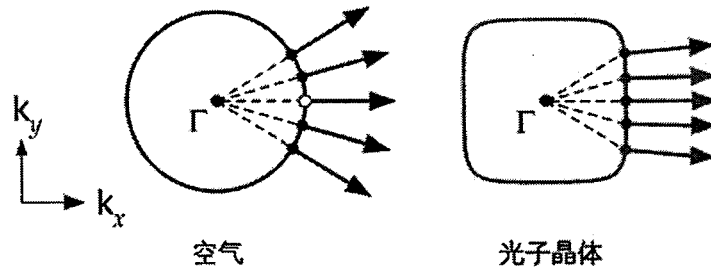


图 1.7 空气中和光子晶体中的等频图。

### 1.2.2 光子晶体能带研究方法

目前对光子晶体的研究，一般是先研究其能带结构，然后在计算机中进行模拟仿真，等得到比较好的结果时，才将其进行实验。这种研究模式一是能提高研发速度，另一个是节约研究经费，这也是世界上越来越被重视的一种研究模式。这要求我们对各种类型的光子晶体能带有着较深的认识，并掌握一些基本的研究方法。

对光子晶体能带的分析，主要分一维、二维和三维三种情况来研究，我们下面对这几种情况进行详细的讨论。

对于一维光子晶体，我们分析其能带结构时，主要研究的是其透射谱带隙结构，通过带隙结构的形状和位置，来理解光子晶体的一些特性。通过能带，我们可以看出体系的周期性，以及缺陷态等信息。

当我们选择两种周期性交替的介质时，我们可看到其能带为周期性形状。每个周期内的有两种形状的 band-gap 图，这种透射谱的 band-gap 中心位置与介质中的光程有关，当我们保持两种介质内光程相同时，周期内的 band 中心位置和 gap 中心位置也将保持比例不变，当我们增加光子晶体层数时，这种 band-gap 图更加明显，但其中心位置保持不变，如图 1.8 所示。这种 band-gap 图是一种等比例图，当两种介质参数等比例变化时，其 band-gap 图形状不变，其中心频率发生等比例变化。

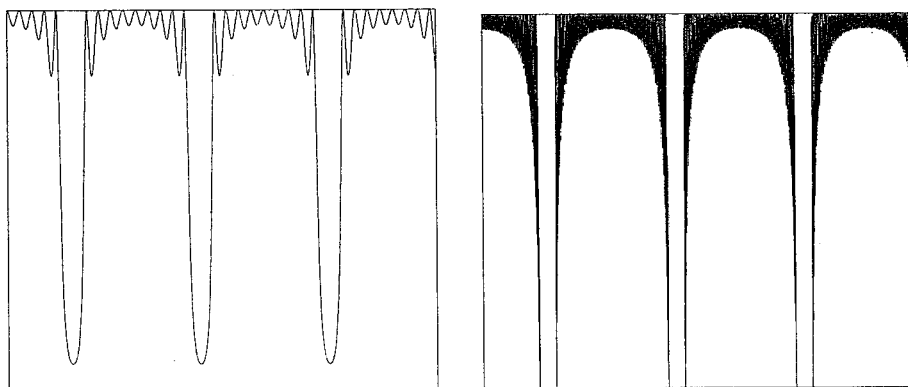


图 1.8 不同层数下（左图层数较少，右图层数较多）光子晶体带隙图。

当在光子晶体中间夹一层其他介质造成缺陷时，这里的其他介质主要指与周期性光子晶体介质内传播光程不同的介质，包括与上述两种介质一样，但厚度不同，或者厚度相同但介质折射率不同，亦或两者均不相同等情况。此时，中间这一层结构就构成了整个体系的一个缺陷，这层结构的透射共振峰就是整个体系透射谱的一个缺陷态，当这个缺陷态透射共振峰落在光子晶体透射谱 gap 内时，这个缺陷态就构成了体系 gap 内的一个导带。在这个缺陷态频率上，体系内电场主要集中在缺陷处，此频率处的透射率为 1，gap 内的透射谱信息也就主要体现了缺陷的信息。当光子晶体周期性比较强时，这种 gap 内的缺陷态透射峰十分尖锐，对频率特别敏感。这种缺陷态在实际应用中十分广泛，比如光子晶体选频器、滤波器的设计等，都是依据 gap 内缺陷态的原理来进行的。

上面我们讲了 gap 内缺陷态的一些特征和应用，而对于 gap 位置的选择，我们可以通过光子晶体参数来进行，并且可以精确计算出体系的 gap 中心频率位置，同时我们还可以通过中间缺陷结构的参数来调节缺陷态透射峰的频率位置。当缺陷态透射峰与光子晶体 gap 中心位置重合时，随着光子晶体层数的增多，光子晶体对 gap 内频率处的电磁波更趋近于完美反射，但这不会对缺陷态透射峰位置造成影响，缺陷态透射峰频率始终与 gap 中心保持重合；但是，当两者不重合时，随着光子晶体层数的增多，gap 内缺陷态的透射峰就会发生漂移，造成一定的移动效果，如图 1.9 所示。

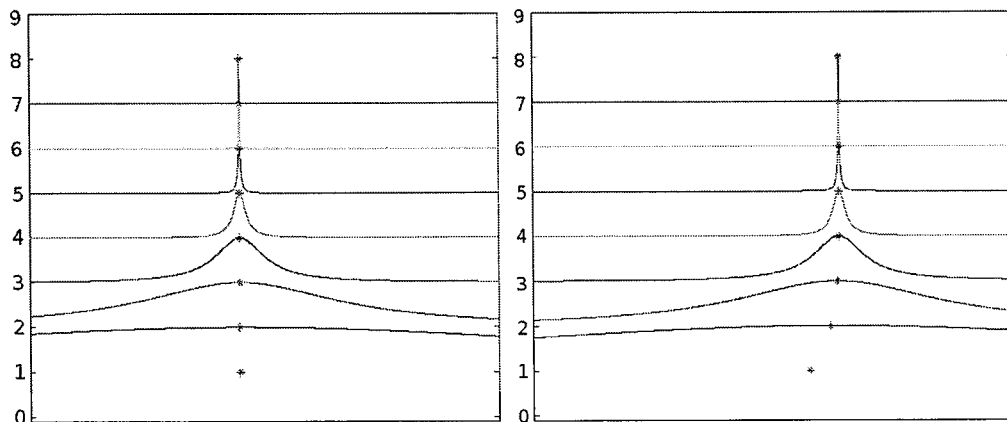


图 1.9 缺陷态透射峰与光子晶体 gap 中心重合（左图）和不重合（右图）两种情况下，透射谱和共振频率随光子晶体层数变化示意图。

上面讲的是光子晶体内加一个缺陷时的情况，我们也可以在光子晶体内加两个或多个缺陷，这样整个体系就会有多个缺陷态透射峰，并且它们之间会有相互影响。总之，我们可以通过对缺陷态透射谱的研究，来分析缺陷态的性质。

另外，当光子晶体并不是严格周期结构，而是每层都有一定的偏差时，我们就可以引入一个 random 参数，然后通过透射谱来研究这种非周期的无序

体系，此时，透射谱呈现更多的变化。我们也可以研究多种介质体系，以及有损耗体系情况的透射谱信息等。通过透射谱来分析一维光子晶体的各种丰富信息。

对于二维光子晶体，其情况比一维更加复杂，我们一般利用等频图来研究其体系信息。二维光子晶体的等频图一般随着光子晶体结构的不同而差别迥异，二维光子晶体有二维柱状、孔状结构等；柱和孔有正方形、六角形、圆形、椭圆型之分；而其周期结构有六角格子、四方格子之别；对于介质有同类介质和不同介质周期交替，或者无序体系；另外，还有有无缺陷结构情况；这些都会反映到其等频图上。反过来，我们也可以通过对比等频图的分析，来了解结构的性质，以及指导实验设计等。例如，通过图 1.10 一个简单的普通的二维光子晶体等频图，我们可以分析在呈直线区域寻找自准直效应，而在顶角区域寻找超棱镜效应等。我们可以由等频图看出图中光子晶体自准直效应并不明显，然后可以调节光子晶体参数，使其等频图出现比较宽的直线区域，进而指导实验设计。

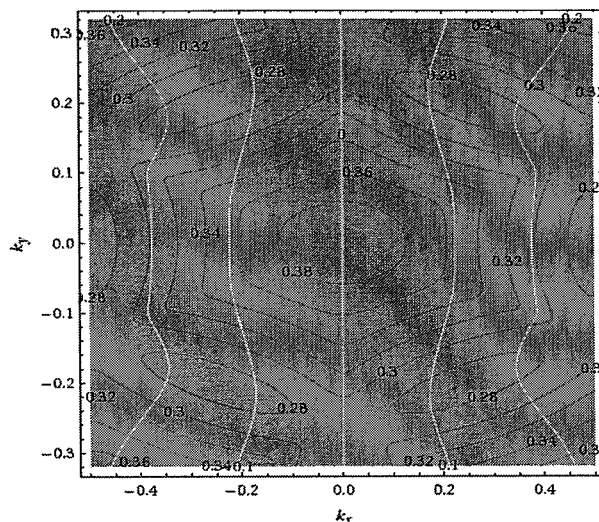


图 1.10 二维光子晶体等频图。

### 1.3 光子晶体仿真模拟的常用方法

当今科技的发展，总是理论先行，实验后继，在光子晶体的发展历程中更证明了这一点。目前从事光子晶体研究方向中，总是在数值仿真模拟之后，才进行相关实验研究。这种研究模式不但能大大提高研究效率，也能节约成本，所以，相关科研人员为了对光子晶体进行理论研究及数值仿真，发展出了许多理论方法及模拟工具，使对实验研究具有重要的指导意义。

### 1.3.1 散射矩阵法

散射矩阵法假定光子晶体由各向同性的介质组成，其中充满了各种光学散射中心。通过对所有的散射中心的散射场应用傅立叶-贝塞尔展开来求解亥姆霍兹方程，从而计算出在光子晶体中传输的场分布。应用这种方法对于求解场分布和传输光谱都是可行的，但是由于这种方法需要较长的运算时间，在有些情形下实际上是不可行的。

### 1.3.2 有限差分域法<sup>[29-30]</sup>

有限差分域法（FDTD）是电磁场数值计算运用在时域中的经典方法之一。在这一小节中我们将概况的介绍 FDTD 这种方法的应用原理和算法。FDTD 方法的基本原理是将一个单位原胞划分成许多网状小格，列出网上每个结点的有限差分方程，利用布里渊区边界的周期条件，同样将麦克斯韦方程组化成矩阵形式的特征方程，这个矩阵是准对角化的，其中只有少量的一些非零矩阵元，计算最小。但是由于有限差分域法没有考虑晶格的具体形状，在遇到特殊形状晶格的光子晶体时，有难于精确求解的缺点。

在 FDTD 计算中最重要的就是麦克斯韦方程组和 Yee 元胞概念。麦克斯韦方程组是支配宏观电磁现象的一组基本方程：

$$\begin{cases} \Delta \times H = \frac{\partial D}{\partial t} + J \\ \Delta \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} - J_m \end{cases}$$

其中  $E$  为电场强度， $D$  为电通量密度， $H$  为磁场强度， $B$  为磁通量密度， $J$  为电流密度， $J_m$  为磁流密度。对于各向同性线性介质中的本构关系为：

$$\begin{cases} D = \varepsilon E \\ B = \mu H \\ J = \sigma E \\ J_m = \sigma_m H \end{cases}$$

其中  $\varepsilon$  表示介质介电常数， $\mu$  表示磁导系数， $\sigma$  表示电导率， $\sigma_m$  表示磁导率。 $\sigma$  和  $\sigma_m$  分别为介质的电损耗和磁损耗。真空中  $\sigma=0$ ， $\sigma_m=0$ ，以及：

$$\varepsilon = \varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}, \quad \mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}.$$

在直角坐标系中，我们可以将上述微分方程写成：



$$\begin{cases} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma E_x \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma E_y \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} + \sigma E_z \end{cases}$$

以及

$$\begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} - \sigma_m H_x \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} - \sigma_m H_y \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} - \sigma_m H_z \end{cases}$$

令  $f(x, y, z, t)$  代表  $E$  或  $H$  在直角坐标系中某一分量，在时间和空间域中的离散取以下符号表示：

$$f(x, y, z, t) = f(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) = f^n(i, j, k)$$

对  $f(x, y, z, t)$  关于时间和空间的一阶偏导数取中心差分近似，即：

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial x} \right|_{x=i\Delta x} \approx \frac{f^n(i + \frac{1}{2}, j, k) - f^n(i - \frac{1}{2}, j, k)}{\Delta x} \\ \left. \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial y} \right|_{y=j\Delta y} \approx \frac{f^n(i, j + \frac{1}{2}, k) - f^n(i, j - \frac{1}{2}, k)}{\Delta y} \\ \left. \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial z} \right|_{z=k\Delta z} \approx \frac{f^n(i, j, k + \frac{1}{2}) - f^n(i, j, k - \frac{1}{2})}{\Delta z} \\ \left. \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial t} \right|_{t=n\Delta t} \approx \frac{f^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) - f^{n-\frac{1}{2}}(i, j, k)}{\Delta t} \end{cases}$$

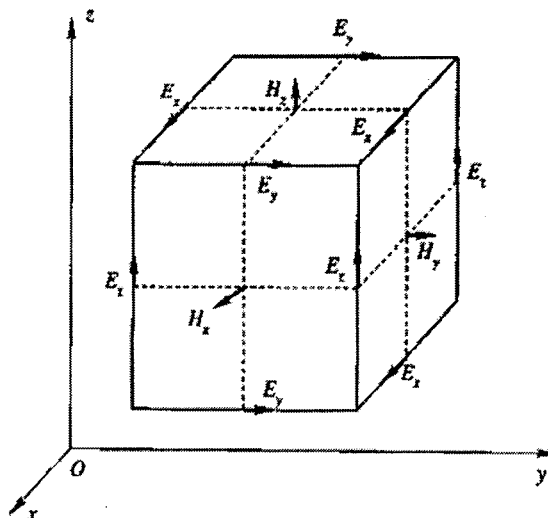


图 1.11 FDTD 离散中的 Yee 元胞。

另一个是 Yee 元胞，在 FDTD 离散中电场和磁场各节点的空间排布如图 1.11 所示。由图可见每一个磁场分量由四个电场分量环绕；同样，每一个电场分量由四个磁场分量环绕。这种电磁场分量的空间取样方式不仅符合法拉第感应定律和安培环路定律的自然结构，而且这种电磁场各分量的空间相对位置也适合于麦克斯韦方程的差分计算，能够恰当地描述电磁场的传播特性。

电场和磁场在时间顺序上交替抽样，抽样时间间隔彼此相差半个时间步，使麦克斯韦旋度方程离散以后构成显式差分方程，从而可以在时间上迭代求解，而不需要进行矩阵求逆运算。因而，由给定相应电磁问题的初始值及边界条件，利用 FDTD 方法就可以逐步推进地求得以后各个时刻空间电磁场的分布。

对于二维问题，设所有物理量均与  $z$  坐标无关，即  $\partial/\partial z = 0$ ，于是可得到二维情况下的差分方程：

$$\text{TE 波: } \begin{cases} \frac{\partial H_z}{\partial y} = \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma E_x \\ -\frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma E_y \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} - \sigma_m H_z \end{cases} ;$$

$$\text{TM 波: } \begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} = -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} - \sigma_m H_x \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} + \sigma_m H_y \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = -\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} + \sigma E_z \end{cases} ;$$

二维情况下的 Yee 元胞与三维相比比较简单，如图 1.12 所示。

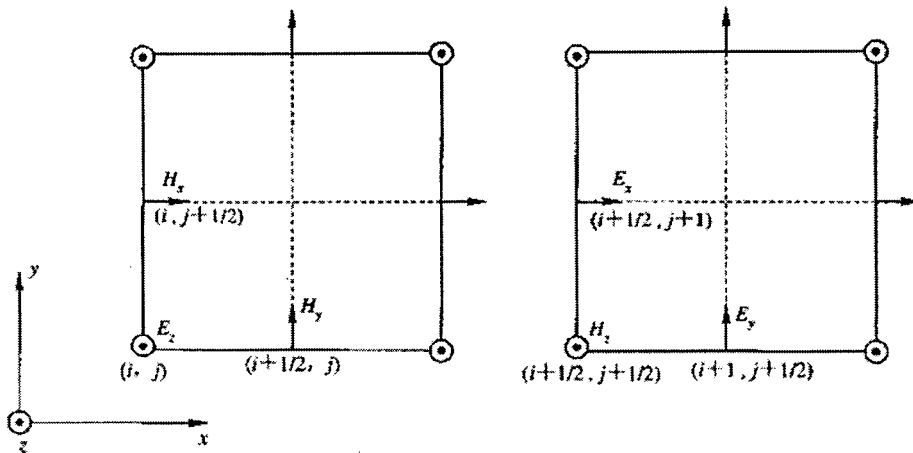


图 1.12 左图为二维 TE 波 Yee 元胞，右图为二维 TM 波 Yee 元胞。

一维情况下，设 TEM 波沿  $z$  方向传播，介质参数和场量均与  $x$ 、 $y$  无关，

即  $\partial/\partial x=0$ 、 $\partial/\partial y=0$ ，于是麦克斯韦方程为：

$$\begin{cases} -\frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma E_x \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} - \sigma_m H_y \end{cases}$$

一维情况  $E$ 、 $H$  分量空间节点取样如图 1.13 所示。

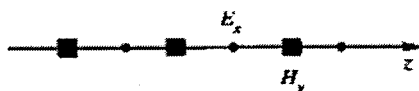


图 1.13 一维情况场分量空间节点取样。

这组方程既可以写成微分形式，也可以写成积分形式。FDTD 方法是由微分形式的麦克斯韦旋度方程出发进行差分离散。

FDTD 在电磁研究中应用十分广泛，包括辐射天线的分析，微波器件和导行波结构的研究，散射和雷达截面计算，周期结构分析，电子封装，电磁兼容分析，核电磁脉冲的传播和散射，微光学元器件中光的传播和衍射特性，双负介质中电磁波的传播特性，等等。

### 1.3.3 传输矩阵法<sup>[31]</sup>

传输矩阵法是将电磁场在实空间的格点位置展开，将麦克斯韦方程组化成传输矩阵形式，同样变成本征值求解问题。传输矩阵表示一层（面）格点的场强与紧邻的另一层（面）格点场强的关系，它假设在构成的空间中在同一个格点层（面）上有相同的态和相同的频率，这样可以利用麦克斯韦方程组将场从一个位置外推到整个晶体空间。这种方法对介电常数随频率变化的金属系统特别有效，而且由于传输矩阵小，矩阵元少，运算量小，同时在计算传输光谱时也是十分方便的。本文主要工作也是利用传输矩阵这种方法来进行，通过将拓扑绝缘体平板作为缺陷结构放入一维光子晶体内，然后计算这个结构的透射谱来研究拓扑绝缘体缺陷结构的表面性质，这个方法我们在下面几章中做详细讨论。

### 1.3.4 平面波展开法<sup>[32-33]</sup>

平面波展开法的基本思路是：将电磁场以平面波的形式展开，可以将麦克斯韦方程组化成一个本征方程，求解该方程的本征值得到传播的光子的本征频率。这种方法的不足之处是当光子晶体结构复杂或处理有缺陷的体系

时,可能因为计算能力的限制而不能计算或者难以准确计算。而且如果介电常数不是常数而是随频率变化时,就没有一个确定的本征方程形式,这种情况下根本无法求解。

实际理论分析中,还有很多其他的方法,如:有限元法、N阶法等。这些方法各有优缺点,在应用时要根据实际场合合理地选用。在光子晶体的研究中这些分析方法是十分重要的,由于光子晶体的制备非常困难,通常是先应用这些方法分析得出光子晶体的一些特性,再由试验来验证这些结论。

## 1.4 光子晶体的制备

光子晶体的制备有一定的难度,因为光子晶体的晶格尺度要求和光的波长具有相同的数量级,比如光通信波段(波长  $1.55\mu\text{m}$ )的光子晶体器件,要求其晶格在  $0.5\mu\text{m}$  左右。经过不断探索和试验,人们提出了可行的人工制备方法,如:介质棒堆积、精密机械钻孔、胶体颗粒自组织生长、胶体溶液自组织生长和半导体工艺等。用这些方法,通过人工地控制光子晶体中介电材料之间介电常数的配比和光子晶体的微周期性结构,可以制备出带有各种带隙的光子晶体。

## 1.5 拓扑绝缘体及其光学性质

### 1.5.1 拓扑绝缘体简介

拓扑绝缘体是一种新的量子物质态,完全不同于传统意义上的“金属”和“绝缘体”。这种物质态的体电子态是有能隙的绝缘体,而其表面则是无能隙的金属态。这种无能隙的表面金属态也完全不同于一般意义上的由于表面未饱和键或者是表面重构导致的表面态,拓扑绝缘体的表面金属态完全是由材料的体电子态的拓扑结构所决定,是由对称性所决定的,与表面的具体结构无关。也正是因为该表面金属态的出现是有对称性所决定的,它的存在非常稳定,基本不受到杂质与无序的影响。

其体电子态为绝缘态,但是在其表面却有自旋相关的导电通道,这意味着拓扑绝缘体在自旋电子学有潜在的应用前景。另外,在一个超导体附近的拓扑绝缘体可以产生满足非阿贝尔(非对易)统计的激子——马拉约那费米子。由于非阿贝尔粒子的拓扑性质受对称性保护,不会由于微小扰动而使量子态退相干引起计算错误,这使得拓扑绝缘体可以用于量子计算。

拓扑绝缘体材料有着独特的优点:首先,这类材料是纯的化学相,非常稳定且容易合成;第二,这类材料表面态中只有一个狄拉克点存在,是最简单的强拓扑绝缘体,这种简单性为理论模型的研究提供了很好的平台;第三,也是非常吸引人的一点,该材料的体能隙是非常大的,特别是 $\text{Bi}_2\text{Se}_3$ ,大约是

0.3 电子伏（等价于 3600K），远远超出室温能量尺度，这也意味着有可能实现室温低能耗的自旋电子器件。

这些重要特征保证了拓扑绝缘体将有可能在未来的电子技术发展中获得重要的应用，有着巨大的应用潜力。寻找具有足够大的体能隙并且具有化学稳定性的强拓扑绝缘体材料，成为人们目前关注的重要焦点和难点。

### 1.5.2 拓扑绝缘体光学性质简介

拓扑绝缘体的表面态一直是研究的热点，其在光学方面特异的性质更是引起广大研究者的兴趣<sup>[34-36]</sup>，具体的来说，当一束线偏振光垂直入射到拓扑绝缘体界面上时，透射光与反射光均有偏振角的变化，即法拉第角和克尔角，引起这种变化的原因是拓扑绝缘体表面态的奇异的磁电耦合性质，这种电磁性质与精细结构常数有关，因而，我们可以通过测量这些偏振角变化来测量精细结构常数<sup>[37-39]</sup>。在拓扑绝缘体表面性质计算中，我们可以通过拓扑绝缘体体系的拉格朗日方程看出，其与普通的材料的并不相同，多了拓扑项  $\frac{\Theta}{2\pi} \frac{\alpha}{2\pi} \vec{E} \cdot \vec{B}$ 。

在计算中，由于拓扑绝缘体体系拉格朗日方程中的拓扑项，导致了其本构方程与普通材料相比，多了磁电耦合项：

$$\begin{cases} D = \epsilon \cdot E + \alpha(\Theta/\pi)B \\ H = B/\mu - \alpha(\Theta/\pi)E \end{cases}$$

在新的本构方程下，我们可以通过界面电磁性质，写出拓扑绝缘体的界面传输矩阵，由此可以计算其在表面上的克尔角与法拉第角。许多工作对此进行了研究，但是，目前为止，许多工作主要集中在单拓扑绝缘体界面或者单拓扑绝缘体平板结构上，这种情况下，克尔角可以有很大变化，但法拉第角一般都比较小，约为精细结构常数量级。拓扑绝缘体表面态的这种奇异光学性质，主要表现在当一束线偏振光入射到其界面时，反射光和透射光均有偏振角的变化。反过来，许多工作也都是通过测量这两个偏振角度的变化来进行研究拓扑绝缘体表面性质。而我们下面讲述的是通过对透射谱的分析这种新颖的方法来研究拓扑绝缘体表面性质以及设计了新的测量精细结构常数的实验方法等。

我们这里所选择的方法是利用一维光子晶体缺陷结构来研究。我们在拓扑绝缘体上下表面镀上一层很薄的铁磁层并保持同方向磁化，或者镀上顺磁性材料，然后在垂直方向上加上一个微弱磁场使顺磁性材料被同方向磁化。这样镀上铁磁层后，当我们从下面入射一个线偏振光时，经过铁磁层就会有克尔角和法拉第角。

然后，我们这里将拓扑绝缘体平板放入光子晶体结构中，此时拓扑绝缘体平板做为光子晶体的缺陷，利用光子晶体缺陷性质来研究拓扑绝缘体表面态性质。我们发现这种结构下的克尔角和法拉第角有着比较新颖的现象，尤其是法拉

第角，其角度可以达到近乎 90 度。并且，当线偏振光入射，其透射光的偏振性质有着丰富的变化，可以是左旋偏振也可以是右旋偏振。另外，由角动量守恒我们可以知道，当入射光和透射光自旋差发生着变化时，其透射光会有一个横向位移产生。我们对此新颖的现象进行了理论分析，并给出了透射光将会出现环形光环的预言。并且，我们指出了通过测量带隙内透射峰位置来精确计算精细结构常数的方法。

## 1.6 本文的主要工作

本文工作主要是通过光子晶体缺陷态来对拓扑绝缘体表面性质进行研究，我们基于拓扑绝缘体的本构方程，定出了拓扑绝缘体表面的传输矩阵形式，然后将其放入到一维光子晶体内作为缺陷，通过传输矩阵方法来研究体系的光学性质，从而研究拓扑绝缘体的表面性质。

第二章我们主要讨论传输矩阵和其应用，并给出了一般情况下传输矩阵的计算方法。对于电磁波体系我们讨论了单界面的传输矩阵、介质内、以及周期体系的传输矩阵，另外，我们还讨论了平面波斜入射情况下的传输矩阵形式。

第三章中，我们对拓扑绝缘体界面上的传输矩阵进行了详细的分析讨论，这是本文的重点，我们给出了各种情况下的传输矩阵计算方法和过程。然后，我们还对透射谱分析过程进行了介绍，包括对透射椭圆偏振态的处理方法等。

第四章中，我们详细介绍了拓扑绝缘体作为一维光子晶体缺陷体系的光学特性，包括单拓扑绝缘体平板的光学性质，以及光子晶体参数的选择等。我们在这里对光子晶体各个参数进行了讨论，分析了各种情况下透射谱的变化情况，最后，我们给出了由此计算精细结构常数的一种方法。并对透射光产生巨大光学霍尔效应进行了分析探讨。

第五章中，我们概括和总结了本文的研究结果，并对其意义进行了讨论。

## 第二章 传输矩阵理论

### 2.1 传输矩阵简介

传输矩阵<sup>[40]</sup>是一种处理一维波动问题的有效的数值计算方法，我们用这种方法可以方便的计算量子体系的波传输问题，例如电子输运、电磁波传播、声子波以及激子波等问题。只要是关于波的传输问题，几乎都可以应用这种方法来进行研究。在研究过程中，对这种方法可以处理许多一维体系问题，可以是单独的一个界面，可以是平板结构，也可以是周期体系以及无序体系，并且，材料可以是无损耗，也可以是有损耗介质或者增益介质。这些应用都使得传输矩阵成为一种强大的数值分析工具。

#### 2.1.1 传输矩阵的特点

传输矩阵是用矩阵形式来描述物理量之间关系的一种数值仿真方法，传输矩阵的作用是连接介质面两侧的电场关系，当在介质内部时，它连接的是空间中两点之间的传播相位关系，另外，它还可以描述在这两点之间的衰减或增益。传输矩阵方法是处理稳态问题的一个比较常用的方法，这个方法应用非常广泛，尤其是用在周期性交替排列的介质体系中，它将体系中两点之见的电磁场关系通过一个矩阵联系起来。

传输矩阵这种方法的要求矩阵元少，运算量小，运算速度快。在处理周期体系问题时，我们只要将各个矩阵元按顺序乘起来即可用来描述体系两边的参量关系，用这个方法求解的关键是求出每个界面的矩阵及每个介质内的传播矩阵。

#### 2.1.2 传输矩阵方法应用举例

传输矩阵是描述物理量之间关系的一种计算方法，这种物理量可以是各种形式的问题，在电路网络中，节点之间的电压值跟节点之间的元件有着密切关系，电阻、电容、电感有着不同的电抗特性，当节点之间有这些元件时，我们可以用一个矩阵将两节点的电压联系起来。在级联电路中，我们将每个节点的传输矩阵按顺序乘起来，如图 2.1 所示，就得到了级联电路两端的电压关系：

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

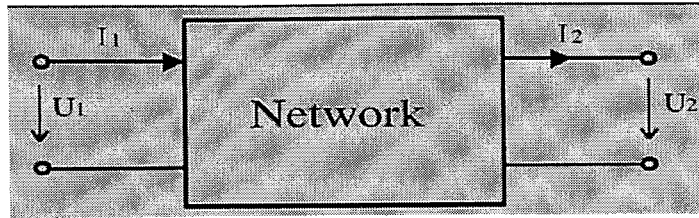


图 2.1 电路网络示意图。

对于电子体系的电导传输问题，由于电子遵循的是薛定谔方程：

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x)}{\partial x^2} + [V(x) - E] \Psi(x) = 0$$

这里  $\Psi(x)$  为电子运动波函数， $E$  为电子的能量， $V(x)$  为势阱：

$$V(x) = \begin{cases} V(x), & \text{当 } 0 \leq x \leq l, \\ 0, & \text{当 } x < 0 \text{ 或 } x > l. \end{cases}$$

体系的波函数可以写成如下形式：

$$\Psi_L(x) = \Psi_L^+(x) + \Psi_L^-(x), x \leq 0,$$

$$\Psi_R(x) = \Psi_R^+(x) + \Psi_R^-(x), x \geq l.$$

用传输矩阵形式来描述体系左右波函数的关系为：

$$\begin{pmatrix} \Psi_R^+(x) \\ \Psi_R^-(x) \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} \Psi_L^+(x) \\ \Psi_L^-(x) \end{pmatrix}. \text{ 其中 } M \text{ 为体系的传输矩阵，描述了电子体系的输运}$$

性质，结构如图 2.2 所示。

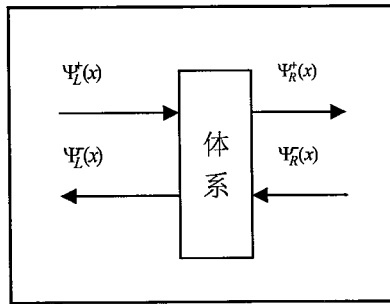


图 2.2 电子体系传输矩阵示意图。

相比于电子体系，电磁波体系的传输矩阵更为复杂。因为电子传输是标量只是一维问题，而电磁波是矢量，在非垂直入射情况下，其是二维问题。本文主要应用的就是电磁波体系下的传输矩阵方法，下面这一节中我们将详细讲述这种传输矩阵的计算方法及应用。

## 2.2 传输矩阵中矩阵元的计算方法

传输矩阵计算方法中最基本的是其每个单元的传输矩阵，通过将各个模块的传输矩阵按顺序相乘，我们就可以计算体系两侧的电场关系，进而我们可以得



到体系的电场分布以及体系的透射率、反射率等信息。

### 2.2.1 单界面传输矩阵

下面我们详细讨论传输矩阵中基本单元矩阵的计算方法，对于普通材料，由 Maxwell 方程组我们可知两种材料内的电场图像，Maxwell 方程由  $E$ ,  $D$ ,  $H$ ,  $B$  组成，在两种材料的界面上，我们可以通过

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \\ \vec{n} \cdot (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = 0 \end{cases}$$

这两个条件来求其界面两侧的电场关系，式子中， $\vec{E}_1$  为界面上左边的电场， $\vec{E}_2$  为界面上右边的电场， $\vec{n}$  为垂直于界面的法线方向单位矢量。

我们先讨论简单的线偏振光垂直界面入射情况：

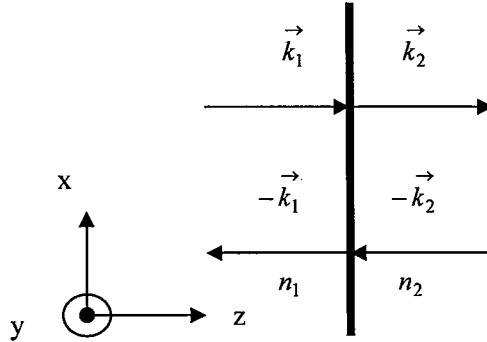


图 2.3 垂直入射单界面传输矩阵示意图。

假设界面左边有向右、向左两个方向传播的电磁波  $\vec{E}_1^+$ 、 $\vec{E}_1^-$ ，右边有

$\vec{E}_2^+$ 、 $\vec{E}_2^-$ ，如图 2.3 所示，这里我们假设偏振沿  $x$  轴。（其他方向等效）

$$\vec{E}_1^+ = E_1^+ e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}} \cdot \hat{x}, \quad \vec{E}_1^- = E_1^- e^{-i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}} \cdot \hat{x};$$

$$\vec{E}_2^+ = E_2^+ e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{x}} \cdot \hat{x}, \quad \vec{E}_2^- = E_2^- e^{-i\vec{k}_2 \cdot \vec{x}} \cdot \hat{x};$$

$$\vec{n} = \hat{z}, \quad \vec{k}_1 = k_1 \cdot \hat{z}, \quad \vec{k}_2 = k_2 \cdot \hat{z};$$

$$n_1 = \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}, \quad n_2 = \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2};$$

由 Maxwell 方程我们可以得到：

$$\vec{B}_1^+ = n_1 \cdot E_1^+ e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}} \cdot \hat{y}; \quad \vec{B}_1^- = -n_1 \cdot E_1^- e^{-i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}} \cdot \hat{y};$$

$$\vec{B}_2^+ = n_2 \cdot E_2^+ e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{x}} \cdot \hat{y}; \quad \vec{B}_2^- = -n_2 \cdot E_2^- e^{-i\vec{k}_2 \cdot \vec{x}} \cdot \hat{y};$$

由上可知，界面左边和右边的总电场分别为：

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_1^+ + \vec{E}_1^- = (E_1^+ e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}} + E_1^- e^{-i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}}) \cdot \hat{x},$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_2^+ + \vec{E}_2^- = (E_2^+ e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{x}} + E_2^- e^{-i\vec{k}_2 \cdot \vec{x}}) \cdot \hat{x};$$

界面两边相应的磁场强度为：

$$\vec{H}_1 = \vec{H}_1^+ + \vec{H}_1^- = \frac{n_1}{\mu_1} \cdot (E_1^+ e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}} - E_1^- e^{-i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}}) \cdot \hat{y},$$

$$\vec{H}_2 = \vec{H}_2^+ + \vec{H}_2^- = \frac{n_2}{\mu_2} \cdot (E_2^+ e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{x}} - E_2^- e^{-i\vec{k}_2 \cdot \vec{x}}) \cdot \hat{y};$$

然后，我们将两边电场强度和磁场强度代入到边界连续条件中，得到：

$$\begin{cases} E_1^+ + E_1^- = E_2^+ + E_2^- \\ \frac{n_1}{\mu_1} E_1^+ - \frac{n_1}{\mu_1} E_1^- = \frac{n_2}{\mu_2} E_2^+ - \frac{n_2}{\mu_2} E_2^- \end{cases}$$

界面两侧介质为普通磁性材料， $\mu_1$ 、 $\mu_2$  均为 1（高斯单位），将上述两组方程联立，写成矩阵形式，有：

$$\begin{pmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \end{pmatrix} = \frac{1}{2n_1} \begin{pmatrix} n_1 + n_2 & n_1 - n_2 \\ n_1 - n_2 & n_1 + n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2^+ \\ E_2^- \end{pmatrix}$$

其中  $\frac{1}{2n_1} \begin{pmatrix} n_1 + n_2 & n_1 - n_2 \\ n_1 - n_2 & n_1 + n_2 \end{pmatrix}$  就是垂直入射情况下介质 1 到介质 2 界面上的传输矩阵形式，它连接了界面两侧稳态情况的电场关系。

当在斜入射情况下时，我们分 TE 模式，TM 模式入射两种情况来讨论，当 TE 模式入射，即电场振动方向平行于折射平面，我们仍按上述方法进行求解，可以得到界面两侧的电场联系关系为：

$$\begin{pmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \end{pmatrix} = \frac{1}{2n_1} \begin{pmatrix} n_1 + n_2 \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} & n_1 - n_2 \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} \\ n_1 - n_2 \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} & n_1 + n_2 \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2^+ \\ E_2^- \end{pmatrix}$$

其中  $\theta_1$  是在介质 1 内电磁波传播方向与界面法向方向的夹角， $\theta_2$  是在介质 2 内电磁波传播方向与界面法向方向的夹角，其中

$\frac{1}{2n_1} \begin{pmatrix} n_1 + n_2 \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} & n_1 - n_2 \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} \\ n_1 - n_2 \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} & n_1 + n_2 \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} \end{pmatrix}$ 就是我们所求 TE 模式下联系界面两侧电场关系的

的传输矩阵。

当 TM 模式入射，即入射光电场振动方向垂直入折射平面时，联系界面两侧电场的矩阵连接关系为：

$$\begin{pmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \end{pmatrix} = \frac{1}{2n_1} \begin{pmatrix} n_1 \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} + n_2 & n_1 \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} - n_2 \\ n_1 \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} - n_2 & n_1 \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} + n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2^+ \\ E_2^- \end{pmatrix}$$

其中  $\frac{1}{2n_1} \begin{pmatrix} n_1 \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} + n_2 & n_1 \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} - n_2 \\ n_1 \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} - n_2 & n_1 \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} + n_2 \end{pmatrix}$  为所求出的 TM 模式斜入射情况下，

连接介质 1、2 之间界面上电磁场关系的传输矩阵，此处  $\theta_1$  是仍为介质 1 内电磁波传播方向与界面法向方向的夹角， $\theta_2$  为介质 2 内电磁波传播方向与界面法向方向的夹角。

### 2.2.2 介质内传输矩阵

我们这里考虑的是折射率均匀的情况，所以，在介质内部两点之间的电场关系只是电场的空间传播关系。因此，我们可以写出在介质 1、2 内的传输矩阵形式为： $\begin{pmatrix} e^{i k_1 l_1} & 0 \\ 0 & e^{-i k_1 l_1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{i k_2 l_2} & 0 \\ 0 & e^{-i k_2 l_2} \end{pmatrix}$ ；其中  $k_1$ 、 $k_2$  分别为电磁

波在介质 1、2 内的传播波矢； $l_1$ 、 $l_2$  为电磁波在介质 1、2 内的传播距离。对于

斜入射情况，介质 1、2 内的传输矩阵形式为： $\begin{pmatrix} e^{i k_1 l_1 \cos \theta_1} & 0 \\ 0 & e^{-i k_1 l_1 \cos \theta_1} \end{pmatrix},$

$\begin{pmatrix} e^{i k_2 l_2 \cos \theta_2} & 0 \\ 0 & e^{-i k_2 l_2 \cos \theta_2} \end{pmatrix}$ ，其中  $\theta_1$  为介质 1 内电磁波传播方向与界面法向方向的夹

角， $\theta_2$  为介质 2 内电磁波传播方向与界面法向方向的夹角，这里的波矢一般为复数，包含了材料的折射率，增益或衰减信息，其实部表示波的传播项，虚部表示衰减或者增益。对于有损材料，我们可以通过这一项来进行描述材料参数，本文

中所设计的材料均没有考虑其损耗，所以，我们这里的波矢均为实数。

### 2.2.3 周期体系传输矩阵

当我们用传输矩阵来处理周期结构问题时，我们只需把上述矩阵按顺序相乘起来，就得到了一维周期体系下介质左边与右边的电场关系，这就是传输矩阵的最基本用法。传输矩阵这种方法在处理周期结构或薄膜问题时，优势尤其明显。

由上面的传输矩阵计算，我们就可以知道一维体系内各个点之间的电场连接关系。当我们将实际入射光的电场大小代入，通过体系内各点之间电场的比值关系，就可以知道整个体系内的电场图像。用传输矩阵方法求出的是电场在体系内传播的稳态解，所以，我们从左边计算和从右边计算，效果是一样的。

当讨论周期结构透射率及反射率时，我们可以将右侧电场设为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ，从结果开始算起，然后对求出的入射光进行归一化，通过体系两侧电场比例关系，我们可求出所需入射光模式下的电磁波传播图像。

### 2.3 传输矩阵小结

本章我们介绍了传输矩阵的特点和其应用，并详细分析了一维电磁波体系的传输矩阵各种矩阵元的计算方法。通过本章的介绍，我们对传输矩阵计算一维光子晶体透射、反射率以及传播电场图像有了基本的理解。

### 第三章 拓扑绝缘体体系传输矩阵的计算方法

我们这里主要运用了一维光子晶体缺陷知识，即将拓扑绝缘体平板放入到一维光子晶体内作为缺陷结构，来研究整个一维体系的透射谱性质，通过缺陷态的透射谱来分析拓扑绝缘体的表面性质。

#### 3.1 单拓扑绝缘体界面上的透射、反射计算

在本工作之前，有许多对单拓扑绝缘体界面电磁性质的研究工作，在单拓扑绝缘体界面上，研究方法一般是入射一束线偏振光，通过透射光和反射光偏振角度的变化，即法拉第角和克尔角的大小，来研究拓扑绝缘体的表面性质，我们这里首先对这种单拓扑绝缘体界面的电磁性质进行分析。

我们先分析拓扑绝缘体界面上的折射图像，在下一节再详细讲述其传输矩阵的形式及计算方法。单界面非垂直入射情况如图 3.1 所示。

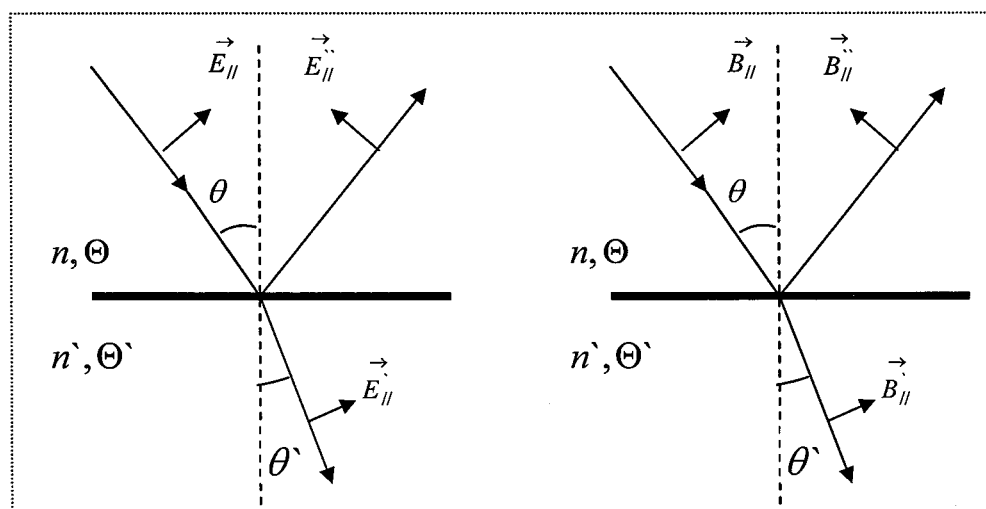


图 3.1 拓扑绝缘体界面折射示意图：左图为 TM 模式，右图为 TE 模式。

图中界面上边介质为普通材料，折射率为  $n$ ， $\Theta = 0$ ；界面下边介质为拓扑绝缘体材料，折射率为  $n'$ ， $\Theta' = \pi$ ； $\theta$  为入射角， $\theta'$  为折射角，对于拓扑绝缘体界面的折射情况仍遵循 Snell 定律，可知两者关系为： $n \cdot \sin \theta = n' \cdot \sin \theta'$ 。我们这里用 TE、TM 两个模式来描述拓扑绝缘体界面上折射过程的原因是：由于在拓扑绝缘体表面上存在磁电耦合，使得入射 TE 模式电磁波时，折射、反射光均有 TM 模式分量产生，同理，当入射 TM 模式电磁波时，折射、反射光中也均有 TE 模式分量产生。这是由于在界面处材料的电磁本构方程发生了变化。在普通材料内，其电磁本构方程为： $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ ， $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$ ；而在拓扑绝缘体内，其本构

方程含有了拓扑因子, 为:  $\vec{D} = \varepsilon \vec{E} + \alpha \frac{\Theta}{\pi} \vec{B}$ ,  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} - \alpha \frac{\Theta}{\pi} \vec{E}$ ; 由以上分析

作为基础, 我们就可以通过边界连续条件来计算折射光、反射光与入射光之间的关系, 边界连续条件为:

$$\begin{cases} \vec{n} \times (\vec{E}' - \vec{E} - \vec{E}'') = 0 \\ \vec{n} \times (\vec{H}' - \vec{H} - \vec{H}'') = 0 \end{cases}$$

通过边界连续条件中第一个电场平行分量连续的条件, 我们可以得到:

$$\begin{cases} E_{\perp}' = E_{\perp} + E_{\perp}'' \\ E_{\parallel}' \cos \theta' = E_{\parallel} \cos \theta - E_{\parallel}'' \cos \theta'' \end{cases}$$

然后, 我们通过边界连续条件中第二个条件得到:

$$\begin{cases} \frac{B_{\perp}'}{\mu} + \alpha \frac{\Theta}{\pi} E_{\perp}' - \frac{B_{\perp}}{\mu} - \alpha \frac{\Theta}{\pi} E_{\perp} - \frac{B_{\perp}''}{\mu} - \alpha \frac{\Theta}{\pi} E_{\perp}'' = 0 \\ \frac{B_{\parallel}' \cos \theta'}{\mu} - \alpha \frac{\Theta}{\pi} E_{\parallel}' \cos \theta' - \frac{B_{\parallel} \cos \theta}{\mu} + \alpha \frac{\Theta}{\pi} E_{\parallel} \cos \theta + \frac{B_{\parallel}'' \cos \theta''}{\mu} - \alpha \frac{\Theta}{\pi} E_{\parallel}'' \cos \theta'' = 0 \end{cases}$$

由Maxwell方程<sup>[41]</sup>我们可知  $|B| = \sqrt{\varepsilon\mu} |E|$ , 具体到我们这个界面上, 可以得到以下关系:

$$\begin{cases} B_{\perp}' = \sqrt{\varepsilon\mu} E_{\parallel}' \\ B_{\parallel}' = \sqrt{\varepsilon\mu} E_{\perp}' \end{cases}, \quad \begin{cases} B_{\perp}'' = \sqrt{\varepsilon\mu} E_{\parallel}'' \\ B_{\parallel}'' = \sqrt{\varepsilon\mu} E_{\perp}'' \end{cases};$$

将上述关系代入到磁场连续的方程组中, 可得:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}} E_{\parallel}' + \alpha \frac{\Theta'}{\pi} E_{\perp}' - \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_{\parallel} - \alpha \frac{\Theta}{\pi} E_{\perp} - \sqrt{\frac{\varepsilon''}{\mu''}} E_{\parallel}'' - \alpha \frac{\Theta''}{\pi} E_{\perp}'' = 0 \\ \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}} E_{\perp}' \cos \theta' - \alpha \frac{\Theta'}{\pi} E_{\parallel}' \cos \theta' - \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_{\perp} \cos \theta + \alpha \frac{\Theta}{\pi} E_{\parallel} \cos \theta + \sqrt{\frac{\varepsilon''}{\mu''}} E_{\perp}'' \cos \theta'' - \alpha \frac{\Theta''}{\pi} E_{\parallel}'' \cos \theta'' = 0 \end{cases}$$

将两个方程组联立, 消去其中  $E_{\perp}'$ ,  $E_{\parallel}''$  两项, 我们可以得到:

$$\begin{pmatrix} \bar{a} \cos \theta' & -(n' \cos \theta' + n \cos \theta) \\ n' \cos \theta' + n \cos \theta & \bar{a} \cos \theta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\perp}' \\ E_{\parallel}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{a} \cos \theta' & n \cos \theta' - n' \cos \theta \\ n \cos \theta' - n' \cos \theta & \bar{a} \cos \theta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\perp} \\ E_{\parallel} \end{pmatrix},$$

其中  $\bar{a} = \frac{\alpha(\Theta' - \Theta)}{\pi}$ ;

对上矩阵方程进行整理, 将其矩阵写到右边, 我们可以得到:

$$\begin{pmatrix} E_{\perp}'' \\ E_{\parallel}'' \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} (n^2 - n'^2 - \bar{a}^2) + nn' \xi_{-} & 2\bar{a}n \\ 2\bar{a}n & -(n^2 - n'^2 - \bar{a}^2) + nn' \xi_{-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\perp} \\ E_{\parallel} \end{pmatrix}$$

其中  $\Delta = \bar{a}^2 + n^2 + n'^2 + nn' \xi_{+}$ ,  $\xi_{\pm} = \frac{\cos \theta}{\cos \theta'} \pm \frac{\cos \theta'}{\cos \theta}$ ;

这就是反射光与入射光之间的矩阵关系式。同理,我们还可以消去  $E_{\perp}'$ ,  $E_{\parallel}'$ , 得到折射光与入射光的矩阵关系式, 如下:

$$\begin{pmatrix} E_{\perp}' \\ E_{\parallel}' \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 2n^2 + 2nn' \frac{\cos \theta}{\cos \theta'} & 2\bar{a}n \\ -2\bar{a}n & 2n^2 \frac{\cos \theta}{\cos \theta'} + 2nn' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\perp} \\ E_{\parallel} \end{pmatrix}$$

上面分析的是普通角度入射情况, 对于垂直入射情况, 有  $\theta = \theta' = 0$ ,  $\xi_{-} = 0$ ,

$\xi_{+} = 2$ ; 将其代入上述两个关系式中, 我们可以得到:

反射光与入射光关系:

$$\begin{pmatrix} E_{\perp}'' \\ E_{\parallel}'' \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} n^2 - n'^2 - \bar{a}^2 & 2\bar{a}n \\ 2\bar{a}n & -(n^2 - n'^2 - \bar{a}^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\perp} \\ E_{\parallel} \end{pmatrix}$$

折射光与入射光关系:

$$\begin{pmatrix} E_{\perp}' \\ E_{\parallel}' \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 2n^2 + 2nn' & 2\bar{a}n \\ -2\bar{a}n & 2n^2 + 2nn' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\perp} \\ E_{\parallel} \end{pmatrix},$$

其中:  $\Delta = \bar{a}^2 + (n' + n)^2$ ;

此时, 我们可以通过上述两式来研究垂直入射情况下所产生的克尔角和法拉第角, 具体方法是用 TE 模式光入射, 即对  $E_{\perp} = 1$ ,  $E_{\parallel} = 0$  情况下的折射光与反射光进行分析, 由上述关系我们可以得到:

$$\text{克尔角: } \frac{E_{\parallel}'}{E_{\perp}'} = \frac{2\bar{a}n}{n^2 - n'^2 - \bar{a}^2} = \tan \phi_K$$

$$\text{法拉第角: } \frac{E_{\parallel}''}{E_{\perp}''} = \frac{-2\bar{a}n}{2n^2 + 2nn'} = \frac{\alpha(\Theta - \Theta')}{\pi(n+n')} = \frac{2\alpha\Delta}{n+n'} = \tan \phi_F$$

### 3.2 单拓扑绝缘体界面上垂直入射的传输矩阵

上节我们介绍了单拓扑绝缘体界面上的电磁波折射、反射情况, 下面我们详细讨论单拓扑绝缘体界面上的传输矩阵形式。传输矩阵的计算与上面情况有些类似, 我们只是在上面情况下再加入一个传播方向的电场, 同样利用界面上电场、

磁场的平行分量相等条件来计算，得到稳态情况下的界面上电场传输图像。

对于拓扑绝缘体单界面垂直入射情况，界面与  $z$  轴垂直，我们假设界面左边为普通材料，折射率为  $n_1$ ， $\Theta_1 = 0$ ；界面右边为拓扑绝缘体材料，折射率为  $n_2$ ，

$\Theta_2 = \pi$ ；界面上有左行波和右行波，如图 3.2 所示。

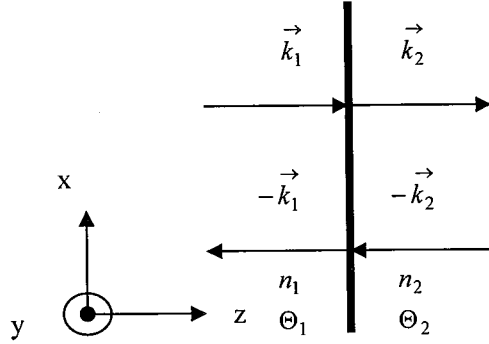


图 3.2 拓扑绝缘体界面上传输矩阵示意图。

图 3.2 中界面左边电场由右行波和左行波组成：

$$\vec{E}_1^+ = (\vec{E}_{x_1}^+ \cdot \hat{x} + E_{y_1}^+ \cdot \hat{y}) e^{i\vec{k}_1 \cdot \hat{x}}, \quad \vec{E}_1^- = (\vec{E}_{x_1}^- \cdot \hat{x} + E_{y_1}^- \cdot \hat{y}) e^{-i\vec{k}_1 \cdot \hat{x}};$$

在界面右边电场同样由右行波和左行波组成：

$$\vec{E}_2^+ = (\vec{E}_{x_2}^+ \cdot \hat{x} + E_{y_2}^+ \cdot \hat{y}) e^{i\vec{k}_2 \cdot \hat{x}}, \quad \vec{E}_2^- = (\vec{E}_{x_2}^- \cdot \hat{x} + E_{y_2}^- \cdot \hat{y}) e^{-i\vec{k}_2 \cdot \hat{x}};$$

其中  $\vec{n} = \hat{z}$  为垂直界面的单位矢量； $\vec{k}_1 = k_1 \cdot \hat{z}$ 、 $\vec{k}_2 = k_2 \cdot \hat{z}$  为电磁波在

介质 1、2 内的传播波矢； $n_1 = \sqrt{\epsilon_1 \mu_1}$ 、 $n_2 = \sqrt{\epsilon_2 \mu_2}$  为介质 1、2 的折射率；

由 Maxwell 方程，我们不难推出界面两侧各电场所对应的磁场强度：

$$\vec{B}_1^+ = n_1 \cdot (\vec{E}_{x_1}^+ \cdot \hat{y} - E_{y_1}^+ \cdot \hat{x}) e^{i\vec{k}_1 \cdot \hat{x}};$$

$$\vec{B}_1^- = -n_1 \cdot (\vec{E}_{x_1}^- \cdot \hat{y} - E_{y_1}^- \cdot \hat{x}) e^{-i\vec{k}_1 \cdot \hat{x}};$$

$$\vec{B}_2^+ = n_2 \cdot (\vec{E}_{x_2}^+ \cdot \hat{y} - E_{y_2}^+ \cdot \hat{x}) e^{i\vec{k}_2 \cdot \hat{x}};$$

$$\vec{B}_2^- = -n_2 \cdot (\vec{E}_{x_2}^- \cdot \hat{y} - E_{y_2}^- \cdot \hat{x}) e^{-i\vec{k}_2 \cdot \hat{x}};$$

所以，我们可以得到界面两侧的总电场为：



$$\vec{E}_1 = \vec{E}_1^+ + \vec{E}_1^- = \left( E_{x_1}^+ \cdot \hat{x} + E_{y_1}^+ \cdot \hat{y} \right) e^{i\vec{k}_1 \cdot \hat{x}} + \left( E_{x_1}^- \cdot \hat{x} + E_{y_1}^- \cdot \hat{y} \right) e^{-i\vec{k}_1 \cdot \hat{x}},$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_2^+ + \vec{E}_2^- = \left( E_{x_2}^+ \cdot \hat{x} + E_{y_2}^+ \cdot \hat{y} \right) e^{i\vec{k}_2 \cdot \hat{x}} + \left( E_{x_2}^- \cdot \hat{x} + E_{y_2}^- \cdot \hat{y} \right) e^{-i\vec{k}_2 \cdot \hat{x}};$$

对于磁场强度的求解, 我们这里代入拓扑绝缘体的本构方程, 可以得到相应的磁化强度为:

$$\vec{H}_1^+ = \frac{1}{\mu_1} \vec{B}_1^+ - \frac{\alpha \cdot \Theta_1}{\pi} \vec{E}_1^+ = \frac{n_1}{\mu_1} \cdot \left( E_{x_1}^+ \cdot \hat{y} - E_{y_1}^+ \cdot \hat{x} \right) e^{i\vec{k}_1 \cdot \hat{x}} - \frac{\alpha \cdot \Theta_1}{\pi} \left( E_{x_1}^+ \cdot \hat{x} + E_{y_1}^+ \cdot \hat{y} \right) e^{i\vec{k}_1 \cdot \hat{x}};$$

$$\vec{H}_1^- = \frac{1}{\mu_1} \vec{B}_1^- - \frac{\alpha \cdot \Theta_1}{\pi} \vec{E}_1^- = -\frac{n_1}{\mu_1} \cdot \left( E_{x_1}^- \cdot \hat{y} - E_{y_1}^- \cdot \hat{x} \right) e^{-i\vec{k}_1 \cdot \hat{x}} - \frac{\alpha \cdot \Theta_1}{\pi} \left( E_{x_1}^- \cdot \hat{x} + E_{y_1}^- \cdot \hat{y} \right) e^{-i\vec{k}_1 \cdot \hat{x}};$$

$$\vec{H}_2^+ = \frac{1}{\mu_2} \vec{B}_2^+ - \frac{\alpha \cdot \Theta_2}{\pi} \vec{E}_2^+ = \frac{n_2}{\mu_2} \cdot \left( E_{x_2}^+ \cdot \hat{y} - E_{y_2}^+ \cdot \hat{x} \right) e^{i\vec{k}_2 \cdot \hat{x}} - \frac{\alpha \cdot \Theta_2}{\pi} \left( E_{x_2}^+ \cdot \hat{x} + E_{y_2}^+ \cdot \hat{y} \right) e^{i\vec{k}_2 \cdot \hat{x}};$$

$$\vec{H}_2^- = \frac{1}{\mu_2} \vec{B}_2^- - \frac{\alpha \cdot \Theta_2}{\pi} \vec{E}_2^- = -\frac{n_2}{\mu_2} \cdot \left( E_{x_2}^- \cdot \hat{y} - E_{y_2}^- \cdot \hat{x} \right) e^{-i\vec{k}_2 \cdot \hat{x}} - \frac{\alpha \cdot \Theta_2}{\pi} \left( E_{x_2}^- \cdot \hat{x} + E_{y_2}^- \cdot \hat{y} \right) e^{-i\vec{k}_2 \cdot \hat{x}};$$

界面两侧的总磁化强度为:

$$\vec{H}_1 = \vec{H}_1^+ + \vec{H}_1^- ,$$

$$\vec{H}_2 = \vec{H}_2^+ + \vec{H}_2^- ;$$

上面, 我们求出了单拓扑绝缘体界面两侧的总电场和总磁场, 由边界连续条件:

$$\begin{cases} \vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \\ \vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = 0 \end{cases}$$

我们就可以对其界面传输矩阵进行计算, 由第一个边界连续条件, 可得:

$$\begin{cases} E_{x_1}^+ + E_{x_1}^- = E_{x_2}^+ + E_{x_2}^- \\ E_{y_1}^+ + E_{y_1}^- = E_{y_2}^+ + E_{y_2}^- \end{cases}$$

而由第二个边界连续条件我们可以得到:

$$\begin{cases} -\left( \frac{n_1}{\mu_1} E_{y_1}^+ + \frac{\alpha \cdot \Theta_1}{\pi} E_{x_1}^+ \right) + \left( \frac{n_1}{\mu_1} E_{y_1}^- - \frac{\alpha \cdot \Theta_1}{\pi} E_{x_1}^- \right) = -\left( \frac{n_2}{\mu_2} E_{y_2}^+ + \frac{\alpha \cdot \Theta_2}{\pi} E_{x_2}^+ \right) + \left( \frac{n_2}{\mu_2} E_{y_2}^- - \frac{\alpha \cdot \Theta_2}{\pi} E_{x_2}^- \right) \\ -\left( \frac{n_1}{\mu_1} E_{x_1}^+ - \frac{\alpha \cdot \Theta_1}{\pi} E_{y_1}^+ \right) + \left( \frac{n_1}{\mu_1} E_{x_1}^- + \frac{\alpha \cdot \Theta_1}{\pi} E_{y_1}^- \right) = -\left( \frac{n_2}{\mu_2} E_{x_2}^+ - \frac{\alpha \cdot \Theta_2}{\pi} E_{y_2}^+ \right) + \left( \frac{n_2}{\mu_2} E_{x_2}^- + \frac{\alpha \cdot \Theta_2}{\pi} E_{y_2}^- \right) \end{cases}$$

将上述两组方程联立, 写成矩阵形式, 有:

$$\begin{pmatrix} E_{x_1}^+ \\ E_{y_1}^+ \\ E_{x_1}^- \\ E_{y_1}^- \end{pmatrix} = \frac{1}{2n_1} \begin{pmatrix} n_1 + n_2 & \bar{a} & n_1 - n_2 & \bar{a} \\ -\bar{a} & n_1 + n_2 & -\bar{a} & n_1 - n_2 \\ n_1 - n_2 & -\bar{a} & n_1 + n_2 & -\bar{a} \\ \bar{a} & n_1 - n_2 & \bar{a} & n_1 + n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{x_2}^+ \\ E_{y_2}^+ \\ E_{x_2}^- \\ E_{y_2}^- \end{pmatrix}$$

其中  $\bar{a} = \frac{\alpha \cdot (\Theta_2 - \Theta_1)}{\pi}$ ，这就是拓扑绝缘体界面上的传输矩阵形式。在对这个

界面的矩阵分析过程中，我们没有定义  $\bar{a} = \frac{\alpha \cdot (\Theta_2 - \Theta_1)}{\pi}$  的具体值，所以这个矩

阵是可以处理包括拓扑绝缘体与普通材料、拓扑绝缘体与拓扑绝缘体、普通材料与普通材料在内的几种界面问题。对于其他界面，我们可以将其界面左右介质参数代入上面式子，即可类比写出其界面传输矩阵。比如，我们用这个矩阵来计算

普通材料间界面时，由于  $\bar{a} = 0$ ，TE、TM 模式之间并不会造成耦合。与第二章所讲的  $2 \times 2$  传输矩阵计算结果一致。

### 3.3 单拓扑绝缘体界面上斜入射的传输矩阵

上节我们详细介绍了拓扑绝缘体界面上的传输矩阵，在我们的计算中，还涉及到了斜入射的情况，下面我们详细介绍一下拓扑绝缘体界面上斜入射平面波时的传输矩阵形式。

拓扑绝缘体界面斜入射情况如图 3.3 所示，我们同时画出了 TE、TM 两种模式的电场界面传输图像；

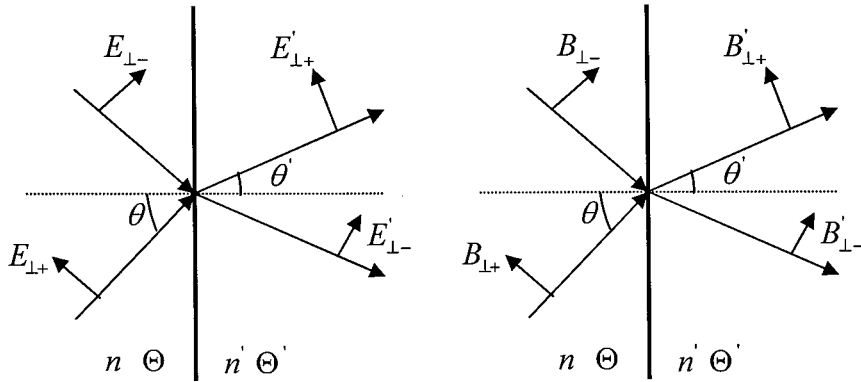


图 3.3 拓扑绝缘体界面斜入射示意图：左图为 TE 模式，右图为 TM 模式。

仍由边界连续条件  $\begin{cases} \vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \\ \vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = 0 \end{cases}$  来进行计算，代入拓扑绝缘

体的本构方程，由连续条件中第一个电场连续条件，我们可以得到：

$$\begin{cases} E_{\perp+} \cos\theta + E_{\perp-} \cos\theta = E'_{\perp+} \cos\theta' + E'_{\perp-} \cos\theta' \\ E_{\parallel+} + E_{\parallel-} = E'_{\parallel+} + E'_{\parallel-} \end{cases}$$

由第二个磁场连续条件，可得：

$$\begin{cases} -\frac{B_{\perp+}}{\mu} \cos\theta - \alpha \frac{\Theta}{\pi} E_{\perp+} \cos\theta + \frac{B_{\perp-}}{\mu} \cos\theta - \alpha \frac{\Theta}{\pi} E_{\perp-} \cos\theta = -\frac{B'_{\perp+}}{\mu} \cos\theta' - \alpha \frac{\Theta'}{\pi} E'_{\perp+} \cos\theta' + \frac{B'_{\perp-}}{\mu} \cos\theta' - \alpha \frac{\Theta'}{\pi} E'_{\perp-} \cos\theta' \\ \frac{B_{\parallel+}}{\mu} - \alpha \frac{\Theta}{\pi} E_{\parallel+} - \frac{B_{\parallel-}}{\mu} - \alpha \frac{\Theta}{\pi} E_{\parallel-} = \frac{B'_{\parallel+}}{\mu} - \alpha \frac{\Theta'}{\pi} E'_{\parallel+} - \frac{B'_{\parallel-}}{\mu} - \alpha \frac{\Theta'}{\pi} E'_{\parallel-} \end{cases}$$

将

$$\begin{cases} B_{\perp+} = \sqrt{\varepsilon\mu} E_{\parallel+} \\ B_{\parallel+} = \sqrt{\varepsilon\mu} E_{\perp+} \\ B_{\perp-} = \sqrt{\varepsilon\mu} E_{\parallel-} \\ B_{\parallel-} = \sqrt{\varepsilon\mu} E_{\perp-} \end{cases}, \quad \begin{cases} B'_{\perp+} = \sqrt{\varepsilon'\mu'} E'_{\parallel+} \\ B'_{\parallel+} = \sqrt{\varepsilon'\mu'} E'_{\perp+} \\ B'_{\perp-} = \sqrt{\varepsilon'\mu'} E'_{\parallel-} \\ B'_{\parallel-} = \sqrt{\varepsilon'\mu'} E'_{\perp-} \end{cases}$$

代入上方程组，整理可得：

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -\alpha \frac{\Theta}{\pi} \cos\theta & -n \cos\theta & -\alpha \frac{\Theta}{\pi} \cos\theta & n \cos\theta \\ n & -\alpha \frac{\Theta}{\pi} & -n & -\alpha \frac{\Theta}{\pi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\perp+} \\ E_{\parallel+} \\ E_{\perp-} \\ E_{\parallel-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta' & 0 & \cos\theta' & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -\alpha \frac{\Theta'}{\pi} \cos\theta' & -n' \cos\theta' & -\alpha \frac{\Theta'}{\pi} \cos\theta' & n' \cos\theta' \\ n' & -\alpha \frac{\Theta'}{\pi} & -n' & -\alpha \frac{\Theta'}{\pi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E'_{\perp+} \\ E'_{\parallel+} \\ E'_{\perp-} \\ E'_{\parallel-} \end{pmatrix}$$

将矩阵写到右边，可以得到斜入射情况下界面左右电场关系式：

$$\begin{pmatrix} E_{\perp+} \\ E_{\parallel+} \\ E_{\perp-} \\ E_{\parallel-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+n' \frac{\cos\theta'}{\cos\theta} & -\bar{a} & -n'+n \frac{\cos\theta'}{\cos\theta} & -\bar{a} \\ -\frac{\cos\theta'}{a \cos\theta} & n+n' \frac{\cos\theta'}{\cos\theta} & -\frac{\cos\theta'}{a \cos\theta} & n-n' \frac{\cos\theta'}{\cos\theta} \\ -n'+n \frac{\cos\theta'}{\cos\theta} & \bar{a} & n'+n \frac{\cos\theta'}{\cos\theta} & \bar{a} \\ -\frac{\cos\theta'}{-a \cos\theta} & n-n' \frac{\cos\theta'}{\cos\theta} & -\frac{\cos\theta'}{-a \cos\theta} & n+n' \frac{\cos\theta'}{\cos\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E'_{\perp+} \\ E'_{\parallel+} \\ E'_{\perp-} \\ E'_{\parallel-} \end{pmatrix},$$

其中  $\bar{a} = \frac{\alpha}{\pi} (\Theta' - \Theta)$ ；上式就是斜入射情况下界面上的传输矩阵形式，通过这个矩阵的分析，我们就可以计算斜入射情况下界面两侧的电场图像以及透射率、反射率等信息。

### 3.4 拓扑绝缘体周期体系的研究方法

#### 拓扑绝缘体材料夹层结构

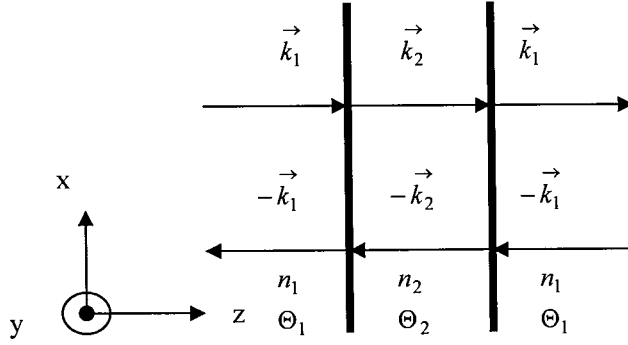


图 3.4 夹层结构示意图：中间为拓扑绝缘体层，两侧为空气。

上面我们详细介绍了拓扑绝缘体与普通材料界面上的传输矩阵，对于这里的夹层结构，我们已经知道了左边界面的矩阵形式，对比分析，我们可以将相关参数左右互换，得到右边界面的传输矩阵。而在中间拓扑绝缘体区域的传输矩阵为：

$$Z_{\text{中间}} = \begin{pmatrix} e^{-ik_2 l_2} & & & \\ & e^{-ik_2 l_2} & & \\ & & e^{ik_2 l_2} & \\ & & & e^{ik_2 l_2} \end{pmatrix} \quad (\text{垂直入射情况});$$

$$Z_{\text{中间}} = \begin{pmatrix} e^{-ik_2 l_2 \cos \theta_2} & & & \\ & e^{-ik_2 l_2 \cos \theta_2} & & \\ & & e^{ik_2 l_2 \cos \theta_2} & \\ & & & e^{ik_2 l_2 \cos \theta_2} \end{pmatrix} \quad (\text{斜入射情况});$$

所以，由图 3.4 我们可以写出夹层左右电场关系的矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} E_{x_1}^+ \\ E_{y_1}^+ \\ E_{x_1}^- \\ E_{y_1}^- \end{pmatrix} = Z_{\text{左界面}} \cdot Z_{\text{中间}} \cdot Z_{\text{右界面}} \cdot \begin{pmatrix} E_{x_2}^+ \\ E_{y_2}^+ \\ E_{x_2}^- \\ E_{y_2}^- \end{pmatrix};$$

对于多层结构，我们将每层材料界面矩阵和介质内矩阵定出来，然后将其按顺序乘起来即可进行编程计算。对于我们这个含有拓扑绝缘体的一维体系而言，由于拓扑绝缘体界面需要用  $4 \times 4$  形式的传输矩阵来计算，而对于普通材料，上面的分析也证明了可以用这种形式的传输矩阵来进行计算，所以我们这里整体上采用  $4 \times 4$  形式的矩阵来模拟电磁波传播过程。计算思路，我们仍从结果算起，由于体系含有拓扑绝缘体界面，电磁波会在界面上产生磁电耦合，所以，我们这里将结果设成  $(1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$  和  $(0 \ 1 \ 0 \ 0)^T$  两种模式进行计算，将计算出的体系左边电场进行线性组合，使组合出来体系左边的入射光为线偏振或者左旋、右旋偏振等模式，然后计算体系右边透射光的透射谱以及偏振态等信息。

## 3.5 透射光偏振态的分析方法

对于含有拓扑绝缘体的体系，并且拓扑绝缘体两表面镀同方向磁化铁磁层时，当我们入射线偏振光，其透射光可能会为圆偏振或者椭圆偏振，这是由于在拓扑绝缘体表面上存在磁电耦合造成的。本工作中就遇到了这种情况，并且在线偏振入射情况下，透射光的偏振态随着频率发生着丰富的变化，尤其是当透射光为椭圆偏振时，其主轴也在发生变化，并不一定沿着原线偏振方向。所以，我们这里需要对透射光的偏振状态进行详细的分析和处理。

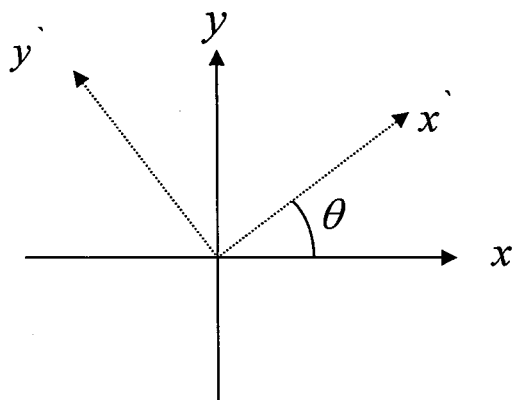


图 3.5 透射椭圆偏振光主轴偏转角分析示意图。

我们假设体系为沿  $z$  轴方向排列的一维光子晶体缺陷结构，入射光从体系一侧沿  $z$  轴正方向入射，入射光为沿  $x$  轴偏振的线偏振平面波，由于体系存在 TE、TM 模式耦合，透射光存在  $x$ 、 $y$  两种偏振模式，并且两种模式有各自的相位，如下所示：

$$\vec{E} = E_x e^{i\phi_1 - i\omega t} \cdot \hat{x} + E_y e^{i\phi_2 - i\omega t} \cdot \hat{y}$$

我们将时间因子提出来，简写上式为：

$$\vec{E} = E_x e^{i\phi_0} \cdot \hat{x} + E_y \cdot \hat{y} = \begin{pmatrix} E_x e^{i\phi_0} & E_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}; \text{ (其中 } \phi_0 = \phi_1 - \phi_2 \text{)}$$

此时，我们得到了简单的  $x$ 、 $y$  两种偏振模式的透射光组合，如果  $\phi_0 = 90$  度，再加上  $E_x$ 、 $E_y$  是否相等，那我们可以直接断定这是一个圆偏振光或者椭圆偏振光，并且可以确定椭圆偏振态下主轴是  $x$  轴，还是  $y$  轴。对于  $\phi_0 \neq 90$  度的普通情况而言，这里需要对其进行坐标变换，来求出其透射光的形状，如图 3.5 所示，我们将坐标系旋转  $\theta$  角，旋转后的新坐标系为：

$$\begin{pmatrix} \hat{x}' \\ \hat{y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}$$

我们在新坐标系下来看透射光在  $\hat{x}'$ 、 $\hat{y}'$  两个偏振方向上的电场分量，有：

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \begin{pmatrix} E_x e^{i\phi_0} & E_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{x}' \\ \hat{y}' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E_x e^{i\phi_0} \cos \theta + E_y \sin \theta & E_y \cos \theta - E_x e^{i\phi_0} \sin \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{x}' \\ \hat{y}' \end{pmatrix}\end{aligned}$$

上述矩阵中就是我们变换后新坐标系下两电场分量的值，同过计算这两个电场分量各自的相角，我们可以得到：

$$\hat{x}' \text{ 偏振分量相角: } \tan \theta_1 = \frac{E_x \cos \theta \sin \phi_0}{E_x \cos \theta \cos \phi_0 + E_y \sin \theta},$$

$$\hat{y}' \text{ 偏振分量相角: } \tan \theta_2 = \frac{-E_x \sin \theta \sin \phi_0}{-E_x \sin \theta \cos \phi_0 + E_y \cos \theta},$$

通过上面  $\phi_0 = 90$  度的情况讨论，我们可以知道，这里如果  $\hat{x}'$ 、 $\hat{y}'$  分量的相角差为  $90$  度，那么就可以知道透射椭圆光主轴为  $\hat{x}'$  轴或  $\hat{y}'$  轴，并且可以通过  $\hat{x}'$ 、 $\hat{y}'$  两分量的电场大小来判断是圆偏振还是椭圆偏振，亦或是线偏振。

所以，我们这样旋转坐标系的目的是为了找到一个坐标系满足新坐标系下两偏振分量的相角差为  $90$  度，也即满足  $\tan \theta_1 \cdot \tan \theta_2 = -1$  这个条件，我们将上式  $\hat{x}'$ 、 $\hat{y}'$  两偏振分量的相角代入，可以得到：

$$[E_y^2 - (E_x \cos \phi_0)^2] \sin \theta \cdot \cos \theta + E_x \cdot E_y \cdot \cos \phi_0 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = (E_x \sin \phi_0)^2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta$$

解这个方程，我们可以得到：

$$\begin{aligned}\tan 2\theta &= \frac{E_x \cdot E_y \cos \phi_0}{E_x^2 - E_y^2} \\ \Rightarrow \theta &= \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{E_x \cdot E_y \cos \phi_0}{E_x^2 - E_y^2} \right); \end{aligned}$$

即透射椭圆偏振主轴相对于  $x$  轴偏转了  $\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{E_x \cdot E_y \cos \phi_0}{E_x^2 - E_y^2} \right)$  角度，并且

将  $\theta$  值代入，我们得到旋转后的  $\hat{x}'$ 、 $\hat{y}'$  电场分量大小，并可以判断其主轴方向。

$$\begin{cases} \hat{x}' : E_x e^{i\phi_0} \cdot \cos \theta + E_y \sin \theta; (\text{长轴}) \\ \hat{y}' : E_y \cos \theta - E_x e^{i\phi_0} \cdot \sin \theta; (\text{短轴}) \end{cases}$$

### 3.6 本章小结

本章详细介绍了拓扑绝缘体表面电磁性质的分析方法，包括单拓扑绝缘体界面上的透射、反射矩阵形式，以及应用传输矩阵方法来计算拓扑绝缘体作为一维光子晶体缺陷体系的传输矩阵单元，并给出了对存在 TE、TM 模式耦合的透射光如何进行偏振态的分析计算。通过本章的介绍，我们就可以应用传输矩阵方法对拓扑绝缘体光子晶体缺陷体系进行编程计算，来进行透射谱的分析工作。

## 第四章 拓扑绝缘体作为光子晶体缺陷的光学性质研究

本文的主要工作就是将拓扑绝缘体平板放入一维光子晶体内，作为光子晶体缺陷来研究拓扑绝缘体缺陷态的透射谱性质，并通过分析研究这些新颖的变化，来分析拓扑绝缘体的表面磁电耦合现象，以及设计了通过透射峰频率位置来对精细结构常数进行测量计算的实验方法。本章中将详细介绍本实验体系的结构参数，以及体系透射谱的特征等知识。

### 4.1 拓扑绝缘体缺陷体系介绍

我们的体系如图 4.1 所示：中间黄色层为单拓扑绝缘体平板，在拓扑绝缘体缺陷上下两侧加有对称周期性光子晶体。我们在拓扑绝缘体材料层的上下界面镀上很薄的一层铁磁层并同方向磁化（或镀一层顺磁性材料，并在  $z$  轴方向上加磁场），这样拓扑绝缘体材料  $\Theta$  值取为  $\pi$ ，同时表面态被打开能隙。根据磁化方向，两侧界面处  $\Theta$  值分别产生  $\pi$  跃变，即在拓扑绝缘体下界面用  $\Theta$  值标度是  $(0, \pi)$  界面，而在拓扑绝缘体的上界面是  $(\pi, 2\pi)$  界面。我们选择材料参数为  $n_{\text{玻璃}}=2$ ， $L_{\text{玻璃}}=0.25\text{mm}$ ， $n_{\text{空气}}=1.0$ ， $L_{\text{空气}}=0.5\text{mm}$ ， $n_{\text{TI}}=10$ ， $L_{\text{TI}}=0.1\text{mm}$ 。

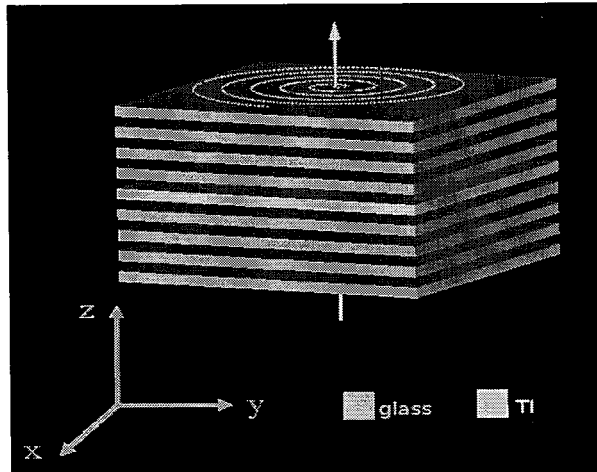


图 4.1 体系结构示意图：中间黄色层为拓扑绝缘体平板，其上下表面镀有同方向磁化的铁磁层，绿色部分为对称的一维光子晶体结构。

我们的研究方法是用一束沿  $x$  方向偏振的线偏振光自下而上入射，通过对体系透射谱的计算、以及对透射光偏振态的分析来研究拓扑绝缘体表面性质。为了研究光子晶体各项参数对拓扑绝缘体缺陷态的影响，我们也选用了其他的光子晶体结构（改变层数、材料等），但是，在我们选择不同光子晶体结构时，都要



求光子晶体的带隙中心与单拓扑绝缘体平板的透射峰刚好重合，以便更加明确地观察光子晶体对拓扑绝缘体缺陷态的影响。

## 4.2 拓扑绝缘体缺陷体系材料参数的选择

上面我们给出了用来测量拓扑绝缘体表面拓扑性质的结构参数，但我们没有对具体参数的选择进行讨论，本节中，我们将详细讨论这样选择参数的原则和所要实现的目的。

### 4.2.1 拓扑绝缘体平板及镀铁磁的方法

我们研究拓扑绝缘体表面性质时，首先需要在垂直拓扑绝缘体表面方向上加一个微弱的磁场，当磁场趋近零时，拓扑绝缘体表面所体现的就是其拓扑性质。并且，这个磁场的方向还决定了拓扑绝缘体拓扑项因子 $\Theta$ 为 $\pi$ 还是 $-\pi$ 。这个磁场的加法我们介绍两种：一种是在拓扑绝缘体表面上镀上一层铁磁；另一种是在其界面上镀一层顺磁性材料，并在垂直界面方向加磁场；这两种方法都是使界面处产生磁场。

在本文中，我们主要研究的是拓扑绝缘体平板的透射谱信息，所以，需要在平板的两个界面上进行镀铁磁。镀铁磁层时，我们选择将铁磁层同方向磁化，这样在拓扑绝缘体平板上下界面会分别产生 $\Theta$ 值的 $\pi$ 跃变；而当我们选择将铁磁层反方向磁化时，拓扑绝缘体平板上下界面分别产生的是 $\Theta$ 值的 $\pi$ 跃变和 $-\pi$ 跃变，这种情况对于透射谱测量上，并没有奇异的效果。所以，我们将镀同方向磁化铁磁层的情况为主，将镀反方向磁化铁磁层的情况为对比实验，作为辅助研究。

当我们在拓扑绝缘体平板上下表面镀上铁磁层，并同方向磁化时，表面的铁磁层打开能隙<sup>[42]</sup>，其能隙值 $E_g \approx 10K$ ，将其写成能量形式：

$$E_g = k_B \cdot T = 1.38 \times 10^{-23} J \cdot K^{-1} \times 10K = 1.38 \times 10^{-22} J$$

将此能量转换成相应能量的光子频率，我们可以得到：

$$\omega_c = \frac{E_g}{\hbar} = \frac{1.38 \times 10^{-22} J \times 2\pi}{6.63 \times 10^{-34} J \cdot S} \approx 1.31 \times 10^{12} Hz$$

我们这里为了不破坏表面铁磁层所打开的能隙，实验用的入射光能量必须远小于这个频率，所以，我们这里需要选择合适的材料参数，使得能够观察到拓扑绝缘体缺陷态透射谱特点以及偏振状态的入射光频率段满足上述要求。

由于我们是要求在光子晶体gap内观察拓扑绝缘体平板的透射峰，所以，我们必须从拓扑绝缘体平板和光子晶体band-gap结构两方面来考虑。对于拓扑绝缘

体平板,由法布里-珀罗仪<sup>[43]</sup>知识可知其共振透射峰为 $\frac{c_0}{4 \cdot n_{II} \cdot L_{II}}$ ,其中 $c_0$ 为光速,

我们选择拓扑绝缘体折射率为 10 的材料,为了满足上述频率要求,我们选择了 $L_{II}=0.1\text{mm}$ 。在这样的参数选择下,拓扑绝缘体平板的第一个透射共振峰频率约为 0.15THz,满足上述要求。

#### 4.2.2 光子晶体参数的选择

上面我们讨论了拓扑绝缘体平板表面铁磁层的镀法,以及其厚度的选择。下面我们对光子晶体参数的选择进行讨论分析。

通过对拓扑绝缘体平板厚度的选择,我们将其共振透射峰定在了 0.15THz 附近,剩下对光子晶体的选择目标就是将光子晶体 bang-gap 结构中的 gap 中心也选择在 0.15THz 附近,保持与拓扑绝缘体平板共振透射峰重合(其实是拓扑绝缘体平板共振透射双峰中间频率)。下面我们对光子晶体参数选择对 bang-gap 影响进行分析讨论。

对于一维光子晶体,我们可以由法布里-珀罗仪对其带隙位置选择进行简单分析。首先来分析单层平板,如图 4.2 所示,通过多重反射,我们可以得到其反射项:

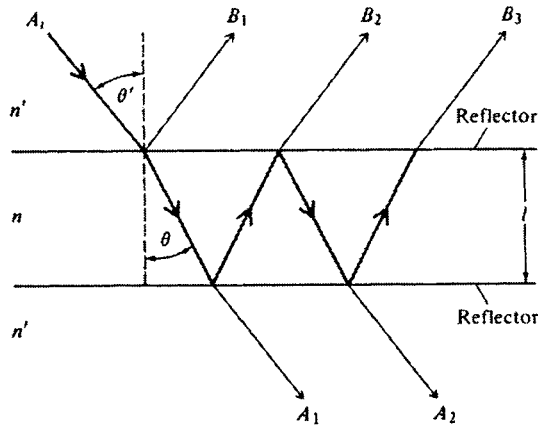


图 4.2 法布里-珀罗仪多重反射示意图。

$$B_1 = rA_1, \quad B_2 = tr'r'A_1e^{-i\delta}, \quad B_3 = tr'r'^3A_1e^{-i2\delta}, \quad \dots$$

我们将所有的反射项叠加,得到总反射分量为:

$$A_r = [r + tr'r'e^{-i\delta}(1 + r'^2e^{-i\delta} + r'^4e^{-i2\delta} + \dots)]A_1$$

同理,我们分析所有的透射项,得到:

$$A_t = tt'A_1e^{-i\delta/2}, \quad A_2 = tr'r'^2A_1e^{-i\delta/2}, \quad A_3 = tr'r'^4A_1e^{-i\delta/2}, \quad \dots$$

对所有透射项进行叠加,我们得到总的透射分量为:

$$A_i = A_i t t' (1 + r'^2 e^{-i\delta} + r'^4 e^{-i2\delta} + \dots) e^{-i\delta/2};$$

其中,  $r' = -r$ ,  $r^2 + t t' = 1$ ,  $R \equiv r^2 = r'^2$ ,  $T \equiv t t'$ ; 将这几个关系代入到总反射分量和总透射分量中, 整理可得到:

$$A_r = \frac{(1 - e^{-i\delta})\sqrt{R}}{1 - R e^{-i\delta}} A_i, \quad A_t = \frac{T e^{-i\delta/2}}{1 - R e^{-i\delta}} A_i;$$

然后, 我们求其反射率和透射率:

$$\frac{I_r}{I_i} = \frac{A_r A_r^*}{A_i A_i^*} = \frac{4R \sin^2(\delta/2)}{(1-R)^2 + 4R \sin^2(\delta/2)},$$

$$\frac{I_t}{I_i} = \frac{A_t A_t^*}{A_i A_i^*} = \frac{(1-R)^2}{(1-R)^2 + 4R \sin^2(\delta/2)};$$

其中  $\delta = \frac{4\pi n l \cos\theta}{\lambda} = 2m\pi$  时, 就是单平板的共振透射峰, 将其表示成频率形式,

$$\text{有: } \nu_m = m \frac{c}{2nl \cos\theta}.$$

在共振峰中间, 就是其 gap 区, 这里我们可以通过调节 R 的大小来控制 gap 的强弱, 发现当 R 趋近于 1 时, 透射峰变得越来越尖锐, 并且其透射峰中间的 gap 区透射率也越来越低, 如图 4.3 所示。

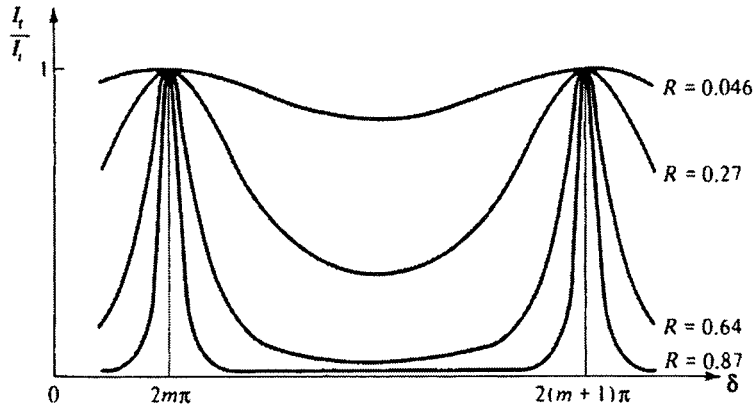


图 4.3 不同界面反射率下的法布里-珀罗仪透射谱。

对于由玻璃平板和空气夹层组成的一维光子晶体, 当我们保持每层玻璃平板和每个空气夹层的光程均相同时, 同时 band 中心与单层平板共振透射峰重合, gap 中心与单层平板共振透射峰中间值重合。随着光子晶体层数的增多, 体系的 band-gap 图对比更加明显。

经过上面的讨论, 我们对光子晶体 band-gap 的控制有了一定了解, 对于本体系, 我们需要的是将 gap 中心定在 0.15THz 附近 (保持 gap 中心与拓扑绝缘体透射双峰中间值重合), 由此我们可以知道, 我们应控制光在拓扑绝缘体内的传

播光程为玻璃平板内光程的 2 倍。这就是我们选择  $n_{\text{玻璃}}=2$ ,  $L_{\text{玻璃}}=0.25\text{mm}$ ,  $n_{\text{空气}}=1.0$ ,  $L_{\text{空气}}=0.5\text{mm}$  的原因, 在我们这样选择的条件下, 拓扑绝缘体平板的第一个共振透射峰正好落在光子晶体的第一个 gap 内, 并处于 gap 的中心位置。

我们这里选择材料参数时, 总是保持着拓扑绝缘体平板缺陷的透射峰中心与光子晶体的带隙中心保持重合。这样选择的原因是, 对于我们这个具体体系而言, 由于拓扑绝缘体表面的磁电耦合效应, 导致透射峰并不是‘透射率为 1 的单透射峰’, 而是‘透射率为 0.5 的双透射峰’, 这样选择参数条件下, 在光子晶体层数增多时, 带隙内透射双峰的中心不发生漂移。如果我们选择的光子晶体带隙中心与拓扑绝缘体缺陷透射峰不重合时, 随着光子晶体层数的增多, 不同层数下的带隙对缺陷态的影响不同, 将会引起了双峰的漂移, 如图 4.4 所示。

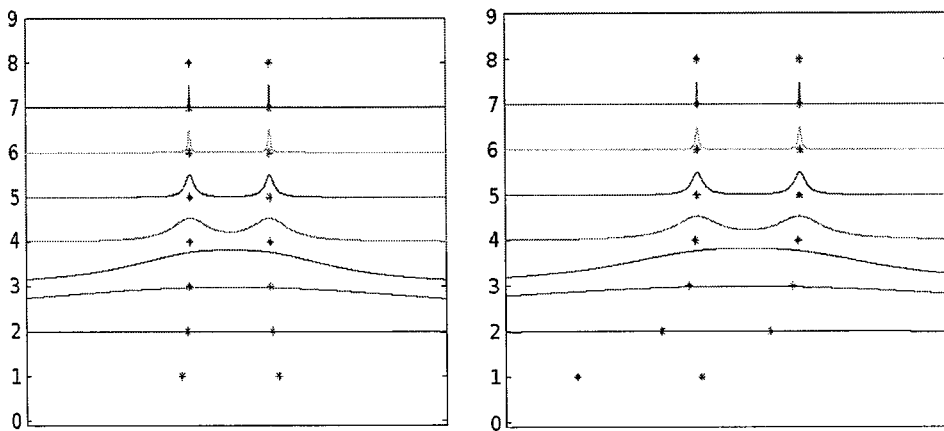


图 4.4 拓扑绝缘体平板缺陷透射峰与 gap 中心重合(左图)、不重合(右图)情况下的缺陷态透射谱随光子晶体层数变化示意图。

另外, 双峰的另一个变化是峰间距随着光子晶体层数的增多而逐渐变小并趋于稳定, 对于带隙中心与透射双峰中间值重合的体系, 其峰间值保持不变, 而对于带隙中心与透射双峰中间值不重合的体系, 其峰间值也在发生变化。对于实验而言, 若透射双峰中间值能够保持不变, 对于实验测量是有一定简化的。所以, 通过合理选择光子晶体参数保持透射谱双峰中心频率不变是优化实验的一个方案。

### 4.3 拓扑绝缘体缺陷态透射谱的特点

前面我们详细介绍了拓扑绝缘体缺陷体系的传输矩阵, 按照体系材料单元将这些传输矩阵按顺序串乘, 我们可以就可以对体系的透射谱进行计算。另外, 再加上对透射椭圆偏振光的分析计算, 我们可以对体系透射光偏振状态进行详细的分析。

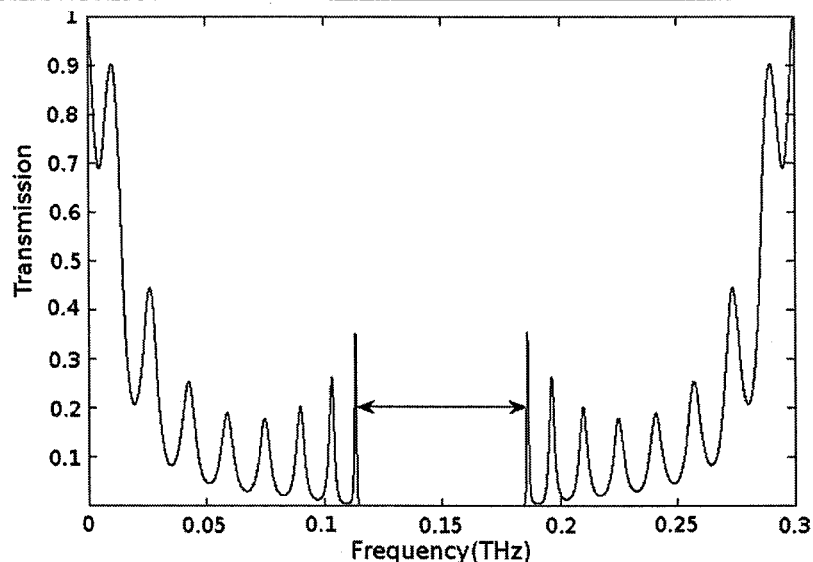


图 4.5 拓扑绝缘体缺陷体系的 band-gap 图。

我们先做出了本缺陷体系的整体 band-gap 图，如图 4.5 所示。我们可以看出拓扑绝缘体平板的奇数透射峰与光子晶体的 gap 中心位置重合，而其偶数透射峰与光子晶体的 band 中心位置重合。经分析发现，在拓扑绝缘体所有奇数透射峰频率处的透射谱基本类似，我们这里只选择其第一个透射峰位置，即在 0.15THz 附近来观察缺陷态的透射谱和透射光的偏振信息。

我们首先考虑拓扑绝缘体缺陷上下的光子晶体层数为 6 的情况，然后在上图中第一个带隙内分析其透射谱的性质，缺陷态透射谱及透射光的偏振性质如图 4.6 所示：对于垂直入射的线偏振光，我们观察到透射谱带隙里有两个峰值均为 0.5 的透射峰（图 4.6a）；并且这两个峰值频率处的透射光偏振状态分别为左旋偏振和右旋偏振（图 4.6b 中  $f_2, f_4$  处）， $\theta$  是椭圆偏振长轴相对 x 轴的偏转角，绿线

（ $l_b/l_a$ ）描述了椭圆偏振的长短轴之比；由长短轴之比可以看出，在左、右峰值处偏振状态分别接近于左旋圆偏振和右旋圆偏振，而在两个透射峰中间频率处的透射光为线偏振，但其偏振角相对于入射光有一个近乎于  $\pi/2$  的偏转，也即产生了巨大的法拉第角；其他频率处则为普通的椭圆偏振，如图 4.6b 中 5 处频率的透射光偏振态所示。

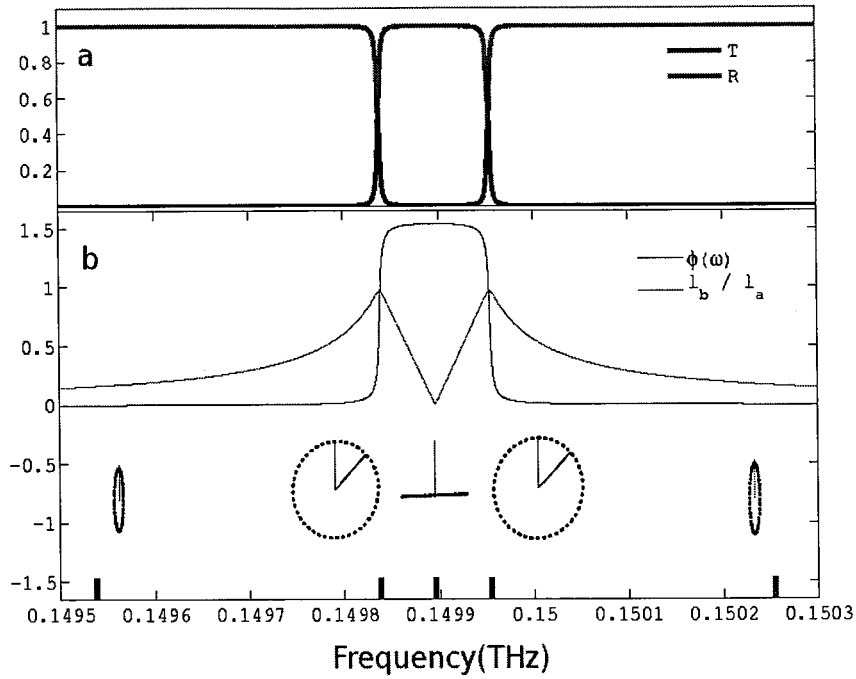


图 4.6 (a) 拓扑绝缘体缺陷体系的透射谱和反射谱, (b) 透射椭圆偏振的主轴偏转角、长短轴之比以及透射光在 5 个特殊频率处的偏振特性。

#### 4.3.1 与普通缺陷透射谱的对比研究

对于普通缺陷, 当我们调节缺陷态透射峰落在光子晶体 gap 内时, 我们看到的是一个透射率为 1 的单透射峰, 在线偏振垂直入射情况下, 透射光的偏振性质与入射光保持一致, 仍为线偏振, 并且没有发生偏振角的变化。

而对于拓扑绝缘体平板作为光子晶体缺陷结构, 其透射谱有许多新颖之处, 为了对上述结果做进一步研究, 我们用法布里-珀罗仪来分析我们这个结构。首先, 我们把下边光子晶体部分加上拓扑绝缘体材料下界面看做是法布里-珀罗仪的“有效左界面”, 把拓扑绝缘体材料上界面和上边光子晶体部分看成是法布里-珀罗仪的“有效右界面”, 而把拓扑绝缘体材料中间部分当成是法布里-珀罗仪的中间区域, 这样来分析我们这个结构时, 由于旋光效果, 我们发现左右有效界面的反射和透射不能再以简单的反射透射系数来表示, 而均变成了矩阵

形式, 左右“有效界面”我们分别用  $\begin{pmatrix} A_l & B_l \\ -B_l & A_l \end{pmatrix}$ 、 $\begin{pmatrix} A_r & B_r \\ -B_r & A_r \end{pmatrix}$  来描述, 角标表示

左边或右边有效界面, 这种形式反射和透射矩阵的本征基为  $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$  和  $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ , 我

们设入射光为  $A_l$ , 即有:

我们设入射光为  $A_l$ , 即有:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \cdot A_i = \beta_+ \sigma_+ + \beta_- \sigma_-, \text{ 其中 } \sigma_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \sigma_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix};$$

这两个本征基分别对应着左旋圆偏振态和右旋圆偏振态。由上式我们可以求出对应两个本征基的本征值为：

$$\begin{cases} \beta_+ = A + i \cdot B \\ \beta_- = A - i \cdot B \end{cases};$$

通过分析这个“等效法布里-珀罗仪”的多重反射图像，我们可以得到体系总的透射量为：

$$A_t = \vec{t} [1 + \vec{r} \vec{r}' e^{-i\delta} + (\vec{r} \vec{r}' e^{-i\delta})^2 + \dots] \vec{t}' e^{-i\delta/2} \cdot A_i$$

由于此处的  $\vec{r}$ 、 $\vec{r}'$ 、 $\vec{t}$ 、 $\vec{t}'$  均为  $\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$  形式的矩阵，矩阵乘法一般不满足

交换律，所以，这里我们将它们最靠近  $A_i$  的矩阵与  $A_i$  相乘，相乘之后变成了本征值与各自本征基之间乘积的和，这里有趣的地方在于这些矩阵有着相同的本征基，剩下的矩阵与各自本征基相乘，得到了如下的形式：

$$A_t = t_+ [1 + r_+ r_+' e^{-i\delta} + (r_+ r_+' e^{-i\delta})^2 + \dots] t_+' e^{-i\delta/2} \cdot \sigma_+ + t_- [1 + r_- r_-' e^{-i\delta} + (r_- r_-' e^{-i\delta})^2 + \dots] t_-' e^{-i\delta/2} \cdot \sigma_-$$

我们将上式中括号内的等比数列用求和公式表示出来，有：

$$A_t = t_+ \frac{1}{1 - r_+ r_+' e^{-i\delta}} t_+' e^{-i\delta/2} \cdot \sigma_+ + t_- \frac{1}{1 - r_- r_-' e^{-i\delta}} t_-' e^{-i\delta/2} \cdot \sigma_-$$

为了求体系的透射率，我们这里先对体系总透射量求共轭：

$$A_t^* = t_+^* \frac{1}{1 - r_+^* r_+'^* e^{i\delta}} t_+'^* e^{i\delta/2} \cdot \sigma_+ + t_-^* \frac{1}{1 - r_-^* r_-'^* e^{i\delta}} t_-'^* e^{i\delta/2} \cdot \sigma_-$$

所以，其透射率为：

$$\frac{I_t}{I_i} = \frac{A_t \cdot A_t^*}{A_i \cdot A_i^*} = \frac{1}{2} \left( \frac{t_+^* \cdot t_+'^* e^{i\delta/2}}{1 - r_+^* r_+'^* e^{i\delta}} \cdot \frac{t_+ \cdot t_+' e^{i\delta/2}}{1 - r_+ r_+' e^{-i\delta}} + \frac{t_-^* \cdot t_-'^* e^{i\delta/2}}{1 - r_-^* r_-'^* e^{i\delta}} \cdot \frac{t_- \cdot t_-' e^{i\delta/2}}{1 - r_- r_-' e^{-i\delta}} \right)$$

得到透射率的一个新的形式：

$$T = \frac{1}{2} \left[ \frac{(1-R)^2}{(1-R)^2 + 4R \sin^2 \left( k_z L_{TI} + \frac{1}{2}(\phi_l + \phi_r) \right)} + \frac{(1-R)^2}{(1-R)^2 + 4R \sin^2 \left( k_z L_{TI} - \frac{1}{2}(\phi_l + \phi_r) \right)} \right]$$

上式中的两项分别代表左旋和右旋光的穿透率，其中  $k_z = \frac{n_{TI} 2\pi f}{c_0}$ （ $f$  为入射光频率）、 $\phi_l = \arg(A_l + iB_l)$ 、 $\phi_r = \arg(A_r + iB_r)$ ， $R = r^2 = (|A_l|^2 + |B_l|^2) = (|A_r|^2 + |B_r|^2)$  为法布里-珀罗仪左、右“有效界面”的反射率。当我们选取同方向磁化铁磁时，有  $\phi_l = \phi_r$ ，由上式可以看出，当我们用左、右旋态来分析多重反射过程时，它们有着不同的共振条件  $2 \frac{n_{TI} 2\pi f}{c_0} L_{TI} + \phi_l + \phi_r = 2m\pi$  和  $2 \frac{n_{TI} 2\pi f}{c_0} L_{TI} - \phi_l - \phi_r = 2m\pi$ ，这也就是为什么在带隙里面出现两个透射峰，并且在两个透射峰频率处光的偏振态分别为左旋光和右旋光的原因。

由左、右旋光的共振条件，我们可以得到其共振频率差为：

$$\Delta f = f_r - f_l = \frac{c_0}{2\pi \cdot n_{TI} \cdot L_{TI}} 2\phi \quad (\text{其中 } \phi = \phi_l = \phi_r)$$

对于上、下不加光子晶体的单拓扑绝缘体平板而言，有  $\phi = \arctan \left( \frac{2n_{TI}\alpha}{n_{TI}^2 - n_0^2 - \alpha^2} \right)$ 。但是，对于单拓扑绝缘体平板，并没有

双峰出现。这是由于单拓扑绝缘体平板两界面的反射系数太小，双峰无法分离所致。当加上光子晶体后，这一反射系数被提高，使双峰得以分辨。所以，我们需要研究多层光子晶体结构下体系的透射谱，以及光子晶体对透射峰频率位置的影响。

#### 4.3.2 透射谱随光子晶体层数变化的研究

这里我们再次强调，当我们调节拓扑绝缘体平板上下光子晶体层数以作对比分析时，我们始终保证光子晶体的禁带中心正好与两个峰的中间频率重合。而由前面分析我们可以知道，周期性增加光子晶体层数并不影响光子晶体的 band-gap 中心位置。所以，单增加光子晶体层数时，光子晶体的禁带中心与两个峰的中间频率总是保持重合。

研究结果发现，随着层数的增加，透射谱上双峰的位置在发生微小移动，最后双峰位置趋于稳定，如图 4.7 所示。另外，当低于 3 层时，几乎看不出是双峰（两峰重叠成单峰），在层数大于 4 层时，双峰才有比较明显的分离；随着层数的增多，双峰分离的越来越明显，其峰间距也在趋于稳定。光子晶体的作用明显是使双峰的宽度越来越窄，所以双峰从重叠慢慢得以分开，但是对双峰间距也有一定压缩。图中点是通过反射矩阵计算出来的共振频率，我们发现与我们的传输矩阵计算结果吻合得很好。



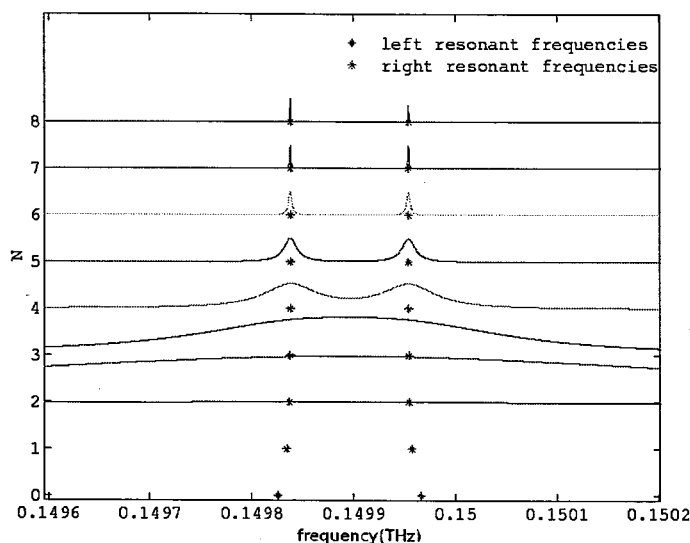


图 4.7 不同光子晶体层数 ( $N$ ) 下的透射谱以及共振频率, 实线为透射谱, 点为共振频率。

### 4.3.3 透射谱随光子晶体折射率变化的研究

上面分析的是玻璃折射率为 2 保持不变, 把体系放在真空中, 调节光子晶体层数所得到的结果, 下面我们研究光子晶体折射率对拓扑绝缘体缺陷态透射谱的影响。由前面的分析可知, 当光子晶体单种介质层内光程发生变化时, 整个体系的 band-gap 图就会发生变化, 其 band 中心和 gap 中心也会随之而变。这使我们研究缺陷态透射谱随光子晶体玻璃折射率变化时没有参考。

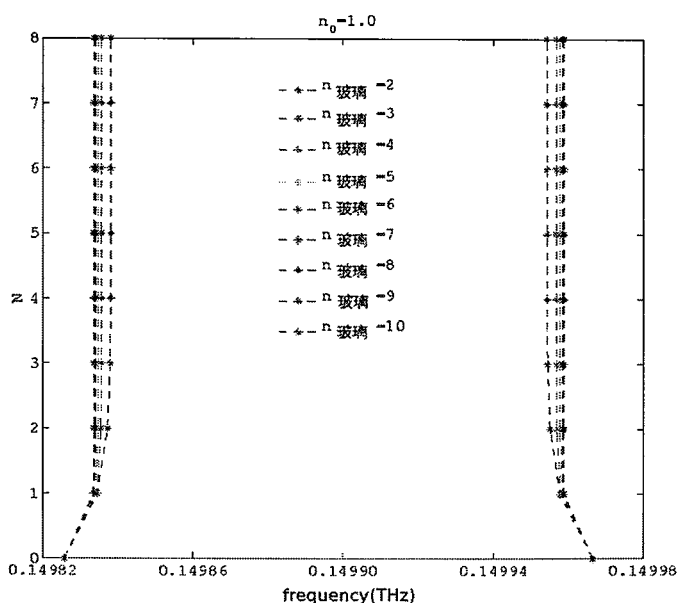


图 4.8 不同折射率玻璃下, 共振频率随光子晶体层数 ( $N$ ) 的变化。

所以, 首先我们在玻璃折射率变化的同时, 调节玻璃层厚度, 保持  $n_{\text{玻璃}} \cdot L_{\text{玻璃}}$  不变, 从而光子晶体的 gap 中心频率不变。而我们选择的拓扑绝缘体缺陷共振透

射峰也正好与体系 gap 中心重合。我们这里研究的方法与上小节类似，仍是通过调节光子晶体层数，来观察体系共振透射频率随光子晶体层数的变化情况，结果如图 4.8 所示。由图我们可以看出，随着折射率的增大，两边的光子晶体效果更加明显，很少层数的光子晶体就可以使双峰位置稳定下来，并且对单拓扑绝缘体平板共振频率差的压缩也变小，这里我们就可以通过选择不同折射率的光子晶体来做实验验证这个拓扑效果。

#### 4.3.4 透射谱随体系随浸入不同环境的研究

我们还对体系所处环境对透射谱的影响进行了研究，由我们前面的介绍体系时可以知道，我们的体系为周期性玻璃层组成光子晶体，在玻璃之间为空气层，而实际中空气的折射率并不严格为 1。而且我们这个光子晶体还可以用其他介质层来填充空气层。组成两种材料周期交替的光子晶体。我们这里所说环境，就是指的这种与玻璃周期交替排列的一种介质层，可以是另一种平板材料，也可以是一种液体，或一种气体等等。

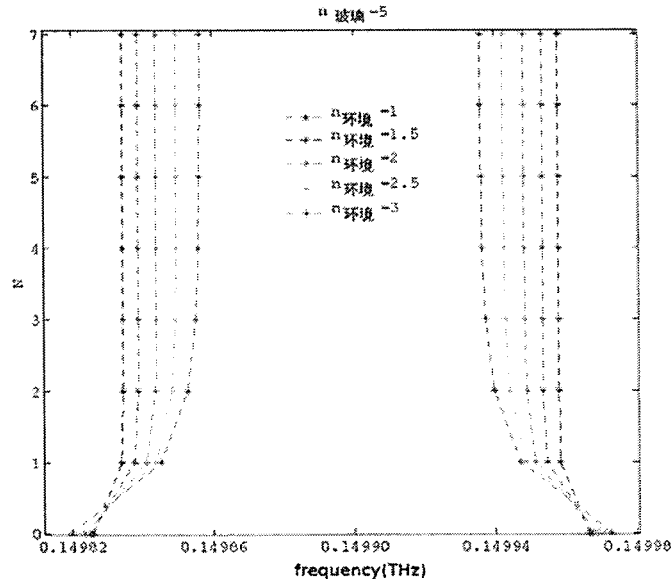


图 4.9 不同环境下，共振频率随光子晶体层数  $N$  的变化。

在研究环境折射率对透射谱影响时，我们仍然保持着体系的 band-gap 结构中心频率位置不变，即在调节环境折射率的同时，也调节  $L_{\text{环境}}$ ，保持  $n_{\text{环境}} \cdot L_{\text{环境}}$  不变，这样体系的透射 band-gap 中心频率位置保持不变，使得体系的透射共振频率位置中心不会发生漂移，如图 4.9 所示。这里我们选取  $n_{\text{玻璃}}=5$ ，研究结果发现，随着环境折射率的增大，单拓扑绝缘体平板的共振频率差也在变大，但是此时的峰间距随光子晶体层数变化更大，并在达到稳定时，其峰间距最小，也就是说，此时的光子晶体对拓扑绝缘体平板共振频率差的压缩效果更强。

单拓扑绝缘体平板的共振频率差随着环境折射率的增大而增大，这是由于

单拓扑绝缘体平板引起的共振相位差  $2 \arctan \left( \frac{2n_{TI}\alpha}{n_{TI}^2 - n_{环境}^2 - \alpha^2} \right)$  受环境变化的影响,

$n_{环境}$  越大, 共振相位差越大。但是  $n_{环境}$  越大,  $r_0$  项就越小, 光子晶体的多重反射项对其影响就越明显, 使得对单拓扑绝缘体平板共振频率差的压缩比较明显。

我们还对仅调节环境折射率进行了研究, 此时光子晶体整个 band-gap 结构就发生了变化, 由前面的分析可知, 这时透射峰会发生漂移, 并且峰间距也随着环境折射率的增大而减小。我们选择了玻璃折射率为 5 的情况下, 环境折射率从 1 到 1.5 变化进行分析, 结果如图 4.10 所示。

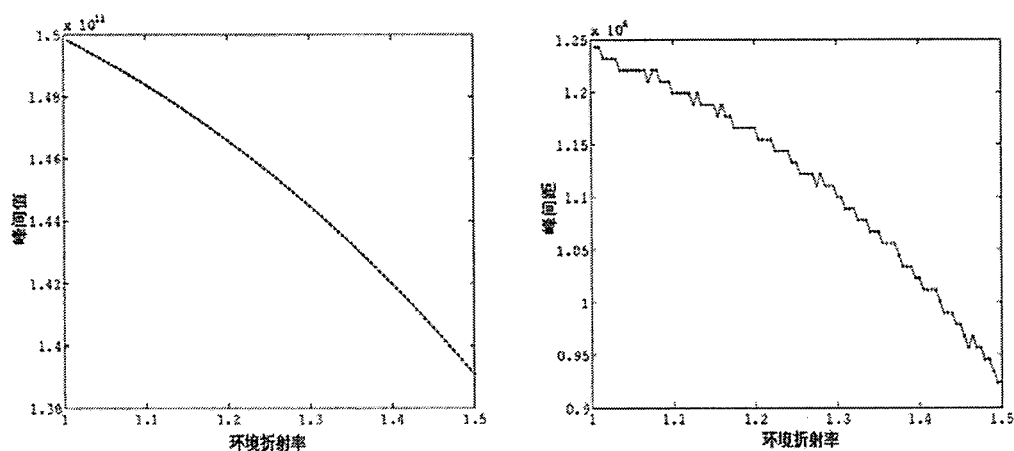


图 4.10 透射双峰随环境折射率变化示意图, 左图为双峰中间值的漂移情况, 右图为双峰间距变化情况。

#### 4.4 对精细结构常数的测量

为了具体分析峰间距变化的原因, 我们将光子晶体与拓扑绝缘体界面分开研究, 如图 4.10 所示: 其中左边为光子晶体, 右边为单拓扑绝缘体界面。从拓扑绝缘体介质内过来的电磁波经过拓扑绝缘体界面和光子晶体多重反射之后, 形成了前面讨论的等效法布里-珀罗仪反射矩阵。

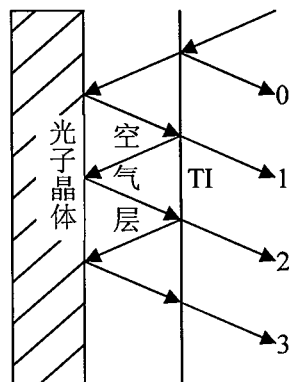


图 4.10 光子晶体与拓扑绝缘体界面间多重反射示意图。

$$\vec{r}_{\text{总}} = \vec{r}_0 + \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 + \cdots + \vec{r}_n + \cdots = \vec{r}_+ + \vec{t}_- \frac{e^{2ik \cdot L_{\text{空气}}} \vec{r}_m}{1 - e^{2ik \cdot L_{\text{空气}}} \vec{r}_m \vec{r}_-} \vec{t}_+$$

其中  $\vec{r}_+$  为从拓扑绝缘体界面右边反射系数矩阵,  $\vec{r}_-$  为从左边反射系数矩阵,  $\vec{t}_-$  为拓扑绝缘体界面从左边透射系数矩阵,  $\vec{t}_+$  为从右边透射系数矩阵,  $\vec{r}_m$  为光子晶体反射系数,  $e^{2ik \cdot L_{\text{空气}}}$  为中间空气层的传播项。

$$\vec{r}_0 = \vec{r}_+ = \frac{-1}{\alpha^2 + (n_0 + n_{\text{TI}})^2} \begin{pmatrix} \alpha^2 + n_0^2 - n_{\text{TI}}^2 & -2\alpha \cdot n_{\text{TI}} \\ 2\alpha \cdot n_{\text{TI}} & \alpha^2 + n_0^2 - n_{\text{TI}}^2 \end{pmatrix}$$

为单拓扑绝缘体界面反射矩阵。单拓扑绝缘体平板结构的透射谱上并没有出现双峰,而是在光子晶体达到一定层数时才出现,这是由于拓扑绝缘体左右两界面的反射系数太小,虽然左旋光和右旋光不同的共振条件,但此时的双峰无法分辨,加上光子晶体之后,相当于提高了法布里-珀罗仪两界面的反射系数,使得双峰得以分离,但是,光子晶体也对共振条件有一定影响,使得透射峰发生移动。

后面所有项为光子晶体多重反射效果,  $\vec{r}_m$ 、 $e^{2ik \cdot L_{\text{空气}}}$  均在随着频率发生变化,这是导致了峰值移动的原因,但是,对于特定的频率,这两个值是确定的。这里我们就可以在实验中先测出其左边共振峰频率,然后将此频率下的  $\vec{r}_m$ 、

$$e^{2ik \cdot L_{\text{空气}}} \text{代入上式得到 } \vec{r}_{\text{总}} = \begin{pmatrix} A_{\text{总}} & B_{\text{总}} \\ -B_{\text{总}} & A_{\text{总}} \end{pmatrix}, \text{通过 } \vec{r}_{\text{总}} \text{ 同样可以计算出其左边共振}$$

$$\text{条件: } 2 \frac{n_{\text{TI}} 2\pi f_l}{c} L_{\text{TI}} + \phi_{l\text{总}}(\alpha, f_l) + \phi_{r\text{总}}(\alpha, f_l) = 2\pi;$$

其中  $\phi_{l\text{总}}(\alpha, f_l) = \phi_{r\text{总}}(\alpha, f_l) = \arg(A_{\text{总}} + iB_{\text{总}})$ , 这个等式只在左峰值处成立,整个式子中只含有精细结构常数  $\alpha$  一个未知数。这里我们可以在左共振频率上通过解这个等式来精确计算精细结构常数,也可以在右边共振频率处来进行测量计算。由于  $\vec{r}_m$  随着层数的变化可以被精确描述,所以理论上可以在两个透射峰趋于稳定的任意层数下进行测量计算。但层数过多时,体系经多重反射达到稳定所需时间较长,而且透射峰也较尖锐,这会对测量构成一定难度,因而实验上需要对层数进行合理选择。

对于我们这个体系的参数选择下,选择 7 层左右是比较合理的,此时透射峰的位置基本保持不变,而且其透射峰宽窄适宜,方便实验测量。

#### 4.5 光学霍尔效应<sup>[44-45]</sup>

当体系两侧透射光相对于入射光的偏振态发生变化，即光的自旋发生变化时，其轨道角动量也会随着发生变化，以保证总角动量的守恒。光的角动量包括轨道角动量  $(c\varepsilon_0/i2\omega)E^*(\hat{r}\times\nabla)E|_z$  和自旋角动量  $(c\varepsilon_0/i2\omega)E^*\times E|_z$ ，光的轨道角动量由光的能流和中心位置决定，与光的偏振态无关；而光的自旋角动量只由光的偏振态决定，与前者无关<sup>[46]</sup>；光在传播过程中，总保持着角动量守恒，即在自旋角动量发生变化时，需要相应的轨道角动量来补偿。

在我们这个结构中，入射光是一个线偏振光，其自旋角动量为零，但透射光的自旋角动量随频率在不断变化，所以，我们这个结构里有自旋-轨道角动量耦合发生，尤其是在两个透射峰处，自旋角动量从 0 变化到  $\pm 1$ 。由于光在传播过程中保持着总角动量守恒，所以，透射光便会产生相应的轨道角动量来补偿其自旋变化，反映到宏观上就体现在透射光会产生一个横向位移，这个横向位移如图 4.11 所示。

体系为沿z轴周期变化的一维光子晶体结构，在光子晶体结构中间夹有一层拓扑绝缘体缺陷结构，我们这里将体系简单描述，以方便突出透射光所产生的横向位移；然后用沿x轴偏振的线偏振平面波以入射角  $\theta_i$  从体系下面斜入射到体系上，在体系上测观察透射光性质。此时我们发现透射光会在y轴方向上有一个位移，这个位移是与入射光平面垂直的，这个位移的大小由下面公式描述<sup>[47-48]</sup>：

$$\delta y_c^T = \frac{1}{k_c^I} \left[ \langle z_c^T | \sigma_3 | z_c^T \rangle \cos \theta_T - \langle z_c^I | \sigma_3 | z_c^I \rangle \cos \theta_I \right]$$

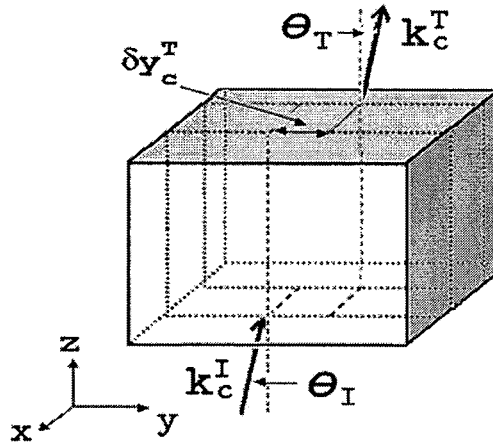


图 4.11 体系透射光产生横向位移的示意图。

这里  $\delta y_c^T$  为横向位移， $\theta_i$ ， $\theta_r$  为入射角和折射角，对于我们体系斜入射时  $\theta_i = \theta_r$ ， $k_c^I$  为入射光波矢， $\langle z_c^I | \sigma_3 | z_c^I \rangle$ ， $\langle z_c^T | \sigma_3 | z_c^T \rangle$  分别为入射光自旋和透射光自旋；我们将频率定在右边透射峰靠右处的一个频率处，来观察不同入射角度下横向位移的大小变化，结果如图 4.12 所示。

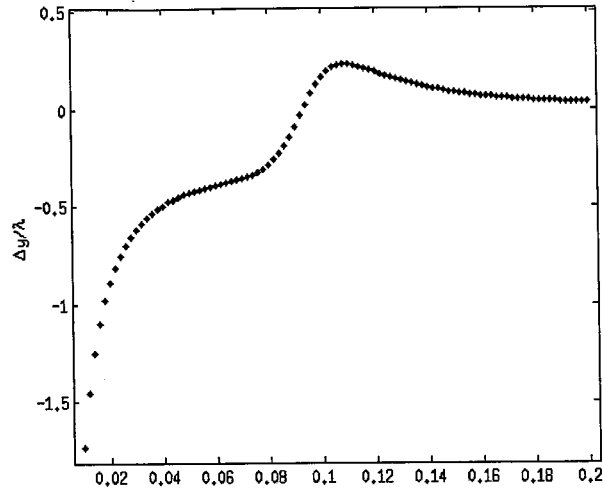


图 4.12 线入射平面波时横向位移随入射角变化情况。

由图可以看出，透射光随着入射角的变化有着不同的横向位移，在接近垂直入射时，横向位移变化剧烈，可以达到波长的近千倍。而在光垂直入射时，横向位移趋于发散。

在实验中，我们一般采用线偏振高斯光来进行实验。在高斯光垂直入射时，由于高斯光有一定的发散角，大部分光并不是严格垂直于界面入射的，发散的只是其中的很少一部分。上图中我们分析的是入射角在一个平面内变化时，透射光的横向位移变化曲线，在高斯光中，入射角沿界面法向矢量呈轴向分布，通过具体分析我们可以发现，此时的透射光为一个环形光斑，光斑半径随着高斯光的发散角变化。当发散角为  $0.5^\circ$  时，透射光的环形光斑半径约为百倍波长，如图 4.13 所示。

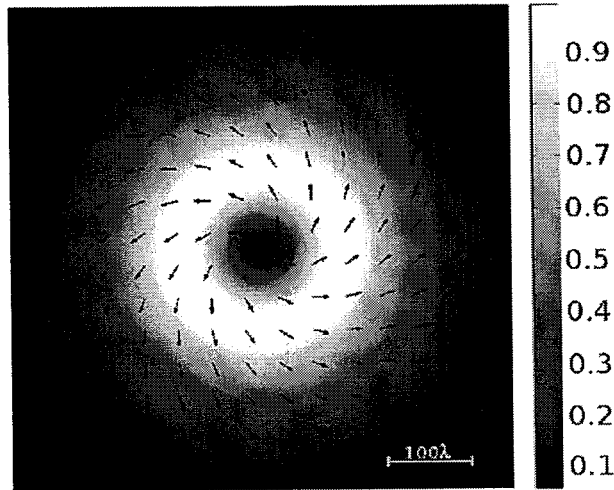


图 4.13 线入射高斯光时透射环形光斑示意图。

#### 4.6 镀反方向磁化铁磁层的对比研究

以上所的结果，均是在拓扑绝缘体平板上下镀同方向磁化铁磁层情况下得

到的，我们这里还做了上下表面镀反方向磁化铁磁层做了对比研究。研究结果发现，当镀反方向磁化铁磁层时，缺陷态透射峰不再是透射率为 0.5 的透射双峰，而是与普通缺陷透射现象类似，是一个透射率为 1 的单峰。另外，其透射光也不再具有丰富的偏振态，而是与入射光保持相同。

#### 4.7 本章小结

本章中，我们详细介绍了拓扑绝缘体平板作为一维光子晶体缺陷缺陷的结构参数以及其选择原则。在此基础上，通过传输矩阵方法进行编程，在保持线偏振入射的情况下，对体系的 band-gap 图、体系 gap 内的透射谱进行了研究。并对透射光的偏振态性质进行了详细讨论。另外，我们还对体系各种参数变化时，缺陷态透射峰位置的变化进行了详细讨论，并且设计了通过这种测量透射峰频率位置的方法来计算精细结构常数。此外，我们还对本体系所产生巨大光学霍尔效应进行了分析研究，发现了在线偏振高斯光入射时，透射光为一环形光斑的现象。

## 第五章 总结

本文的主要工作是对拓扑绝缘体表面的拓扑性质进行了研究，我们这个工作的新颖之处在于利用了一维光子晶体，将拓扑绝缘体平板放入到一维光子晶体中，作为缺陷来研究整个体系的透射特性。

我们整个工作是基于拓扑绝缘体和普通玻璃材料的电磁性质，定出了在拓扑绝缘体界面上的传输矩阵形式，然后用传输矩阵方法对体系的透射率，以及透射光的偏振态进行了研究。由于拓扑绝缘体界面上存在磁电耦合，所以一束线偏振光入射到其界面上时，透射光和反射光的偏振角会有变化。所以，我们这里对传统的二阶传输矩阵进行了扩充，将其写为四阶矩阵形式。在新的传输矩阵形式下，我们就可以方便的对透射光偏振态进行分析。

本文的主要特点是设计了将拓扑绝缘体平板两表面镀上同方向磁化铁磁层后作为一维光子晶体缺陷的体系结构，并通过参数的合理选择，使得拓扑绝缘体平板的共振透射峰落在了光子晶体 gap 内，并保持与光子晶体的 gap 中心重合。通过对 gap 内缺陷态的分析，发现与普通缺陷透射率为 1 的单透射峰不同，拓扑绝缘体缺陷的透射峰为透射率为 0.5 的双峰，并且这两个透射峰处的偏振态分别为左旋偏振和右旋偏振，这两个透射峰的位置决定于拓扑绝缘体的拓扑参数，并受光子晶体参数的影响，我们这里通过有效的除去光子晶体参数的影响，设计了一种通过透射峰来计算精细结构常数的实验方法。

由于我们这个体系中，入射光和透射光的偏振态发生了巨大变化，所以透射光产生了巨大的光学霍尔效应。我们对此现象进行了研究，发现当垂直入射一束线偏振高斯光时，透射光为一环形光斑，当在双峰频率上时，光斑半径最大，达到波长的百倍以上。

另外，我们用等效法布里-珀罗仪分析了本体系，发现等效法布里-珀罗仪界面上的反射、透射系数变成了矩阵形式。我们对这种反射、透射矩阵进行了详细分析，写出了这种情况下的透射率表达式，对法布里-珀罗仪分析公式进行了扩展。