



图 2-12 数据采集

Figure2-12 Data collection

本课题采用 SM125 光纤光栅解调仪，该仪器包括四个通道，大功率扫描激光光源，外型小巧，使用灵活，适合于张力，温度和压力等多种测量；所有通道的全部传感器的扫描频率是 1Hz~10Hz，热稳定性及长期稳定性好，可选无线接口卡及无线监测，内置绝对波长参考，不需要外部波长校准。SM125 光纤光栅解调仪是为测量低速变化，像应力、温度和压力等参数而设计的。1Hz 的扫描频率，可允许在一根光纤上同时连接大于 40 个光纤 Bragg 光栅传感器传感器。SM125 也可随时扩展到 16 个光学通道。SM125 也是一款设计非常精巧的仪器，使用非常方便，只有两公斤，特别适合在野外测试。

截至目前，根据攀田高速公路各高边坡的施工进度，已经对所监测边坡进行了多次数据采集，具体采集时间见表 2-1。

表 2-1 数据采集日期

Table2-1 Data collection date

监测形式	边坡编号	第一次采集日期	第二次采集日期	第三次采集日期	第四次采集日期	第五次采集日期	采集次数
深部测斜仪	E2	9 月 8 日	10 月 1 日	—	—	—	2
	E3	9 月 8 日	10 月 1 日	—	—	—	2
	E4(1)	9 月 8 日	10 月 1 日	—	—	—	2
	E4(2)	9 月 8 日	10 月 1 日	—	—	—	2
锚杆	E1	6 月 21 日	7 月 19 日	8 月 16 日	9 月 17 日	10 月 2 日	5
	E4(1)	6 月 13 日	7 月 20 日	8 月 14 日	9 月 13 日	9 月 30 日	5
	E4(2)	10 月 18 日	—	—	—	—	1
	E4(3)	10 月 18 日	—	—	—	—	1
	E5(1)	6 月 13 日	8 月 14 日	9 月 13 日	9 月 29 日	—	4
	E5(2)	7 月 14 日	8 月 13 日	9 月 20 日	—	—	3
	E6(1)	8 月 19 日	9 月 7 日	9 月 30 日	—	—	3
	E6(2)	7 月 20 日	8 月 18 日	9 月 7 日	9 月 30 日	—	4

2.6 本章小结

本章介绍了室内制作光纤布拉格光栅的方法，光纤布拉格光栅传感器监测应变、温度的工作原理，光纤布拉格光栅传感器分布式布设在锚杆和深部测斜仪上的布设过程和布设位置，对锚杆和深部测斜仪传感器的布设方式、数据采集过程进行了说明。

通过数值模拟的方式确定了深部测斜仪在边坡上的布设位置,确定了深部测斜仪的独特布设方法和合理性。

第3章 深部测斜仪挠度及锚杆受力分析

3.1 引言

锚杆支护技术又称锚杆加固技术，至今已有 100 多年的发展历史，锚固技术是一种优越的技术手段，目前已经推广到道路、冶金、水利水电、铁路公路、军工及建筑等工程之中^[32]。

我国锚固技术与理论研究在近 10 余年取得了丰硕的研究成果，光纤布拉格光栅在土木工程健康监测中的应用已经相当成熟，本研究将光纤布拉格光栅传感器应用于边坡工程锚杆的健康监测，获得锚杆的应变情况，来反映边坡内部应力应变，以此评价边坡稳定性^[33]。

3.2 锚杆受力分析

攀田高速所监测 12 个边坡高度均大于 30 米根据建筑边坡工程技术规范规定，边坡安全等级均属于一级，因此加固后的边坡安全系数应大于 1.30^[1]。

锚杆是将拉力传至稳定岩土层的构件，锚杆总长度应为锚固段、自由段和外锚段的长度之和，应该满足如下要求，锚杆自由段长度按外锚头到潜在滑裂面的长度计算；预应力锚杆自由段长度应大于等于 5 米，并且超过滑裂面，攀田高速锚杆监测分布在 E1、E4、E5、E6 四个标段，具体分布情况见表 3-1。

表 3-1 监测边坡数量(锚杆)

Table3-1 Number of slopes monitored (Anchors)

标段	E1	E4	E5	E6
监测高边坡数量	1	3	2	2

根据图纸和实际施工过程，攀田高速公路路堑边坡中六米锚杆直径为 32 毫米，9 米锚杆直径为 28 毫米，两者均采用土钉设计方法，全长灌浆；12 米、15 米锚杆均为连接包括焊接和对接，锚固段长度均为 9 米，超过且满足设计的锚固段长度 6.5 米，水泥砂浆采用 M25，现场打孔为 110 毫米。坡度为 1: 0.75，锚杆根水平线的夹角为 15 度，传感器分布总共布置 4 个，其中包括三个应变传感器，波长不同，串联在一起，按照光纤布拉格光栅波

长由大到小从锚杆外侧至锚杆端 1.5 米处。传感器之间的间距分别为 2 米，2.5 米。温度传感器在双芯条线的另一条上，处于自由状态，所有传感器均为裸光纤，光栅位置为纤芯，通过环氧树脂粘贴在锚杆肋部。

在小变形情况下，可以将裸光纤光栅传感器所测到的应变作为该处锚杆的应变，该应变为光纤布拉格光栅传感器长度的平均应变，将最外侧传感器测得的应变进行锚杆受力分析。

本课题所监测边坡大部分锚杆为预应力锚杆，采用紧固锚杆端部螺母进行预应力施加，施加荷载采用测力扳手配合加长套筒进行控制，应先在工地进行试验取得经验后再大面积施工。计算公式为：

锚固长度=5.25×螺母扭矩/螺纹公称直径

螺母扭矩=扳力×扳手长度

螺纹的直径有大径 d (外螺纹)或 D (内螺纹)、小径 d_1 (外螺纹)或 D_1 (内螺纹)、中径 d_2 (外螺纹)或 D_2 (内螺纹)之分。普通螺纹、梯形螺纹和锯齿形螺纹的大径又称公称直径。大径是指与外螺纹牙顶或内螺纹牙底相切的假想圆柱面的直径，小径是指与外螺纹牙底或内螺纹牙顶相切的假想圆柱的直径。中径是指通过牙型上的沟槽宽度和凸起宽度相等处的假想圆柱的直径^[34]。

本课题在攀田高速公路第一合同段边坡一、第四合同段边坡一、3，第五合同段边坡一、二，第六合同段边坡一、二(文中简称 E1, E4, E4(3), E5(1), E5(2), E6(1), E6(2))共 8 个边坡,以锚杆为监测对象，进行监测。

工程中所采用锚杆均为 HRB335 即为热轧二级螺纹钢筋，根据土层锚杆设计与施工规范，该型号钢筋具有不小于 95%的保证率的抗拉强度，水泥砂浆为 M30。

锚杆与混凝土组合体的弹性模型计算公式^[35]如下：

$$E_t = \frac{E_s A_s + E_c A_c}{A_s + A_c} \quad (3-1)$$

式中 E_t ——水泥与锚杆组合体的弹性模型；

E_s ——钢筋的弹性模量；

E_c ——水泥砂浆的弹性模量；

A_s ——钢筋的横截面积；

A_c ——水泥砂浆的横截面积。

$$\text{其中: } A_s = \frac{\pi d_s^2}{4}$$

$$A_c = A_t - A_s = \frac{\pi d_t^2}{4} - \frac{\pi d_s^2}{4} \quad (3-2)$$

式中 A_t ——打孔横截面积；
 d_t ——孔径本文中取 110 毫米；
 d_s ——钢筋直径本文中取 32 毫米，28 毫米。

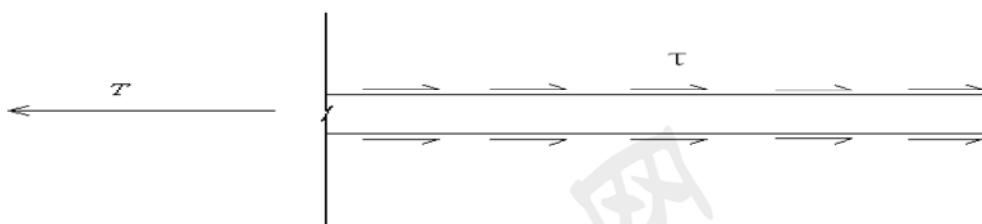


图 3-1 锚杆受力隔离体

Figure3-1 Segment of anchors

本文中预应力锚杆设计锚固荷载为 100kN, 抗拔荷载为 165kN, 如图 3-1 锚杆受力计算公式推导如下:

$$E \cdot A \cdot \varepsilon_i = \tau \cdot \pi \cdot d \cdot l_a \quad (3-3)$$

由式(3-1)得锚杆表面摩阻力,

$$\tau = \frac{E \cdot A \cdot \varepsilon_i}{\pi \cdot d \cdot l_a} \quad (3-4)$$

式中 E ——钢筋的弹性模量；
 ε_i ——第 i 个传感器所监测到的应变值；
 l_a ——锚固段的长度。

锚杆设计抗拔荷载为 165kN。

锚杆极限容许锚固力 T_a 如式^[36](3-3)

$$T = \frac{T_f}{F_s} = \frac{\pi D L c}{F_s} \quad (3-5)$$

式中 D ——灌浆锚杆直径；
 L ——灌浆锚杆锚固段的长度；
 c ——灌浆锚杆锚固段的长度；
 F_s ——安全系数。

3.2.1 锚杆监测数据分析

光纤光栅传感器光栅长度为 15 毫米,传感器部分为裸光纤并且紧密粘贴在锚杆上,所以传感器所反映的变形为锚杆该微段的平均应变。对于在硅光纤中写入的光纤光栅的测量灵敏度,1989 年 Moery 等人^[37]试验测得波长为光纤光栅应变系数。

其工作原理如下,布拉格光栅会反射特定波长的光,该波长满足特定的条件如下^[38]:

$$\lambda_B = 2n_{eff}\Lambda \quad (3-6)$$

式中 λ_B ——反射光的中心波长,一般为 1510 到 1590nm 左右;

n_{eff} ——光纤的有效折射率;

Λ ——光纤光栅的栅距。

光纤光栅的中心波长漂移 $\Delta\lambda$ 和纵向应变 $\Delta\varepsilon$ 的关系为:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = c_\varepsilon\Delta\varepsilon + c_T\Delta T \quad (3-7)$$

式中 $c_\varepsilon = 1 + P_e$;

$P_e = -\frac{1}{n} \frac{dn}{d\varepsilon}$ 为光纤材料的弹光系数。

因此 c_ε 大约为 $0.78 \times 10^{-6} \mu\varepsilon^{-1}$,对于温度,假设温度变化为 ΔT ,与之相对应的光纤光栅中心波长的变化 $\Delta\lambda_T$ 为:

$$\frac{\Delta\lambda_T}{\lambda_T} = c_T\Delta T \quad (3-8)$$

其中 $c_T = \alpha_f + \xi$, $\alpha_f = \frac{1}{\Lambda} \frac{d\Lambda}{dT}$ 为光纤的热膨胀系数, $\xi = \frac{1}{n} \frac{dn}{dT}$ 为光纤材料的热光系数,本文所采用的石英光纤 c_T 大约为 $6.67 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ ^[29]。

为了准确地测量物体的实际应变,光纤光栅的读数一般需要进行温度补偿。如果在同一温度场内再增设一个不受外力作用的光纤光栅并测其相应温度,则真正的应变可以修改为:

$$\varepsilon = \frac{\left(\frac{\Delta\lambda_{\varepsilon+T}}{\lambda_{\varepsilon+T}} - \frac{\Delta\lambda_T}{\lambda_T} \right)}{C_\varepsilon} \quad (3-9)$$

利用上述公式对监测数据进行分析处理,见表 3-2。

表 3-2 锚杆的应变监测
Table 3-2 Strain data of anchors

断面编号	锚杆 编号	未考虑温度补偿的点应变($\mu\epsilon$)			温度影响 ($\mu\epsilon$)
		传感器 1	传感器 2	传感器 3	
A 断面	A1	-4.27099	-2.87390	0.08910	0.23093
	A2	0.00188	0.00953	0.00368	0.00019
	A3	77.18269	69.15758	16.28151	-0.14821
	A4	88.61577	89.52070	74.88748	0.03221
	A5	15.01132	40.93598	45.30528	0.07206
	A6	0.64928	-17.82510	33.31016	4.81445
B 断面	B1	-6.95409	-6.95409	-6.95409	-0.08990
	B2	72.48035	73.13801	324.40650	-0.22323
	B3	-2.44625	113.11658	47.05997	0.13096
	B4	—	—	—	—
	B5	40.99929	31.00780	27.88821	-1.44390
	B6	-1.48288	34.44545	-13.79991	-1.33009
C 断面	C1	-13.43766	34.71843	-1.93069	-0.78631
	C2	-41.51396	9.68034	62.13990	-0.57531
	C3	29.99105	-4.39718	17.31263	0.01578
	C4	-56.33914	59.89495	29.43509	-0.99000
	C5	111.47321	52.56230	213.21810	15.73233
	C6	66.07037	-61.72648	-3.97603	-1.69713

注 表中 A、B、C 均代表边坡不同断面，按照从左到右的顺序对监测断面进行编排。

通过光纤 Bragg 传感器的性质，对以上所测应变进行温度补偿，得到各传感器实际监测到的应变见表 3-3。

表 3-3 锚杆应变（温度补偿后）

Table 3-3 Strain of anchors (No temperature affection)

断面编号	锚杆编号	温度补偿后的点应变($\mu\epsilon$)		
		传感器 1	传感器 2	传感器 3
A 断面	A1	-6.27831	42.63933	46.08769
	A2	0.27084	44.28862	46.70734
	A3	0.27084	44.28862	46.70734
	A4	78.47094	85.19681	—
	A5	88.61577	88.61577	88.61577
	A6	-25.11280	-25.11280	-25.11280
B 断面	B1	-6.95409	29.08125	33.11245
	B2	-3.14036	72.48035	83.47193
	B3	-3.60380	106.64330	130.13490
	B4	—	—	—
	B5	40.66537	124.84830	131.37240
	B6	10.07866	8.79429	474.88760
C 断面	C1	-13.43770	-10.33147	-13.76620
	C2	-35.28190	-36.51320	-48.42690
	C3	29.99105	82.82547	90.23596
	C4	47.73370	11.37210	19.93620
	C5	25.23050	75.54160	20.52230
	C6	68.46173	137.60040	185.13240

以 E51 边坡为例对锚杆监测数据进行分析，进行温度补偿，其中 E51 边坡为三级边坡，共监测三个纵向断面，锚杆 18 根，其中第一级边坡锚杆长度为 9 米，第二级边坡锚杆长度为 12 米，第三级边坡锚杆长度为 15 米，每根锚杆上均安装 3 个光纤 Bragg 应变传感器和一个光纤 Bragg 温度传感器，其中锚杆 B4 在施工过程中损坏，其它锚杆均工作良好。

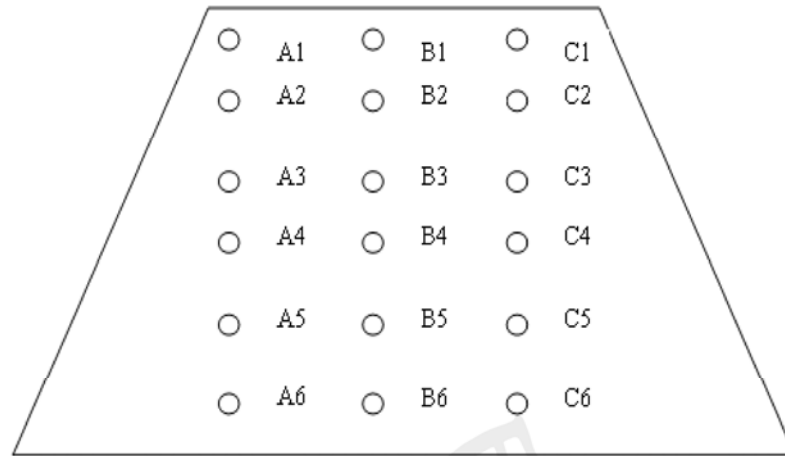
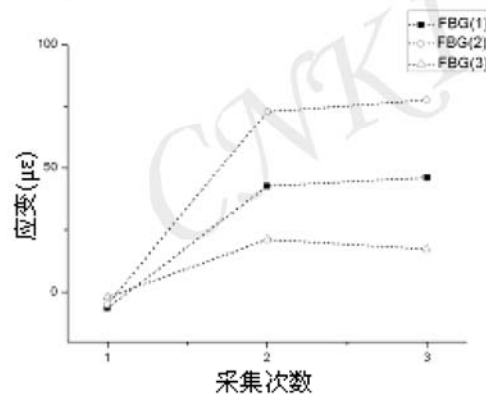


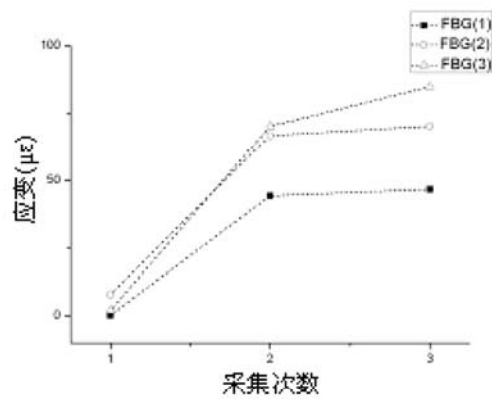
图 3-2 E51 边坡监测锚杆分布示意图

Figure3-2 Schematic diagram of anchors positions on slope E51

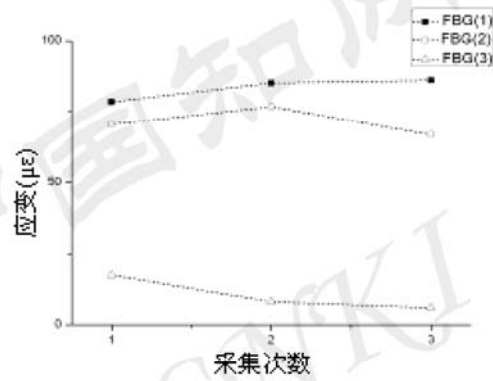
E51 边坡 A、B、C 三个断面不同位置锚杆，从孔外到内 FBG(1)、FBG(2)、FBG(3)，所测应变随监测次数的变化如图 3-3，3-4，3-5 所示。



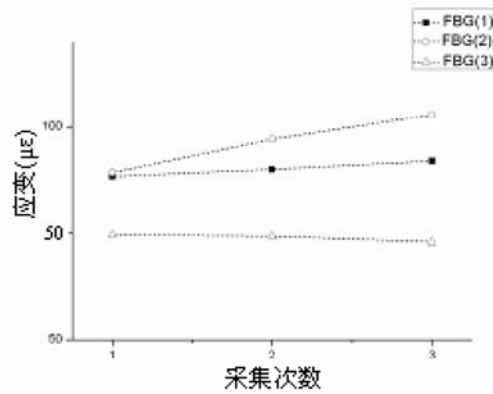
a) 锚杆 A1 应变监测结果



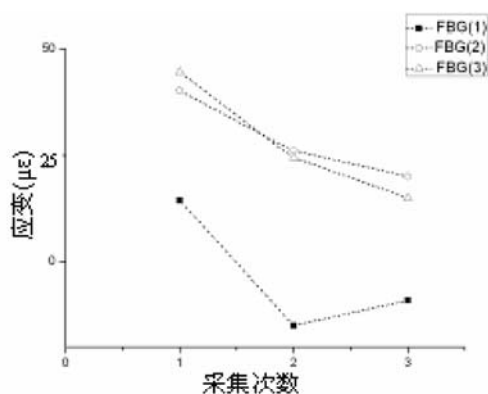
b) 锚杆 A2 应变监测结果



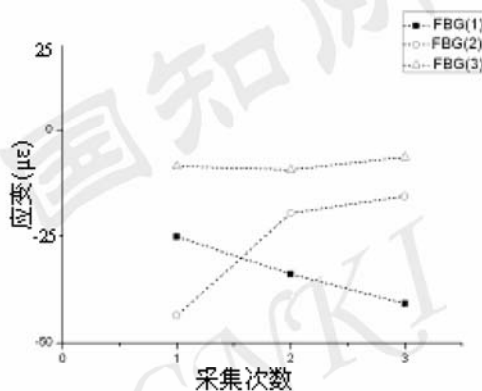
c) 锚杆 A3 应变监测结果



d) 锚杆 A4 应变监测结果



e) 锚杆 A5 应变监测结果

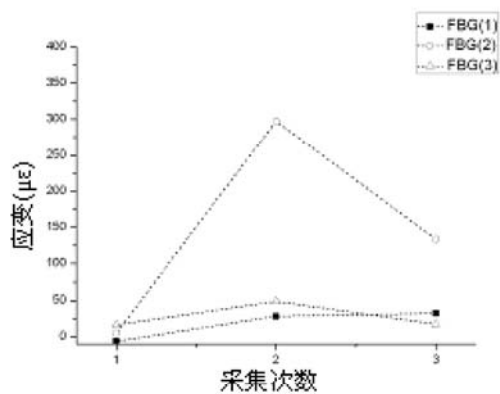


f) 锚杆 A6 应变监测结果

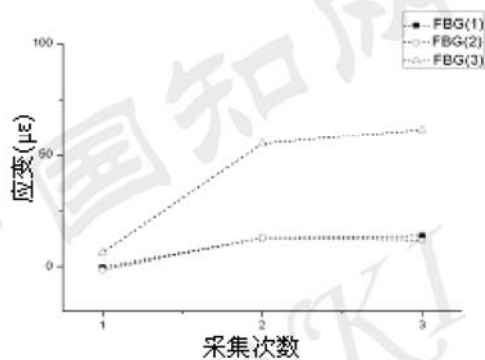
图 3-3 E51 边坡 A 断面锚杆各测点应变变化

Figure3-3 Variation of strain on anchors in slope E51 section A

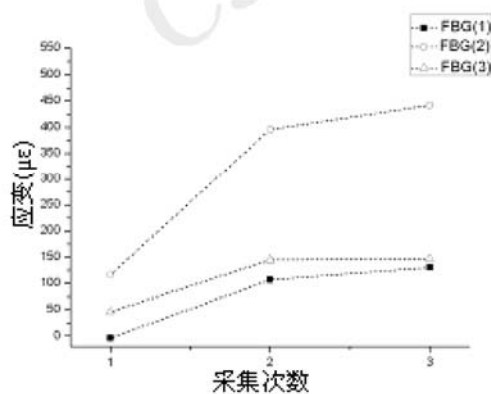
由图 3-3 可以看出在数据采集的四个月内, 锚杆应变达到稳定状态, 第三个月和第四个月之间的差别不大, 其中 A1 和 A3 锚杆不同位置传感器所测应变差别较大, 且应变较大, 其中 A3 位置的应变最大, 说明潜在滑裂面的位置在第二级边坡上侧, A2、A4 锚杆各位置应变差别不大, 证明锚杆整体变形差别不大, 锚杆受力相对均匀。



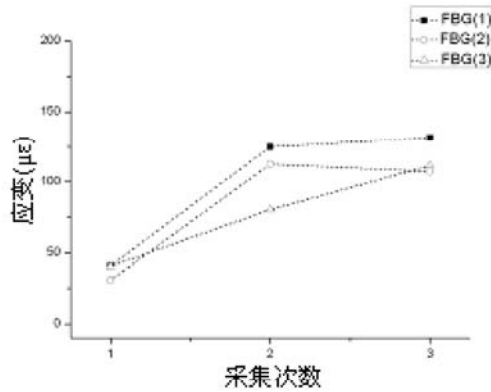
a) 锚杆 B1 应变监测结果



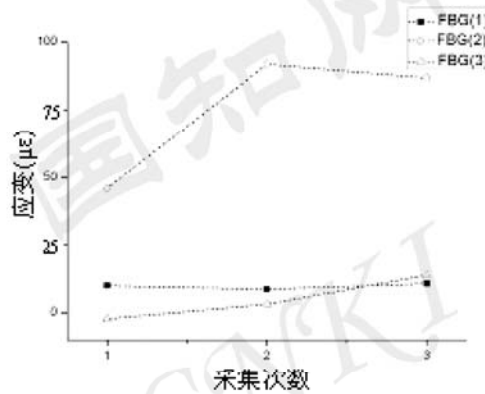
b) 锚杆 B2 应变监测结果



c) 锚杆 B3 应变监测结果



d) 锚杆 B5 应变监测结果

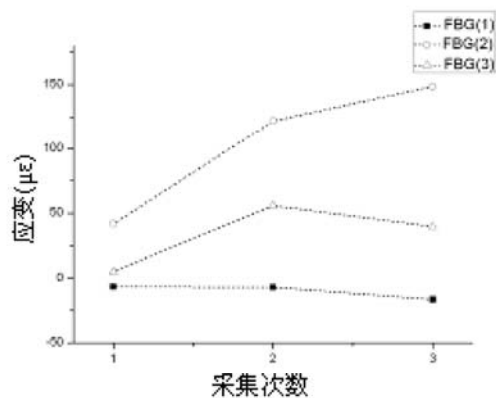


e) 锚杆 B6 应变监测结果

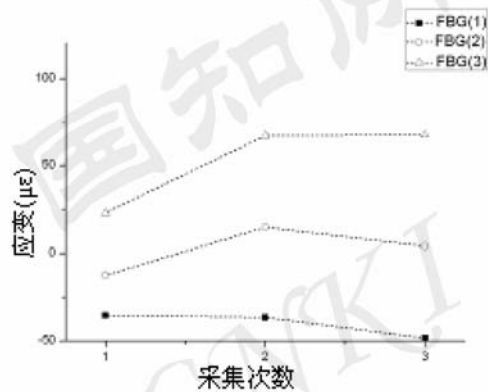
图 3-4 E51 边坡 B 断面锚杆各测点应变变化

Figure3-4 Variation of strain on anchors in slope E51 section B

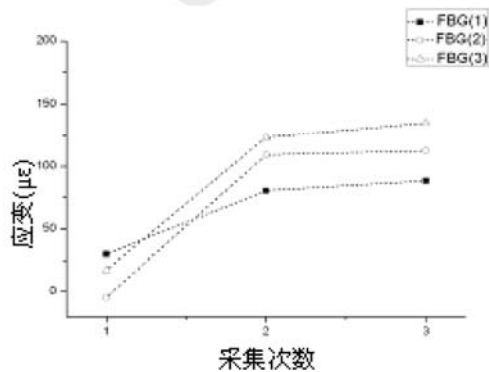
由图 3-4 锚杆中部应变较大,其中 B1 锚杆中部应变在 9 月份数据检测中应变突然增大,然后有所减小,攀枝花地区在 2008 年 8 月 30 日发生里氏 6.3 级地震,对边坡内部应力应变分布有一定的影响,B6 锚杆两端应变明显小于锚杆中部应变,说明滑裂面贯穿锚杆中部。



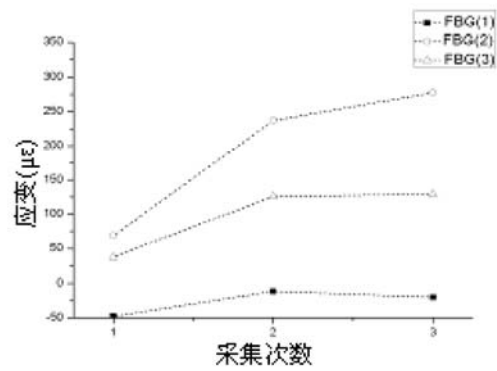
a) 锚杆 C1 应变监测结果



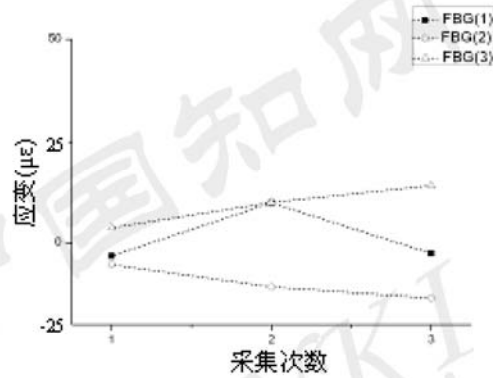
b) 锚杆 C2 应变监测结果



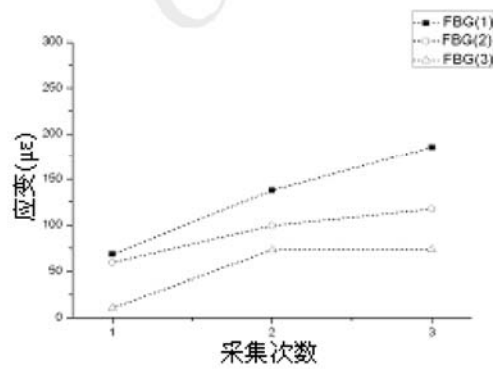
c) 锚杆 C3 应变监测结果



d) 锚杆 C4 应变监测结果



e) 锚杆 C5 应变监测结果



f) 锚杆 C6 应变监测结果

图 3-5 E51 边坡 C 断面锚杆各测点应变变化

Figure3-5 Variation of strain on anchors in slope E51 section C

可以看出, 锚杆 C2 达到稳定状态, 各点应变一直在增加。
锚杆轴力计算假定:

- 1) 锚杆在边坡被动区只受拉力作用;
- 2) 锚杆轴力沿横截面均匀分布;
- 3) 锚杆受的拉力与钢筋所受拉力相同, 即认为目前钢筋与岩土体间的水泥砂浆无相对滑移。

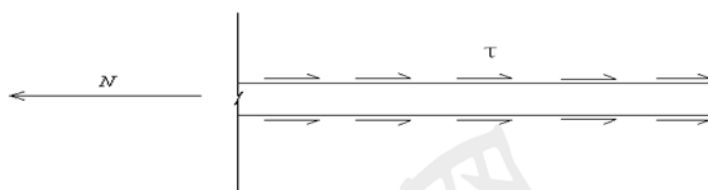


图 3-6 锚杆轴力计算

Figure3-6 Axial force calculation

由此, 可以监测到传感器对应位置锚杆的点应变, 通过点应变根据锚杆抗拔力与锚杆所受到的拉力平衡, 如图 3-6 所示, 以光纤 Bragg 传感器部分为隔离体进行受力分析, 应力与应变的关系式:

$$E_t \varepsilon A_t = N \quad (3-10)$$

式中 E_t ——锚杆水泥砂浆组合体的弹性模量;

σ ——锚杆截面所受正应力;

A_t ——孔的横截面积。

其中锚杆和水泥砂浆组合体的弹性模量:

$$E_t = \frac{E_s A_s + E_m A_m}{A_t}$$

其中 A_s ——锚杆的横截面积;

E_m ——水泥砂浆的弹性模量;

A_m ——水泥砂浆的横截面积。

本研究中所采用的锚杆孔径均为 110mm, 计算得本文中所采用的 $\Phi 32$ 锚杆, $\Phi 28$ 水泥砂浆组合体弹性模量为 386320 N/m^2 , 351540 N/m^2 。

通过公式 3-10, 对 E51 边坡所监测锚杆进行轴力计算得到 E51 边坡各监测断面锚杆当前所受的轴向拉力见表 3-4。

表 3-4 锚杆当前轴力

Table 3-4 Axial force of anchors

断面编号	锚杆编号	锚杆各测点的轴力值(kN)		
		传感器 1	传感器 2	传感器 3
A 断面	A1	7.783	13.135	2.905
	A2	7.888	11.873	14.349
	A3	14.389	12.972	1.369
	A4	15.198	16.401	12.549
	A5	-2.525	4.414	4.133
	A6	-5.699	-3.310	-1.583
B 断面	B1	5.458	-7.405	22.539
	B2	13.650	11.578	61.524
	B3	21.978	74.641	24.836
	B4	—	—	—
	B5	16.987	13.862	14.412
	B6	80.204	14.658	2.362
C 断面	C1	-2.759	25.117	6.691
	C2	-81.789	6.823	113.935
	C3	14.920	19.000	22.823
	C4	-3.367	46.863	21.838
	C5	-2.653	-13.510	14.016
	C6	31.267	-19.834	12.437

表中 A、B、C 三个断面分别代表 E51 边坡左中右三个断面，其中传感器各测点 B6 锚杆外侧传感器的轴力最大，最大轴力值为 113.9353863 kN ，远远小于钢筋的抗拉强度，证明所有的锚杆当前受力状态是安全的，该边坡锚杆工作良好，不存在滑坡危险。

3.2.2 失稳边坡锚杆安全性评定

攀田高速公路第四合同段某边坡由于施工开挖造成某边坡扰动，加之攀枝花 6 月份处于雨季，降雨充分，边坡稳定性降低，如图 3-7 所示，在施工

过程中，边坡大面积滑坡，传感器监测边坡滑坡后的锚杆受力状况。



图 3-7 滑坡边坡

Figure3-6 Landslide slope

在垮塌边坡 E4，进行了初步处理之后，对该边坡进行支护，该边坡岩体强度较大，并对其进行了支护，我们有选择的对边坡支护锚杆进行了监测，共监测锚杆 7 根，其中 C3 锚杆在边坡滑坡中心，监测锚杆分布如图 3-8 所示。

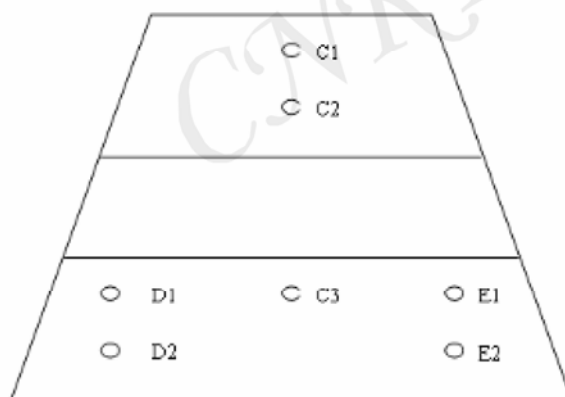
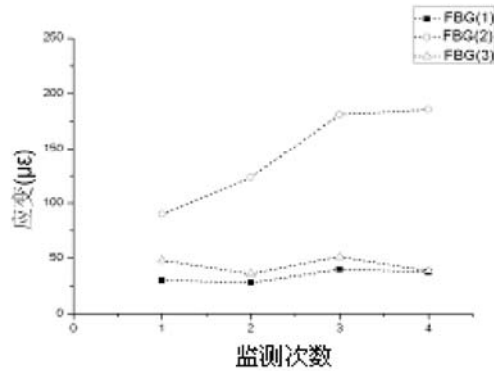
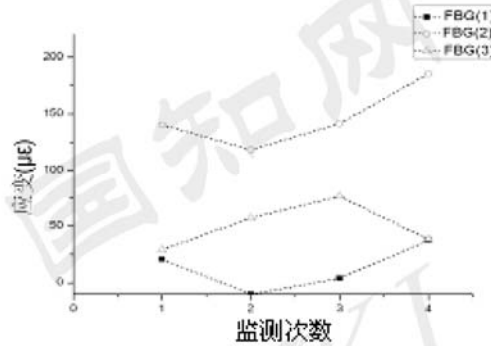


图 3-8 E41 边坡监测锚杆分布示意图

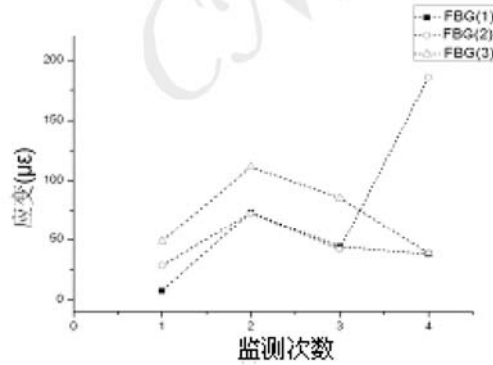
Figure3-8 Schematic diagram of anchor positions on slope E41



a) 锚杆 C1 应变监测结果



b) 锚杆 C3 应变监测结果



c) 锚杆 D1 应变监测结果

图 3-9 垮塌边坡滑裂面中部锚杆拉力

Figure3-9 Axial force of anchor on the collapse slope

如图 3-9 所示，垮塌边坡锚杆轴力目前均为达到稳定状态，锚杆应变未出现较大突变，边坡其中 C3 锚杆位于滑裂面部位，应变在突然增加又迅速

减小, D1 位于垮塌边坡附近, 锚杆轴向拉力在不断增加, 证明边坡中部滑坡对降低了边坡两侧的稳定性。

3.3 深部测斜仪监测数据挠度求解

3.3.1 深部测斜仪挠度求解公式

由光纤光栅传感器的点应变, 我们可以获得深部测斜仪相应位置的点应变, 因为深部测斜仪的刚度非常低, 可以认为深部测斜仪的变形就是边坡内部的变形。

光纤按照一定的施工工艺, 用经室内外试验和工程实践验证过的特殊的胶黏着在深部测斜仪上, 构成传感系统。该传感器具有光纤传感器的一切优点, 并可进行准实时监测。光纤传感器所得到的监测结果, 是沿光纤传感器的轴向物理信息, 获得沿光纤传感器分布的边坡水平变形量, 计算挠度的方法来近似计算边坡的水平变形量。

挠度是横截面形心在垂直于 x 轴方向的线位移 f 称为该截面的挠度; 深部测斜仪变形后的轴线是一条平滑的连续曲线, 横截面仍与曲线保持垂直, 度量弯曲变形程度的基本量是曲率 κ , 曲率与弯矩之间的物理关系公式^[40]为

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (3-11)$$

式中的曲率 κ ——表示弯曲程度的量, 不考虑剪力的影响。

目前对于深部测斜仪得布设方法有两种方法, 根据参考文献的阅读^[24], 现有的类似于计算深部测斜仪两侧应变推导过程, 首先建立方程, 对点应变进行估计, 将深部测斜仪假设为悬臂梁, 边界条件为底部位移为零, 应变为零, 应用于 FRP 板上, 该方法是基于悬臂梁理论。计算公式如 3-12。

边坡潜在滑裂面求目前对于深部测斜仪得布设没有成型的方法, 根据参考文献的阅读首先建立线性方程, 对点应变进行估计:

$$\varepsilon_e(x) = a_1 + a_2 x$$

将深部测斜仪假设为悬臂梁, 边界条件为底部位移为零, 应变为零。在最小二乘法中, 误差函数求偏导求得最小值。

$$\begin{bmatrix} m \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G^T G & F^T \\ F & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} G^T d \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3-12)$$

利用该方法计算得到的深部测斜仪挠度最大值在 2 米以上, 不符合所监测边坡当前的状况, 因此, 该方法不适合对深部测斜仪进行挠度分析。

3.3.2 差分方法求解深部测斜仪挠度

差分方程反映的是关于离散变量的取值与变化规律。通过建立一个或几个离散变量取值所满足的平衡关系, 从而建立差分方程^[41]。

差分方程模型有着广泛的应用。实际上, 连续变量可以用离散变量来近似和逼近, 从而微分方程模型就可以近似于某个差分方程模型。差分方程模型有着非常广泛的实际背景, 只要牵涉到关于变量的规律、性质, 就可以适当地用差分方程模型来表现与分析求解。

在实际建立差分方程模型时, 往往要将变化过程进行划分, 划分成若干时段, 根据要解决问题的目标, 对每个时段引入相应的变量或向量, 然后通过适当假设, 根据事物系统的实际变化规律和数量相互关系, 建立每两个相邻时段或几个相邻时段或者相隔某几个时段的量之间的变化规律和运算关系等式, 从而建立起差分方程^[42]。

设数列 $\{x_n\}$, 定义差分算子 $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ 为 x_n 在 n 处的向前差分。

而 $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$ 为 x_n 在 n 处的向后差分。

可见 Δx_n 是 n 的函数。从而可以进一步定义 Δx_n 的差分: $\Delta(\Delta x_n) = \Delta^2 x_n$ 称之为在 n 处的二阶差分, 它反映的是的增量的增量。

一阶差分方程:

$$\Delta f = \frac{(f_{x+h} - f_x)}{h} \quad (3-13)$$

二阶差分方程:

$$\Delta(\Delta f) = \frac{1}{h} \left(\frac{(f_{x+2h} - f_{x+h})}{h} - \frac{(f_{x+h} - f_x)}{h} \right) = \frac{1}{h^2} (f_{x+2h} - 2f_{x+h} + f_x) = \frac{M}{EI} \quad (3-14)$$

深部测斜仪的应力应变关系方程:

$$\frac{1}{h^2} (f_{x+2h} - 2f_{x+h} + f_x) = \frac{1}{R} \frac{MR}{EI} = \frac{\varepsilon_i}{R} \quad (3-15)$$

上述方程可以改写成矩阵的形式:

$$\frac{R}{h^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_{x+h} \\ f_{x+2h} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{x+(n-1)h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \cdot \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \quad (3-16)$$

假设深部测斜仪底部传感器位置的挠度 $f_0 = 0$, 因此上述方程式封闭的。

$$\frac{R}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & 1 & -2 & 1 & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_h \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{(n-1)h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \cdot \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \quad (3-17)$$

通过矩阵求逆矩阵, 可以直接求得位移和传感器所测点应变的关系如下:

$$\begin{bmatrix} f_0 \\ f_h \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{(n-1)h} \end{bmatrix} = \frac{h^2}{R} \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & 1 & -2 & 1 & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \cdot \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \quad (3-18)$$

式中 f_x —— 光纤布拉格光栅传感器位置的挠度值;

f_{x+ih} —— 第 i 个光纤布拉格光栅传感器位置的挠度值;

f_{x+nh} —— 第 n 个光纤布拉格光栅传感器位置的挠度值;

n —— 传感器的数量, 本文中取 10;

h —— 两个光纤布拉格光栅传感器之间的距离, 本文中为 1 m;

R —— 深部测斜仪的内径;

ε_i —— 从底部数第 i 个光纤布拉格光栅传感器监测到的应变值。

3.3.3 差分方法的实验验证

在室内制作深部测斜仪，将光纤布拉格光栅传感器安装在测斜管上，在相应位置分级施加压力，然后又分级卸载，再整个过程中对深部测斜仪中的光纤 Bragg 传感器进行监测，通过计算得到各测点的应变值，然后利用差分计算的方法得到深部测斜仪各点的挠度值。

将光纤布拉格光栅传感器所测得的结果与高精度位移计所得结果对比，来说明该方法是完全成立的。

本文中直径 d 就是深部测斜仪直径 $\Phi 75$ ，积分起点为深部某无应变点，边界条件为底部的挠度为零。差分方法计算所得挠度见表 3-5。

表 3-5 差分方法计算所得挠度

Table 3-5 Deflection values calculated by differential method

位置 (m)	挠度(mm)							
	加载(1)	加载(2)	加载(3)	加载(4)	加载(5)	加载(6)	加载(7)	加载(8)
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.10	0.60	-0.21	-0.17	-0.48	-0.75	-1.08	-1.31	0.07
0.50	-0.60	0.227	0.24	0.56	0.85	1.18	1.44	0.06
0.90	-1.74	0.59	0.60	1.50	2.30	3.28	4.01	0.06
1.30	-2.77	0.0073	0.74	2.11	3.50	4.79	5.95	0.04
1.70	-3.61	0.47	0.49	2.13	3.9	5.32	6.74	0.03
2.10	-4.13	-0.09	-0.07	1.60	3.07	4.82	6.31	0.03
2.50	-4.08	-0.87	-0.86	0.58	1.79	3.28	4.59	0.02
2.90	-4.13	-1.40	-1.43	-0.10	0.41	1.43	2.40	0.01
3.20	-2.26	-1.29	-1.31	-0.80	-0.42	0.06	0.58	0.01
4.00	3.38	2.44	2.48	2.2	1.66	1.19	0.65	-0.01
4.40	7.38	5.69	5.78	4.9	4.19	3.29	2.17	-0.01
4.80	12.06	9.58	9.76	8.6	7.43	6.09	4.40	-0.02

同时我们在深部测斜仪各个 FBG 的部位布置了高精度位移计(简称 LVDT)来直接测量各个测点的实际挠度，测得各点挠度见表 3-6。

表 3-6 高精度位移计测得挠度

Table 3-6 Deflection values measured by LVDT

位置 (m)	挠度(mm)							
	加载(1)	加载(2)	加载(3)	加载(4)	加载(5)	加载(6)	加载(7)	加载(8)
0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.10	0.56	-0.20	-0.16	-0.49	-0.77	-1.06	-1.30	0.07
0.50	-0.58	0.23	0.24	0.55	0.84	1.19	1.46	0.06
0.90	-1.72	0.61	0.59	1.55	2.32	3.21	4.11	0.06
1.30	-2.76	0.72	0.75	2.12	3.34	4.77	5.93	0.04
1.70	-3.63	0.48	0.51	2.14	3.57	5.34	6.71	0.03
2.10	-4.09	-0.11	-0.06	1.61	3.08	4.80	6.34	0.03
2.50	-4.17	-0.88	-0.87	0.59	1.80	3.27	4.61	0.02
2.90	-3.61	-1.40	-1.46	-0.41	0.40	1.42	2.42	0.01
3.20	-2.22	-1.25	-1.30	-0.82	-0.41	0.07	0.64	0.01
4.00	3.32	2.42	2.47	2.01	1.67	1.18	0.68	-0.01
4.458	7.42	5.71	5.77	4.91	4.21	3.27	2.21	-0.01
4.80	12.07	9.62	9.78	8.47	7.42	6.12	4.43	-0.02

3.3.4 实验误差分析

误差分析的目的就是评定实验数据的精确或误差，通过误差分析，可以认清误差的影响，并设法排除数据中所包含的无效成分。在实验中注意哪些是影响实验精确度的主要方面，这对正确地组织实验方法、正确评判实验结果和设计方案具有重要的指导意义。

标准误差是目前最常用的一种表示精确度的方法，它不但与一系列测量值中的每个数据有关，而且对其中较大的误差或较小的误差敏感性很强，能较好地反映实验数据的精确度，实验越精确，其标准误差越小。

在有限次测量中，标准误差可用下式表示：

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - x_m)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum d_i^2}{n}} \quad (3-19)$$

经计算高精度位移计与差分方法所求得的挠度在整个加卸载过程中的标

准差分别为: 0, 0.002197, 0.001985, 0.001373, 0.001642, 0.001265, 0.002783, 0.003629, 0。

3.3.5 实测边坡挠度

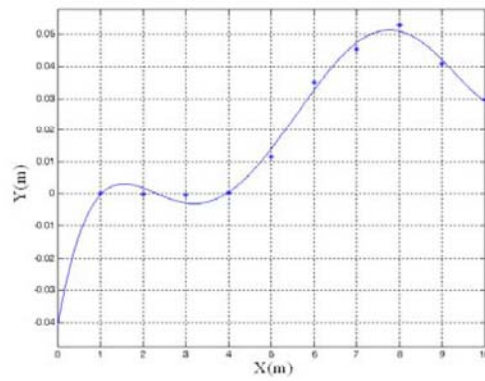
通过差分方法计算得到深部测斜仪挠度值见表 3-7

表 3-7 深部测斜仪各监测点挠度

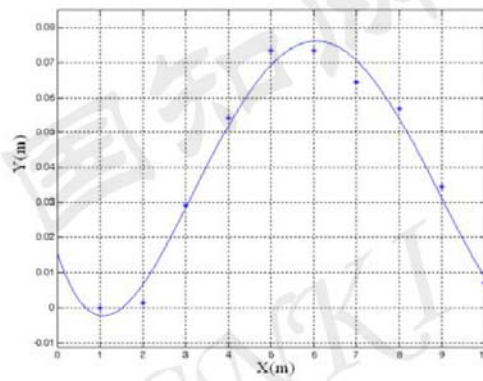
Table 3-7 Deflection values of inclinometers

光纤布拉格光栅传感器编号及所测挠度(m)						
边坡	EI2			EI3		
测点	测斜仪 1	测斜仪 2	测斜仪 3	测斜仪 1	测斜仪 2	测斜仪 3
1	0.00000	0.00000	0.00002	0.00000	0.00000	0.00000
2	-0.00019	0.00149	0.00029	0.00462	0.00020	0.00500
3	-0.00028	0.02913	0.00110	0.01862	0.00113	0.01120
4	0.00020	0.05423	0.00194	0.03921	0.00227	0.04726
5	0.01140	0.07347	0.01305	0.04315	0.00381	0.09432
6	0.03516	0.07349	0.06544	0.04714	0.00714	0.12685
7	0.04539	0.06455	0.04490	0.03121	0.01079	0.14063
8	0.05290	0.05695	0.02579	0.03691	0.01455	0.09256
9	0.04089	0.03447	0.01854	0.06257	0.01863	0.01617
10	0.02963	0.00729	0.01415	0.08800	0.02319	0.00924

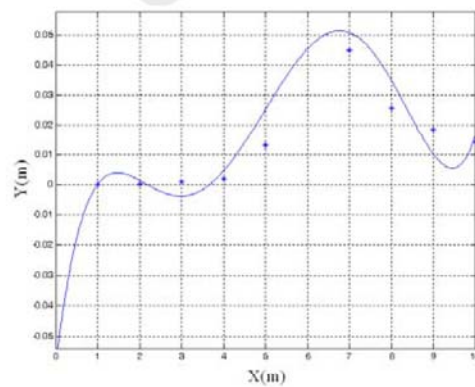
通过对表 3-7 中的数据进行拟合得到, 各个边坡深部测斜仪传感器位置(底端 10 米)的挠度, 因为深部测斜仪的刚度低, 所以该挠度可以等效为边坡内部的位移量, 为了方便利用拟合后的挠度关于边坡竖向位置的关系式来建立最优化数学模型求得各边坡, 潜在滑裂面的位置, 我们以传感器所在高度为横坐标, 以深部测斜仪的挠度为纵坐标, 拟合所得的便是深部测斜仪各点挠度关于竖向位置的函数。为了后面计算方便我们以挠度为函数, 以测斜管竖向坐标为变量拟合得到了各个深部测斜仪的挠度变化曲线, 如图 3-10 所示。



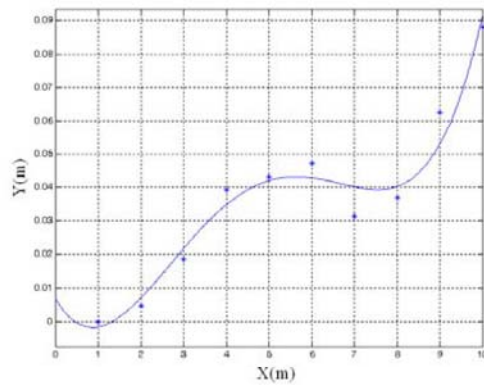
a) EI2 顶部深部测斜仪所测挠度



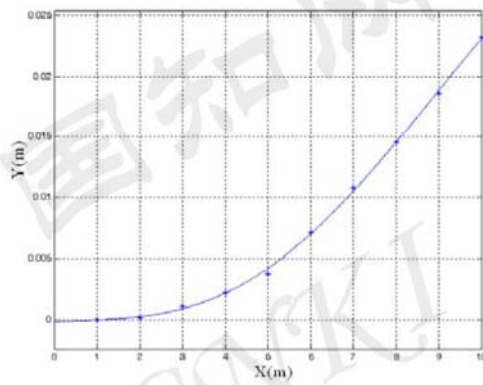
b) EI2 中部深部测斜仪所测挠度



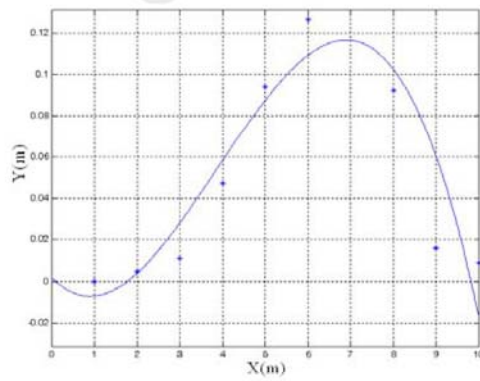
c) EI2 边坡底部测斜仪所测挠度



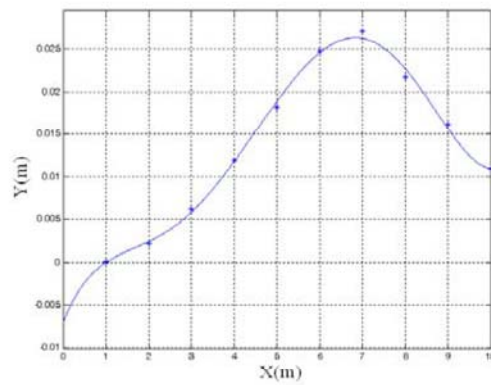
d) EI3 边坡顶部深部测斜仪所测挠度



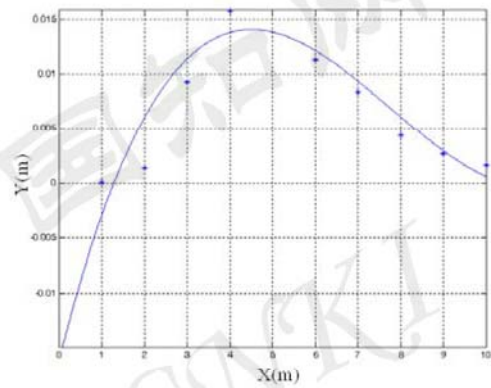
e) EI3 边坡中部深部测斜仪所测挠度



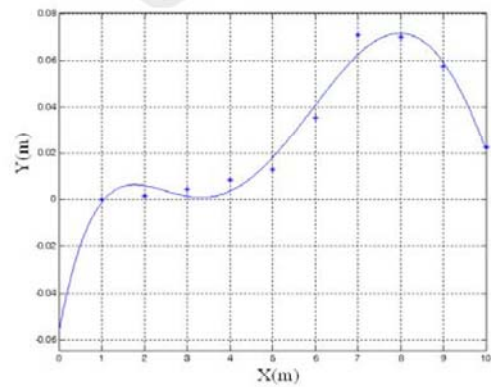
f) EI3 边坡底部深部测斜仪所测挠度



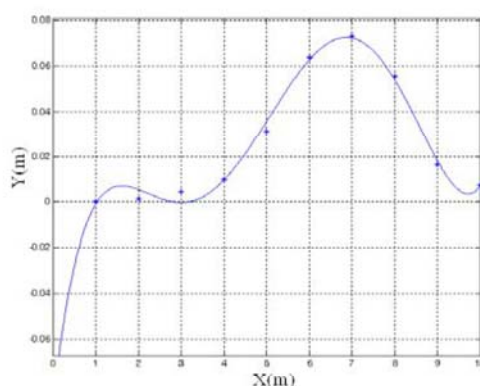
g) EI41 边坡顶部深部测斜仪所测挠度



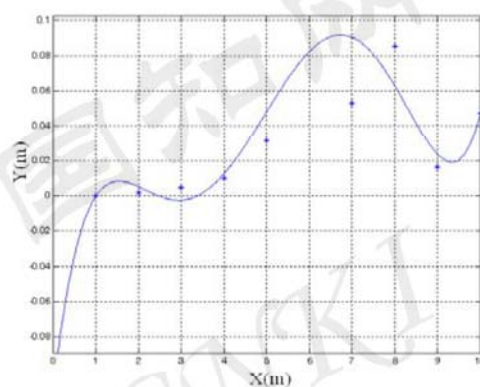
h) EI41 边坡中部深部测斜仪所测挠度



i) EI41 边坡底部深部测斜仪所测挠度



j) EI42 边坡中部深部测斜仪所测挠度



k) EI42 边坡底部深部测斜仪所测挠度

图 3-10 各深部测斜仪所测挠度

Figure3-10 Monitoring deflection of inclinometers in slopes

3.4 最优化模型的建立及求解

3.4.1 最优化模型的建立

建立如图 3-11 所示直角坐标系, 分别对所检测的三个有三根深部测斜仪的边坡(包括 EI2、EI3、EI41 边坡), 以最下部的深部测斜仪底端作为坐标系原点, 根据各个深部测斜仪的相对位置, 以及在边坡上的布置方式, 将三根深部测斜仪映射坐标系内, 根据边坡滑裂面呈圆弧状的理论, 用一条圆弧贯穿三天深部测斜仪的位置, 以深部测斜仪的分布位置, 以及圆弧形滑裂面的