

摘 要

本文以低频绝对振动测量为背景,研究DP型地震式传感器的进一步发展及工程中应用中的有关问题。

本文在已在许多领域有成功应用的DP型地震传感器的基础上,在DP型传感器在桥梁测试中存在的低频特性和机械稳定性的矛盾,提出了用并联电容和串联校正的方法相结合的方法,解决了这一矛盾,研制出同时具有良好低频特性和较高机械稳定性的特殊低频传感器,进一步发展了DP型地震式低频传感器。作为DP型传感器的一个应用,本文采用DP型传感器与涡流传感器实现了用于旋转轴绝对振动测量的复合传感器。这种方案在有效地消除相位引起的复合误差的同时,并不引入不希望的相移,实现了旋转轴绝对振动的不接触测量。

本文讨论了用DP型传感器测试大型结构的动态特性的有关问题。针对大型结构固有频率低、阻尼比小和模态密集的特点,本文讨论了功率谱估计中对时窗的长度要求和计算中的有关问题。针对半功率带宽法估计阻尼比的缺点,本文提出了频域中阻尼比估计的拟合方法,降低了对窗长的要求,有效地提高了阻尼比估计的精度。

本文讨论了用DP型传感器测试铁路桥梁动挠度的有关问题。铁路桥梁动挠度是有限时长暂态信号,用惯性方法进行测量必然引起畸变,必须用信号恢复技术才能得到真实信号。而动挠度信号恢复主要困难在于问题的严重病态。本文从信号恢复的时域反卷积方法和频域中的DFT方法的关系入手,发现了两种方法的统一性,并深入研究了病态问题的机理,指出病态问题的根本原因在于信息不足。本文充分发掘铁路桥梁动挠度信号的有关先验信息,并导出了Hilbert空间中信号恢复技术,充分利用了这些信息,解决了信号恢复的病态问题,成功地反演出桥梁的动挠度信号,为铁路桥梁的动挠度信号的测试提供了惯性的测试方法。

关键词:地震式低频振动传感器、结构动态特性测试、功率谱估计、铁路桥梁动挠度测试、信号恢复

Abstract

The further improvement of DP seismic transducer and its use in engineering on the background of low frequency vibration measurement are discussed in this thesis.

DP transducer has been successfully used in many engineering fields, but there exists the conflict between low frequency characteristics and mechanical stability in the measurement of the vibration of railway bridge. In this thesis, through the combination of parallel capacitor and the compensation circuit used in DP transducer, a seismic very low frequency transducer with high mechanical stability is obtained. DP transducer is adopted in combination with eddy-current transducer to realize a dual probe used in the measurement of absolute vibration of rotating shaft. This strategy eliminates the phase error while not introducing unwanted phase shift.

In this thesis, methods for the measurement of dynamic characteristics of large scale structures with DP transducer are given. The natural frequency of large scale structure is low, the damping ratio is small, and the vibration modes may be clustered in a narrow frequency band. Time window length required in power spectrum estimation is determined in this thesis. A new method for the estimation of damping ratio is given which has apparent superiority than the traditional half power bandwidth method. Experiment on Nanpanjiang railway bridge is given.

Problems relative to the measurement of dynamic deflection of railway bridge using DP transducer is discussed in this thesis. The dynamic deflection of railway bridge is a time-limited transient signal, and distortion will arise in the output signal of inertial transducer. The main difficulty of the problem is the ill-conditioned character of signal recovery process. This thesis starts from the relationship between the direct deconvolution method in time domain and the DFT method in frequency domain, and find the identity of the two methods. Through deliberate investigation, this thesis discovers that ill-conditioned problem are caused by the deficiency of information. The prior knowledge about the dynamic deflection of railway bridge is used thoroughly in this thesis. The signal recovery algorithm based on the optimum approach theory in Hilbert space makes full use of the prior information and the ill-conditioned character is overcome. The dynamic deflection signal is deduced from the output signal of DP transducer successfully. The work in this paper provides the inertial method for the measurement of dynamic deflection of railway bridge.

Keywords: Seismic low frequency transducer, Measurement of dynamic characteristics of large scale structure, Power spectrum estimation, Measurement of dynamic deflection of railway bridge, Signal recovery.

符 号 表

x_e	:	绝对振动位移
x_r	:	传感器活动部件与壳体间的相对运动位移
ξ_0	:	磁电检波器的阻尼比
ω_0	:	磁电检波器的固有圆频率
ξ_1	:	DP型传感器的阻尼比
ω_1	:	DP型传感器的固有圆频率
U	:	传感器的输出电压
α	:	灵敏度
f_0	:	固有频率
$f_{0,i}$:	第 <i>i</i> 阶固有频率
λ	:	弹簧静伸长
t	:	时间变量
$h(t)$:	冲击响应
$H(s), G(s)$:	系统的传递函数
$C(s)$:	补偿网络的传递函数
f	:	1. 频率 2. 力
i	:	电流
k	:	弹簧刚度
m	:	振子质量
μ	:	阻尼系数
M	:	当量质量
μ_1	:	当量阻尼系数
γ	:	量程放大函数
η	:	频率比
x_0	:	机壳绝对振动位移
x_{10}	:	旋转轴相对机壳的相对运动位移
y_0	:	机壳绝对振动位移对应的传感器的输出
y_{10}	:	旋转轴相对机壳的相对运动位移对应的传感器的输出
Δy	:	复合误差
δ	:	复合相对误差
φ	:	相位
j	:	虚数符号
$x_a(t), y_a(t)$:	模拟信号
R_{xx}^a	:	模拟信号的自相关函数
R_{xy}^a	:	模拟信号的互相关函数

S_{xy}^a	:	模拟信号的互功率密度谱
S_{xx}^a	:	模拟信号的自功率密度谱
$x(n), y(n)$:	离散信号
R_{xx}	:	数字信号的自相关函数
R_{xy}	:	数字信号的互相关函数
S_{xy}	:	数字信号互功率密度谱
S_{xx}	:	数字信号自功率密度谱
γ_{xy}	:	相干函数
T_s	:	采样时间间隔
f_s	:	采样频率
π	:	3.1415...
N	:	点数
T	:	时窗长度
$\text{var}[]$:	方差
DFT	:	离散傅立叶变换
FFT	:	快速傅立叶变换
$*$:	线卷积符号
\otimes	:	圆卷积符号
$E[\cdot]$:	期望
X, Y	:	集合或空间
C^N	:	N维酉空间
T	:	用作上标表示转置
x, y	:	集合中的元素
T	:	映射, 算子, 矩阵
T_*	:	线卷积算子
T_\otimes	:	圆卷积算子
$\text{cond}(\cdot)$:	广义条件数
$\sup(\cdot)$:	取上确界
$\inf(\cdot)$:	取下确界
$\dim(\cdot)$:	取维数
N_x	:	输入信号的长度
N_h	:	传感器的冲击响应长度
N_y	:	传感器输出信号长度
N_c	:	约束子空间的维数
$\ \cdot\ $:	取范数
$d(\cdot)$:	取度量
$\langle \cdot, \cdot \rangle$:	内积
\perp	:	正交

第1章 绪 论

振动是工程中常见的现象。工程中的多数结构都承受随时间变化的动载荷，我们称之为动力结构。譬如桥梁结构、海洋工程结构、旋转机械、车辆结构及航空航天器等，都是承受各种动载荷的动力结构。动力结构不可避免地要出现振动；剧烈的振动将导致构件裂纹的萌生与扩展，最后使构件疲劳损坏；振动导致轴承摩擦副的磨损；振动还将消耗能量、降低效率；振动及其伴随噪声将恶化环境。总之，振动的危害是多方面的。

振动测试是研究工程振动问题的有效手段。振动测试的任务就是要在动力结构的设计、运行的各个阶段，为消减和隔离振动及其带来的危害提供可靠的数据；振动测试的另一重要应用是在故障诊断方面。现代机器设备要求高可靠性与高效益。为此，一种以状态监测为基础的故障诊断和预测技术得到了推广和应用，大大增加了机器运转的可靠性，提高了设备的利用率，减少停机时间和降低维修费用。

测试技术随着现代科学技术的发展而迅猛发展。测试技术离不开现代科学技术的发展，现代科学技术不断地提出新的要求，刺激测试技术向前发展；另一方面，各种学科领域的新成就（新的物理和化学原理、新材料、微电子学和计算机技术、制造工艺技术等）也常常首先反映在测试方法和仪器上。测试技术总是从其他关联的学科中吸取营养而得以发展。近三十年来，新的材料，特别是新型半导体材料方面的成就，已经导致了許多新型传感器的出现；计算机技术的发展以及数字信号分析的方法和理论的完善，也使测试技术科学产生了革命性的变化。

振动测试从不同的角度可以有許多分类方法。按照参照系选取的不同，可以分为相对测量方法和惯性测量方法。

所谓相对振动测量方法，是指选取事实存在的某一点（一般为测试仪器的安装点）作为参考点，相对测量的结果反映被测物体相对此参考点的运动。相对测量方法一般包括以下三类：

1. 机械方法：机械方法中比较有代表性的有游标卡尺、螺旋测微仪、千分表等。机械方法的精度不高，动态响应特性差，一般只用于静态尺寸的测量。

2. 电测法：这一类的传感器品种很多，许多电参数的变化都可于位移测量，如利用电阻变化的应变片，利用电感变化的有差动变压器、涡流传

传感器等，利用电容变化的差动电容传感器等^[1]。

3. 光学方法：在光学方法中，激光测量是具有代表性的测量方法。激光测量在小尺寸和大尺寸测量中都有广泛的应用，由于激光测量应用的是自然基准，因而具有较高的测量精度。CCD和光栅器件也是常用的光学测量手段。

此外，技术的发展使新的物理效应不断被发现，从而出现许多新的测量手段，例如霍尔效应、光导纤维、声表面波、隧道效应等，都可以用于位移的测量^[2-6]。

惯性测量方法以惯性空间作为其参照系。惯性空间是一个抽象的空间，它的定义由牛顿第一定律给出：惯性空间中的物体在不受力的情况下保持静止或匀速直线运动状态。

惯性传感器由拾振系统和敏感元件两部分组成。拾振系统将物体的在惯性空间中的运动转化为传感器的固定部件和活动部件之间的相对运动，典型的拾振系统为质量—弹簧—阻尼系统。敏感元件将此相对运动检测出来，便得到了物体在惯性空间中的运动状态。

惯性测量方法不需要参考点，安装、调试方便，这就使惯性测量方法在某些场合显示出其极大的优势。然而，惯性测试方法在低频振动测试方面存在着困难：所有的惯性测量方法都不可能对位移和速度输入表现为低通特性。因为根据牛顿第一定律，相对于一个惯性系静止或匀速直线运动的坐标系仍然为惯性系，牛顿第二定律对所有的惯性系都成立。也就是说，惯性测量方法对直流位移和直流速度的响应必然为零。

惯性导航中利用加速度计测量运动物体的加速度，通过两次积分得到物体的运动位移，但在惯性制导之前，必须先进行惯性平台的对准来提供初始条件，而且惯性制导的误差是随时间积累的^[7-8]。因此虽然惯性导航具有不依赖外界信息，不受气候和电子干扰影响的优点，但只依赖它难以达到较高的导航精度，必须和其他的导航手段相结合。惯性传感器在大尺寸(公里级)测量和高频(1Hz以上)振动测试方面已经得到广泛的应用，但是低频(直流~1Hz)小尺寸(毫米级到微米级)的惯性测量仍然是工程中的难点。

1.1 低频绝对振动测试的工程意义

现代工业的发展对低频振动测试提出了越来越高的要求，低频绝对振动测试主要应用于以下几个方面：

1. 结构检定

结构是人类生活中最常见的事物,科学技术的进步和人类的想象力使人们建造了许多雄伟的建筑。例如在桥梁设计中,为了经济上的原因,工程师总是尽可能地追求大的跨度,于是出现许多大跨度的桥梁,而且随着桥梁设计理论的发展,桥梁的跨度会越来越大。今天我国已将斜拉桥的跨度推进至602m,不久法国的Nomandi桥将推进至865m,日本的Tatara桥将推进到890m。近年来,我国大跨度桥梁的建设数量已远远超过过去几十年的总和,这些桥梁以对风很敏感的桥型—斜拉桥、悬索桥占绝大多数。对这些桥梁而言,风的作用引起的桥梁结构的振动已成为设计中的主要控制因素。这些每座以数亿元、甚至数十亿元建造的特大型结构,如果出现如旧Tacoma峡谷大桥那样的风毁事故^[9],给国家带来的损失将是巨大的。结构在建成交付使用之前,都要进行结构实验,以确定结构设计的合理性,并为以后的设计提供经验。大跨度的桥梁的振动都表现为低频振动。例如我国上海南浦大桥的竖向和横向一阶固有频率分别为0.36Hz和0.37Hz^[10]。

桥梁结构在经过长时间的运营之后,在车辆、风、湿、地震作用下,材料会发生疲劳破坏,影响行车安全。我国的许多桥梁经历了几十年的运行,需要对它们的运行状态作出评价,及时发现结构中存在的病害并进行修理和加固,保证结构的运营安全。

速度一直是交通运输追求的目标。1964年日本建成第一条高速铁路后的30多年来,法国、德国、意大利、西班牙等欧洲国家先后修建了高速铁路,亚洲的韩国也在修建中,至1994年已有25个国家的既有干线旅客列车的最高速度达到或超过140km/h。几十年来,我国铁路列车重量和行车密度有较大提高,但列车速度偏低,而且增长缓慢。1994年,我国的旅客列车和货物列车的平均旅行速度分别为48.3km/h和29.9km/h,35年来,我国旅客列车和货物列车的平均速度仅提高了4.9km/h和1.2km/h。铁道部在1995年6月作出了在繁忙干线上提高旅客列车运营速度的决定,这一决策无疑具有重要的战略意义和现实意义^[11]。影响列车车速提高的因素是多方面的,其中桥梁是铁路中比较薄弱的环节,列车高速通过桥梁时具有较大的冲击,引起桥梁的振动,当列车的激励频率与桥梁的固有频率重合时还会发生共振。例如铁路上普遍采用的32m钢板梁,当客车速度提高到160km/h时就会发生共振^[12]。振动测试能够给列车的提速提供指导意见。

我国自70年代开始高层建筑有了较快的发展。单就上海而言,截至1995

年底，高层建筑已达1523幢，其中1995年就达219幢。国内50层以上，高度160m以上的也为数不少，如53层160m的深圳国际贸易大厦，高165m的上海商城，正在建造的96层高460m的国际环球金融中心等。高层建筑对结构的侧向位移有严格的要求，侧向位移过大，将引起结构开裂、倾斜、损坏，在一定的频率范围内还可以引起居住者的不舒服^[13]。

塔桅结构^[14]的应用非常广泛，它包括无线电桅杆、电视发射塔、火箭发射塔、烟囱等，此外还有塔式起重机、石油钻井架、井式升降机等。塔桅结构属于高柔结构，对风振和地震作用比较敏感。在塔桅结构的设计中，抗风设计占有很重要的地位。为了减轻结构的振动，许多塔桅结构采用了振动控制的方法，包括被动控制、主动控制以及介于两者之间的半主动控制。对结构进行控制之前，首先需要知道结构的振动特性，而且在主动控制中，还需要传感器提供反馈信号。对这些结构的测试都属于低频测试的范围。

船只、钻井平台受到波浪的作用而产生振动。海上钻井作业要求钻井平台保持平稳。特别是半潜式钻井平台或钻井船、钻井驳等是在漂浮状态下作业的，其在波浪作用下的运动更成为必需研究的问题。我国沿海的波浪平均周期一般在5~15秒之间，一般船舶的横摇固有周期也在这个范围内。船舶和石油钻井平台在海浪作用下的颠簸和振动都属于低频振动^[15-17]。

2. 低速回转机械监测

我国是水利资源蕴藏最丰富的国家。水电是一种可再生能源，对环境没有污染，充分开发我国的水利资源对我国的可持续发展战略有十分重要的意义。发电机组的振动监测是发电机组安全运行的保证。低水头的水力发电机组是一种低速回转机械，如葛洲坝水电站，水轮机的转速为62.5或54.5转/秒，相当于1Hz左右。机械工业中精密机床的周期性运行误差，也表现为低频振动。

3. 地震监测

地震是一种自然灾害，其实这只是指的强烈地震，大多数的地震并没有什么害处，而从地震震源传播出来的地震波却给我们带来许多宝贵的信息。地震波有很宽的频率范围。广义地说，地震波的频率范围可以跨十个数量级，从岩石的微破裂到地球的自由振动，频率可以从 10^6 Hz到 10^{-4} Hz。狭义的地震波所指的频段是 10^{-2} 到数十赫兹。地震波从震源产生，经过地球内部

介质传播到各个观测台站，观测台站的监测仪器记录下来，利用这些记录资料来研究地震是一个重要途径。频率较高的地震波随其传播距离而迅速衰减，所以实际检测到的地震波主要是低频波。地震波的周期是与地震的大小和远近密切相关的。定性地讲，地震越小越近，频率越高；地震越大越远，频率越低。例如对于3~5级地震的体波，在震中距小于100公里时，波的频率约为3~5Hz；震中距为100~1000公里时，波的周期约为1~3秒；震中距为1000~5000公里时，波的周期为5~7秒^[18]。所以，在地震监测中需要具有良好低频响应的监测仪器，才能监测到较远地区发生的地震。

4. 地震勘探

地震勘探是矿产业中重要的勘探方法。地震勘探中，炸药爆破产生地震波在地层中传播的过程中，遇到矿层将产生回波，利用地震检波器检测到此回波，可以得到矿层的信息。对地震波在传播过程中存在两种效应，一是球面效应，即波的强度随球面的扩展而衰减；二是传播介质对波的频率选择性吸收。传播介质对高频成分的吸收作用非常强烈，因此地震波中的高频成分在很短的距离中就被衰减掉了，而低频成分却可以传播很远的距离^[19]。采用具有良好低频特性的地震检波器，可以探测到埋藏较深的矿藏。

1.2 惯性传感器的基本原理

一般地，惯性传感器的力学结构可以简化为一个二阶的质量弹簧阻尼系统，如图1-1所示：

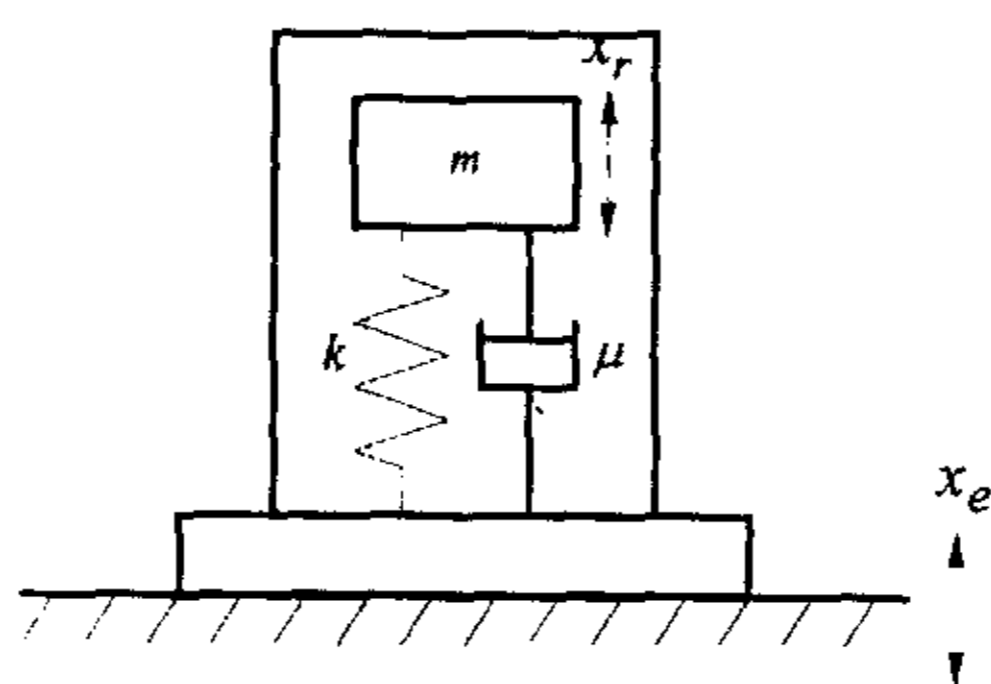


图 1-1 惯性传感器力学模型

相对振动 x_r 与被测振动 x_e 之间满足微分方程：

$$\ddot{x}_r + 2\xi_0\omega_0\dot{x}_r + \omega_0^2x_r = -\ddot{x}_e \quad (1-1)$$

式中, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 为传感器的固有角频率, $\xi_0 = \frac{\mu}{2\sqrt{mk}}$ 为传感器的阻尼比。

利用不同的物理效应,可以有很多种方式来测量壳体与活动质量之间的相对运动。工程中比较常用的有速度传感器和加速度传感器^{[1][20]}。

1. 速度传感器:

磁电式速度传感器利用线圈在磁场中切割磁力线,将质量与壳体之间的相对运动转换成电信号。其输出电压正比于相对运动速度,即:

$$U = \alpha \dot{x}_r \quad (1-2)$$

其输出电压对地面振动速度的传递函数为:

$$H(s) = \frac{U(s)}{sX_e(s)} = \frac{-\alpha s^2}{s^2 + 2\xi_0\omega_0 s + \omega_0^2} \quad (1-3)$$

可见其输出对较入速度而讲是一个二阶高通环节。其可测频段一般高于固有频率。

2. 加速度传感器

加速度传感器中的敏感元件是一个位移传感器,它敏感运动质量与壳体之间的相对位移,即:

$$U = \alpha x_r \quad (1-4)$$

其输出电压对壳体振动加速度的传递函数为:

$$H(s) = \frac{U(s)}{s^2 X_e(s)} = \frac{-\alpha}{s^2 + 2\xi_0\omega_0 s + \omega_0^2} \quad (1-5)$$

所以加速度传感器是一个低通类型的传感器。

• 压电加速度计:

压电加速度计是利用某些物质的压电效应进行工作的。某些物质,如石英、钛酸钡等,当受到外力作用时,不仅几何尺寸发生变化,而且内部极化,表面产生电荷,这种现象称为压电效应。压电晶体配接电荷放大器后,

其输出电压与压电物质的变形成正比，成为一个位移传感器。

压电晶体的固有频率一般很高，因此压电加速度计的测量频率范围宽广，理论上可以测从直流到20kHz左右的振动。但受到后续电荷放大器电荷泄漏的影响，实际上压电式加速度计不具有零频率响应，也具有一个低端“截止频率”，一般不低于0.1Hz；

• 伺服式加速度传感器：

伺服式加速度传感器又叫力平衡式传感器，是一种较新型的具有零频率响应的高精度传感器。伺服式加速度传感器比较多地采用差动电容作为位移敏感元件。差动电容精度比较高，可以测量 $0.01\mu\text{m}$ 的微小位移。伺服式加速度传感器的内部有力发生机构，当运动质量与壳体间产生位移时，力发生机构在活动部件上施加一个力使活动部件跟随壳体的运动，所以运动质量只在平衡位置附近的微小范围内运动。

伺服加速度传感器的特点在于：

1. 具有零频率加速度响应；

2. 具有极佳的线性度，这是由于传感器内部的运动部件被控制在平衡位置附近的极小范围内运动，因此，弹簧非线性、横向效应及机电转换部分的非线性等的影响被降低到极小程度，因而提高了测量精度。

• 微硅加速度计：

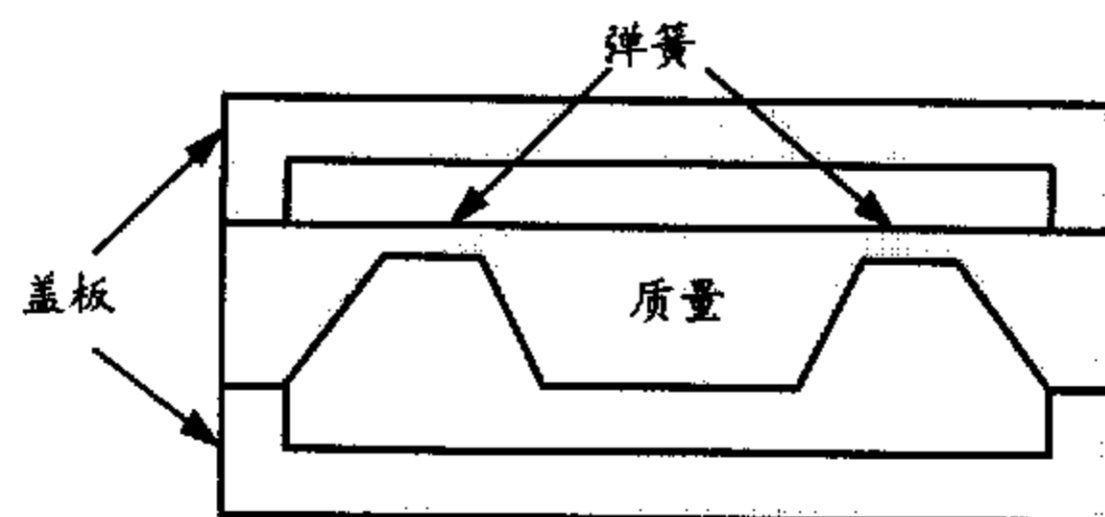


图1-2 微硅加速度计结构

近年来，MEMS成为国内外技术发展的一个热点。MEMS的基础是在硅片上用IC工艺制造出各种机械结构。由于利用IC工艺可以进行大批量生产，因此造价非常低。MEMS的一个典型的应用就是微硅加速度计^[21-25]。一种称为bulk-micromachined accelerometer的结构如图1-2所示。在硅片上用蚀刻技术制造出质量块和弹簧，形成加速度计的悬挂系统。悬挂系统的上

下各有一块盖板，在盖板上制造出电极，形成电容传感器，并且利用静电力实现力平衡。盖板还起到形成所谓的squeeze-film阻尼和过载保护的作用。在硅片上还可以集成微处理器、自我诊断、非线性补偿、温度补偿、信号处理和通信电路，形成所谓的灵巧传感器。微加速度计体积小，造价低，但目前的精度不是很高，一般用在测量加速度比较大的场合，例如汽车的安全气囊的控制。

Stanford大学T.W.Kenny教授领导的实验室以及其他的学者正在研究将隧道效应(Tunneling effect)用于加速度计^[26-28]。隧道效应最早用于扫描隧道显微镜(STM)，它可以测量原子级的尺寸，因此利用隧道效应的加速度计可望得到更好的分辨力。但隧道效应的测量范围也是非常小，要适应工程中强烈振动测试的要求，必然给结构的设计，材料的性能和控制系统带来很高的要求。

1.3 低频绝对振动传感器的发展现状

实现低频惯性位移传感器的一个最简单的方案是通过加速度传感器配接积分器得到。由于加速度传感器在表现为低通特性，配接积分器得到的速度传感器或位移传感器在理论上也应该是低通特性的。但此方案的困难在于：

理想积分器是临界稳定环节，实际上是无法实现的。实际应用的积分器一般用一阶惯性环节代替，转折频率以后为积分频段，以前为放大频段。虽然可以选择较大的积分时间常数来逼近理想积分器，但这样做的结果是带来严重的低频漂移。加速度计为了追求比较宽频响范围往往采用比较刚性的悬挂系统，因此加速度传感器在低频振动测试方面的灵敏度的仍然显得不够。

地震速度检波器在低频振动测试方面的限制主要在于悬挂系统的固有频率。针对地震式速度检波器，有三类方法可以实现低频频响范围的扩展，即：1.改进悬挂系统；2.电路补偿技术；3.数字校正技术。

1.改进悬挂系统

为适应低频振动的测量，需要降低检波器的固有频率。然而，要想降低固有频非常困难。在重力场中垂直使用的检波器，固有频率 $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ ，

弹簧受重力作用的伸长 $\lambda = \frac{mg}{k}$ ，若 $f_0 = 1\text{Hz}$ ，则 $\lambda = 25\text{cm}$ ，这在机械结构上存在很大困难。为此，人们设计了一些特殊的悬挂系统，如垂直复摆悬挂结构、Lacoste 零长弹簧悬挂系统、双锤回转摆等来克服弹簧静伸长问题。这些结构的固有周期都很长，但为此带来了许多问题：系统结构稳定性差，其固有频率和原始状态易受环境变化的影响；易受横向振动影响，抗交叉干扰的能力很差；有多个谐振频率，频率特性不好；抗震性差，易于损坏；使用前需要调整零位；结构的体积、重量大^[29-31]。因此，这些结构一般用在地震观测中。在一般的工业场合，要求传感器轻便、可靠、维护方便，因此工程中常用的磁电式传感器的固有频率一般为 $8 \sim 15\text{Hz}$ ，少数定向使用的低到 3Hz 左右。

2. 电路补偿技术

随着电子技术的发展，通过电路补偿来展宽传感器频响范围得到了应用。电路补偿方法可以降低对传感器力学结构的要求，并能使传感器获得良好的输出特性。

补摆滤波技术^[32]是扩展地震仪低频测量范围的一种方法。设计电子补摆滤波器的幅频特性上升段恰为地震仪幅频特性的下降段，当上升与下降速率相同时，总的幅频特性将出现一个较为平坦的频段，从而展宽低频可测频率范围。通过补摆滤波器展宽拾震器的低频测量范围，系统特性呈带通，不再具有高通特性，测量上限频率下降，且通带的频响特性不理想。

文献[33]用伺服原理扩展磁电式地震检波器的低频测量范围。通过电流反馈来调整惯性系统的振动，改善传感器特性。伺服原理的磁电式地震检波器，测量频率下限可以做得很低，文献[33]获得了固有频率低至 0.7Hz 的频率特性。伺服式传感器存在的主要问题是结构复杂，成本高，且抗干扰和冲击能力较差，机械零位的长期稳定性也不好。

哈尔滨工程力学研究所通过并联无源补偿网络来降低磁电式地震检波器的固有频率^[34]。在磁电检波器的输出端并联适当的电容电阻，此时，线圈中产生电流在磁场中受力，从而改变了机械系统的振动特性。并联电容电阻的效果相当于系统的当量质量和当量阻尼系数增加，从而加长固有振动周期。目前将固有频率 5Hz 的地震检波器经校正后得到输出特性固有频率低至 0.5Hz 。这种无源校正方法引入耗能元件，频率范围的扩展是以牺牲灵敏度为代价的，后续电路要作高倍放大。这种做法实际上是对信号先衰

减后放大，对信号的信噪比带来不良影响。而且，当原系统的质量比较大时，这种方法就起不到效果。

用电路补偿方法来展宽传感器的低频测量范围在国外也有产品。例如德国SCHENCK公司的VS-169型振动速度传感器就是用磁电式加“线性化”电路实现的^[35]。

文献[36]探讨了采用有源补偿电路校正速度传感器频率特性的反馈校正技术与串联校正技术。经电路校正后，系统输出仍具有二阶高通特性，且固有频率得到降低。

(1) 反馈式频率特性校正方法

反馈式频率特性补偿原理如图1-3所示：

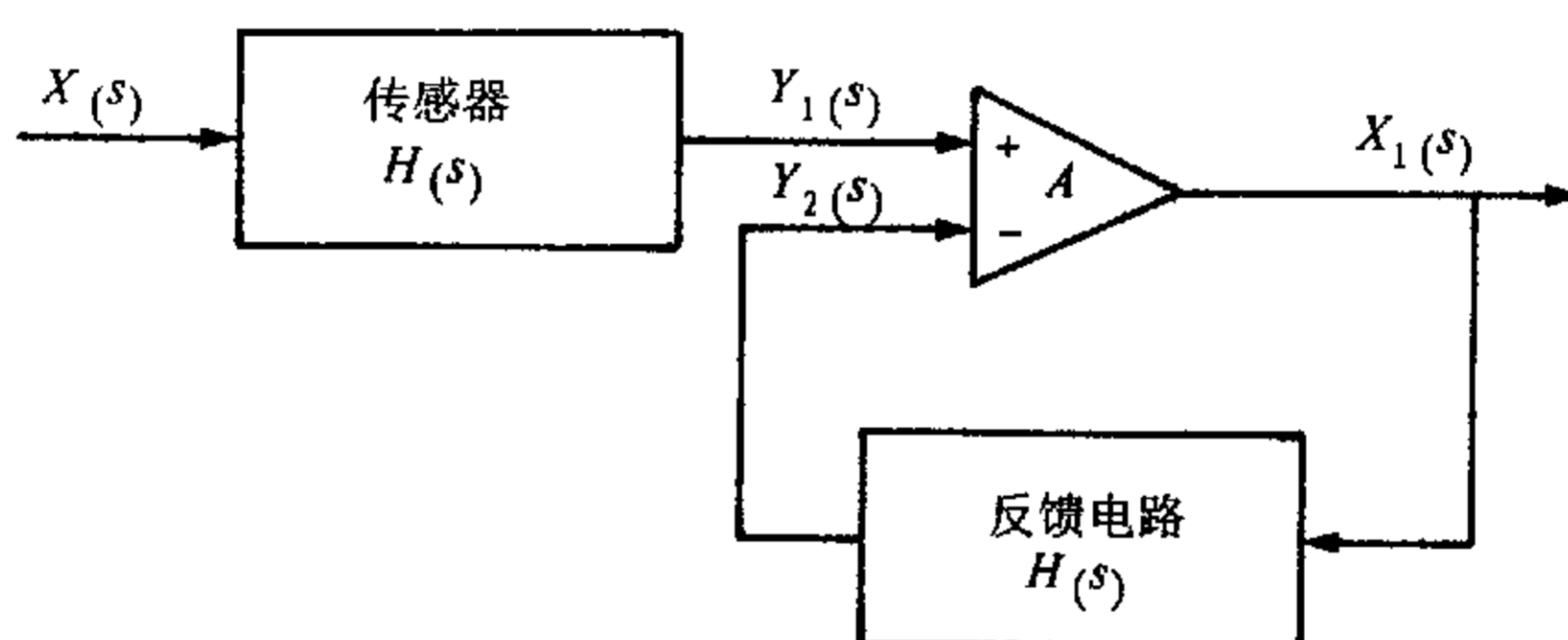


图 1-3 反馈式频率特性补偿原理图

整个网络的传递函数为：

$$G(s) = H(s) \cdot \frac{A}{1 + A \cdot H(s)} = \frac{A}{1 + A} \cdot \frac{s^2}{s^2 + 2 \frac{\xi_0 \omega_0}{1 + A} s + \frac{\omega_0^2}{1 + A}} \quad (1-6)$$

经过补偿后的传递函数 $G(s)$ 与原来的传递函数 $H(s)$ 是同型的。系统的固有角频率变为 $\omega_0 / \sqrt{1 + A}$ ，阻尼变为 $\xi_0 / \sqrt{1 + A}$ 。

我们看到，系统输出特性的固有角频率得到降低，但系统阻尼也减小了。为保持合适的阻尼，往往需要预先增加传感器的阻尼比。例如，对磁电式传感器并联电阻，就相当于加了电阻阻尼环节。文献[36]在固有频率3.7Hz的地震式速度传感器的基础上，通过反馈校正，使系统输出特性固有频率降低为0.7Hz。

反馈式频率特性补偿方法有一定的局限性。如果传感器的阻尼比无法增

大,这种方法便不能用了,这时需要改变反馈回路传递函数的结构以获得所要求的阻尼。另外,从误差分析的角度来看,由于这种方法对低频信号是先衰减(增大传感器阻尼),后放大,必然带来噪声和失真,影响测量精度。对于二阶高通环节来说,低频段相位相对于通带几乎差 180° ,此时,负反馈变为正反馈,容易引起振荡,这是高阶环节反馈校正普遍存在的问题^[39]。

(2) 串联式频率特性校正方法

将传感器 $H(s)$ 的输出经一个串联补偿网络,使系统输出特性固有频率得到降低。理想情况是取校正环节 $C(s)$ 为 $1/H(s)$ 。但速度传感器的零点在坐标原点,因而,校正环节 $C(s)$ 的极点位于坐标原点,这是不稳定环节,物理上无法实现。

文献[36]设计校正环节为:

$$C(s) = \frac{s^2 + 2\xi_0\omega_0s + \omega_0^2}{s^2 + 2\xi_1\omega_1s + \omega_1^2} \quad (1-7)$$

这是物理可实现的环节。经校正后,系统输出特性 $G(s)$ 为:

$$G(s) = H(s) \cdot C(s) = \frac{s^2}{s^2 + 2\xi_1\omega_1s + \omega_1^2} \quad (1-8)$$

可见校正后的系统特性仍为二阶高通,具有新的固有圆频率 ω_1 和阻尼比 ξ_1 。取 $\omega_1 < \omega_0$, ξ_1 为最佳阻尼比,从而使输出特性固有频率得到降低。

$C(s)$ 的设计可以由图1-4的原理加以实现

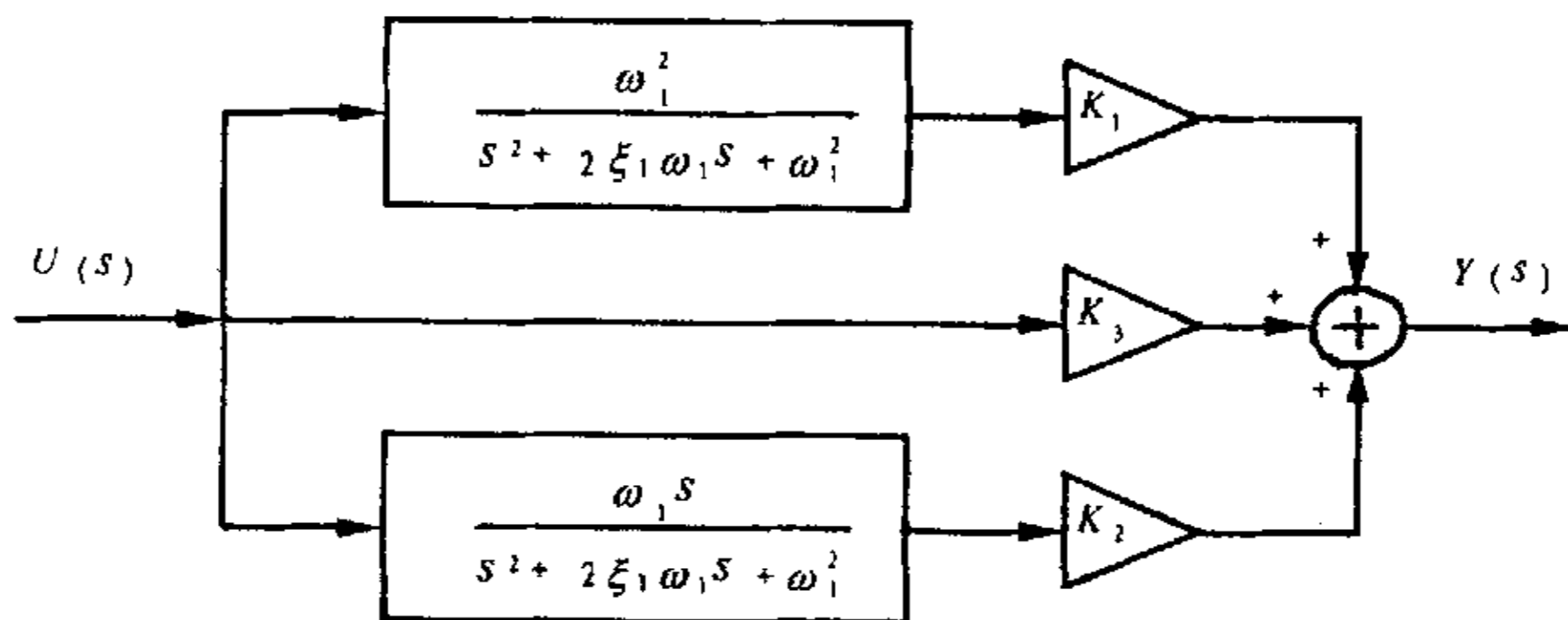


图 1-4 串联校正环节原理框图

适当地选取 K_1 、 K_2 、 K_3 ，使得 $C(s)$ 分子与原传感器的分母相消，得到了具有二阶高通特性的具有较低固有频率和最佳阻尼比的传感器。

在低频振动中，我们常对位移信号感兴趣，为此，将速度信号进行一次积分，得到位移信号。一个绝对振动低频位移传感器的原理框图如图1-5。

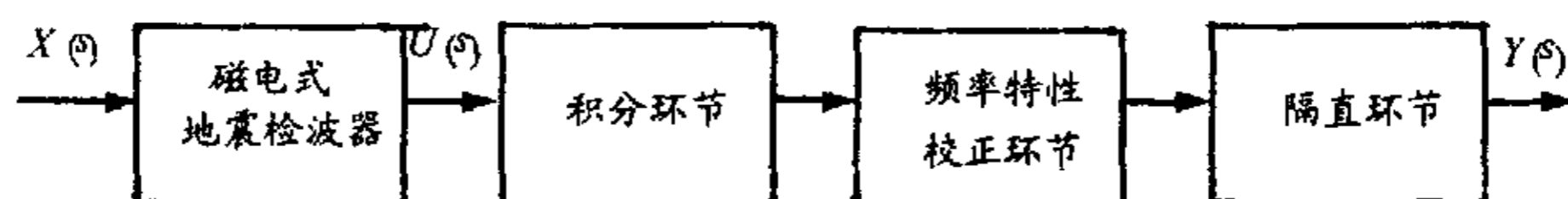


图 1-5 DP 型地震式低频振动位移传感器原理框图

DP型位移传感器的信号校正电路如图1-6所示。

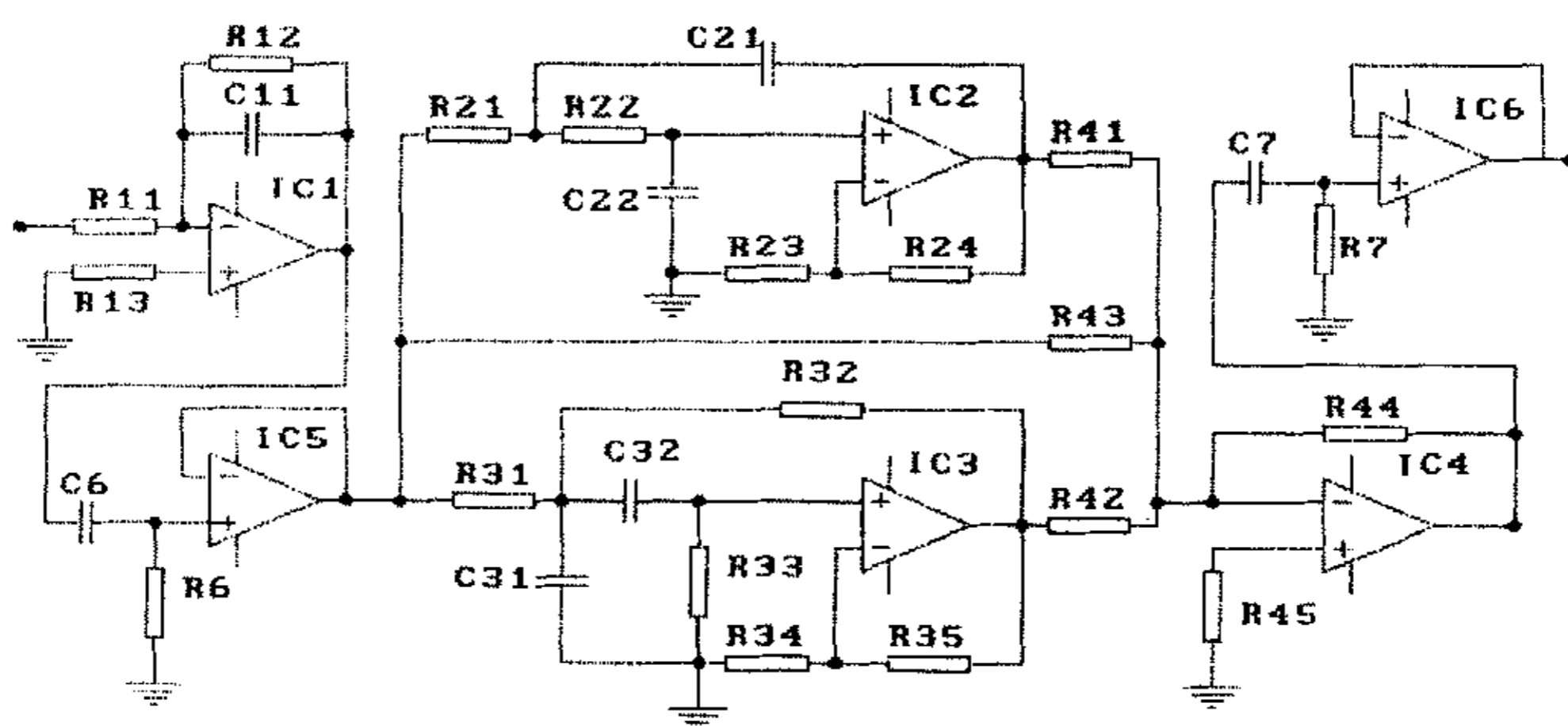


图 1-6 DP 型位移传感器的信号校正电路

图中， IC_1 为积分环节，其传递函数为

$$H_1(s) = -\frac{R_{12}}{R_{11}} \frac{1}{1 + R_{12}C_{11}s} \quad (1-9)$$

IC_2 等构成低通放大电路，具有传递函数：

$$H_2(s) = \frac{\frac{R_{23} + R_{24}}{R_{21}R_{22}R_{23}C_{21}C_{22}}}{s^2 + \left(\frac{1}{R_{21}C_{21}} + \frac{1}{R_{22}C_{21}} - \frac{R_{24}}{R_{22}R_{23}C_{22}}\right)s + \frac{1}{R_{21}R_{22}C_{21}C_{22}}} \quad (1-10)$$

IC_3 等构成带通放大器电路, 具有传递函数:

$$H_3(s) = \frac{\frac{R_{34} + R_{35}}{R_{31}R_{34}C_{31}}s}{s^2 + \left(\frac{1}{R_{31}C_{31}} + \frac{1}{R_{33}C_{31}} + \frac{1}{R_{33}C_{32}} - \frac{R_{35}}{R_{32}R_{34}C_{31}}\right)s + \frac{R_{31} + R_{32}}{R_{31}R_{32}R_{33}C_{31}C_{32}}} \quad (1-11)$$

IC_4 等构成加法放大器电路。调整电阻 R_{41} 、 R_{42} 和 R_{43} , 可以改变电路对低通、带通和全通三个环节输出信号的放大倍数, 从而实现补偿环节的零点与原传感器极点的对消。

电路中还用到 IC_5 和 IC_6 构成的两个隔直射随环节, 传递函数为:

$$H_5(s) = \frac{R_6C_6s}{1 + R_6C_6s} \quad (1-12)$$

$$H_6(s) = \frac{R_7C_7s}{1 + R_7C_7s} \quad (1-13)$$

隔直环节的引入是为了抑制过大的低频漂移。

文献[36]在固有频率10Hz的地震式速度传感器的基础上, 通过串联校正, 使系统输出特性固有频率降低为0.5Hz, 同时又保持了原传感器的机械性能稳定、抗冲击等优点, 是一种性能稳定的地震式低频传感器。图1-7给出一个实际的磁电检波器特性及补偿后频率特性比较。

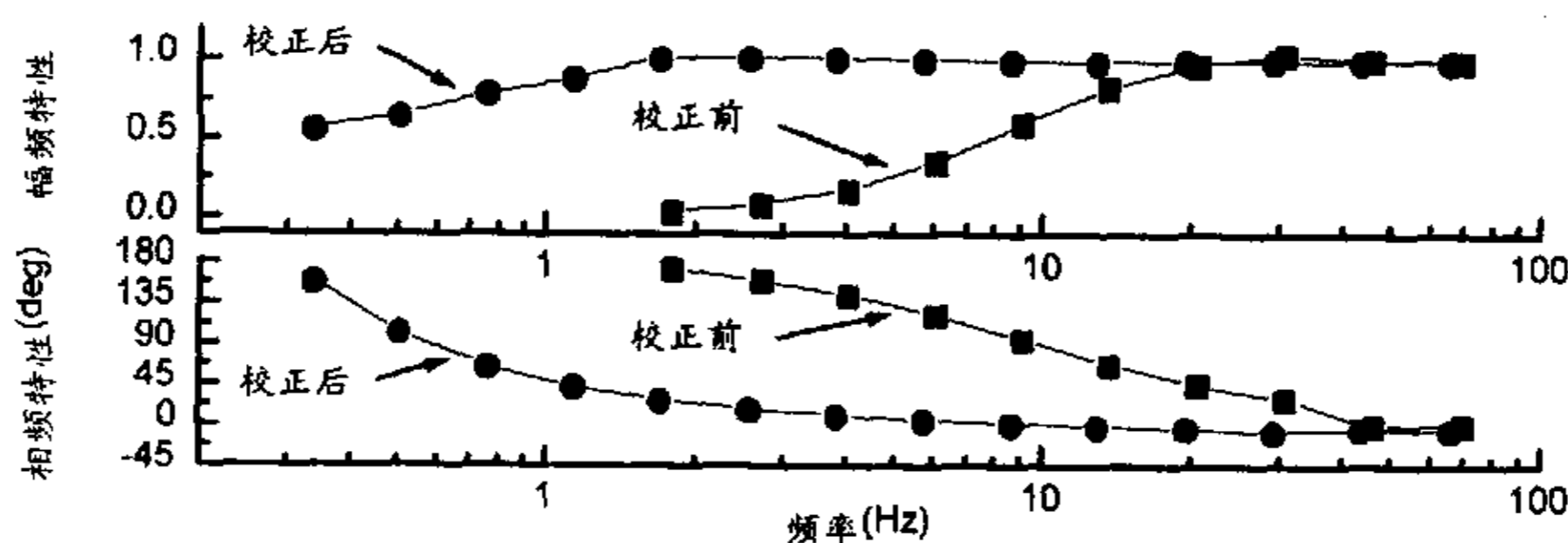


图 1-7 磁电检波器及补偿后频率特性比较(幅值经过归一化)

表1-1是有代表性的几种低频振动测量传感器的性能。

表 1-1 几种低频绝对振动测量传感器^[32-38]

型号	生产公司	类型	可测最低频率	工作原理
Vs-169	德Schenck	速度	1Hz	磁电式+线性化电路
560	美IDR	速度	1Hz(幅值±10%)	压电式+内含电路
CV210	瑞士VM	速度	1Hz	磁电式+IVC632电路
M86	美SD	速度	2.5Hz	压电式+积分器
26862	美Bently	速度	1.67Hz	磁电式+专用放大器
PR9628	荷Philips	速度	4Hz	磁电式
ASQ-BL	日Kyowa	速度	0.5Hz	伺服式+积分器
891	国家地震局	位移	0.5Hz	磁电式+无源反馈
DP	清华大学精仪系	位移	0.1~0.5Hz	磁电式+低频校正电路

3. 数字校正技术

微处理机技术及数字信号处理技术的发展使得在数字域进一步校正传感器低频特性成为可能。实践表明, 由于受到噪声的影响, 地震检波器的低频扩展范围有一定的限度, 在很多的场合仍然满足不了低频测试的要求。特别是对于具有无限宽广频谱的瞬态过程, 实际测量系统必然导致畸变的输出。在数字域, 如果能由测量系统畸变的输出, 通过信号恢复处理, 反演真实被测信号, 这就相当于扩展了低频频响范围。从而, 可以降低对测量系统特性的要求, 减轻传感器设计的压力。由系统的输出及系统特性反演系统的输入, 这就是信号恢复问题。

时域恢复涉及求解如下的卷积方程:

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (1-14)$$

其中, * 表示卷积运算。在离散域, 时域恢复将演化为线性方程组的求解, 研究表明, 时域恢复的主要问题是误差积累^[40]。

频域恢复实际上就是按下式反演输入:

$$X(j\omega) = Y(j\omega) / H(j\omega) \quad (1-15)$$

频域恢复的主要问题是: 当系统存在零点时, 在系统零点出现不适定现象; 在零点附近, 系统频响函数幅度很小, 信号严重衰减, 信噪比差, 导致解的病态。

针对地震式速度传感器，零点对应直流分量。此时恢复处理的关键问题是如何在低频段有效地抑制低频噪声的影响，反演低频信息。

文献[41]利用频域恢复技术，由地震检波器畸变的输出反演地面真实振动，从而相当于扩展检波器的低频频响范围。处理中，过低或过高频段信号，因信号弱，信噪比差，不得不予以舍弃。即便如此，通过恢复处理仍然获得了较原检波器可测频率范围更宽的频带的信息。在地震观测领域中，由地震检波器输出反演地面真实振动已成为地震科学的一个重要内容^[42]。

如前所述，信号恢复处理的主要困难是受噪声影响时表现出病态特性。因此，应用信号恢复技术展宽传感器频响范围的关键就是如何抑制噪声的影响。此时，信号恢复问题实际上常演化为求取某种意义下的最优估计。国内外学者针对信号恢复的不适定问题研究并发展了一些方法，如最小平方反卷积^[43-44]、 L_p 最小范数反演^[45-47]、及最大熵反演^[48-51]等。针对具体问题，往往能对信号部分特征有先验认识，为此，Schafer等人发展了一些引入先验信息作为约束条件的信号恢复技术^[52-60]。

1.5 本文的研究内容

低频绝对振动测量技术一直是工程测量的难题。我们教研组自“七·五”、“八·五”以来针对低频绝对振动测量开展了深入的研究，研制成功输出特性固有频率低至0.1~0.5Hz的DP型地震式低频振动传感器。我教研组与铁道科学院进行合作，将DP传感器应用于铁路桥梁的测试。在合作过程中，发现DP型传感器在有些场合仍然满足不了测试要求。一般说来，铁路桥梁的测试都要求传感器具有良好的低频特性，但不同的实验任务对传感器的要求有不同的侧重，比如在脉动实验中，要求传感器具有高灵敏度，以适应微弱振动的测试；而在强振测试中更强调传感器的可靠性；在动挠度测试中，则要求传感器同时具有良好的低频特性和机械稳定性。因此本文将主要结合这一工程背景，研究进一步提高DP型传感器性能的方法，并结合DP型传感器实际应用中的具体问题展开讨论。

本文的难点和主要研究内容有：

尽管无法得到的具有零频响应的惯性速度或位移传感器，然而，我们却希望在保证传感器的稳定性的情况下，尽量地扩展传感器的低频响应范围，来适应要求越来越高的低频测试要求。通过串联校正技术，目前已利用10Hz的检波器得到固有频率0.1~0.5Hz的低频传感器。但是工程使用中可靠性

较高的检波器(一般固有频率8~15Hz以上)在低频时输出信号很弱,受器件噪声的影响,有明显的漂移。为减小漂移,且要降低测量频率,就需要采用固有频率低的检波器,而低固有频率的检波器在实际应用中存在机械稳定性的问题。所以惯性传感器的低频特性和机械稳定性之间存在矛盾。工程应用中希望得到同时具有良好的低频特性和机械稳定性的传感器,如何解决这一矛盾成为本文的一个重要问题。

大型结构动态特性测试是工程中的重要问题。大型结构的固有频率比较低,阻尼比很小,有些结构还具有模态密集的特点。利用结构在脉动和环境随机激励下的响应估计结构的固有频率、阻尼比和振型等模态参数是一种比较经济、方便的手段,而且不对结构造成损害,但对传感器和信号处理技术有较高的要求。识别密集模态和阻尼比估计是大型结构动态特性测试的主要困难。本文将以DP型传感器作为测试手段,并系统讨论大型结构动态特性测试中的信号处理方法。

动挠度测试是铁路桥梁测试中的重要内容。动挠度是低通型瞬态信号,而且有直流成分,用惯性传感器进行测量必然造成畸变,所以目前主要采用相对的测量手段。如果已知传感器的特性,有可能用信号恢复的方法将真实信号从已经畸变的信号中恢复出来。然而,由于传感器的低频特性不足,造成信号的低频信息丢失,使信号恢复的过程表现出严重的病态,因此这一问题比表面看起来要困难得多。解决这一困难不仅为铁路桥梁动挠度测试这一实际工程问题提供经济、便捷的惯性测试手段,也是对信号恢复、信号重构理论应用领域的拓展,对解决工程中的病态问题也具有参考价值。

1.7 本文结构安排

第二章分析进一步扩展磁电式地震检波器低频测量范围所面临的问题,讨论了并联电容对检波器机械特性和电器特性的影响,并采用并联电容和串联校正相结合的方法,研制出具有极低固有频率和较高机械稳定性的特殊低频传感器。

第三章利用磁电检波器的可逆性,实现检波器参数的计算机辅助标定。设计了DP传感器的计算机标定系统,能够实现DP传感器的幅相频率特性的标定,并讨论了DP型传感器参数的近似拟合的有关问题。

第四章讨论大型结构动态特性的测试方法。讨论了模拟信号和数字信号

功率谱之间的联系以及窗函数对功率谱估计的影响，确定了大型结构动态特性测试中对时窗长度的要求。并提出了频域中阻尼比估计的拟合算法。给出了南盘江铁路桥的实验结果。

第五章探讨应用信号恢复理论校正DP型传感器动态特性的时域和频域的信号恢复方法，讨论了频域信号恢复中暂态信号的两种周期化方法。并针对时域方法和频域方法之间的差异作进一步的讨论，证明了二者的统一性。

第六章讨论了Hilbert空间中的信号恢复方法。论证了病态问题的起因和解决方法。在Hilbert空间最佳逼近理论的基础上，推导出信号恢复算法，充分利用时限约束以及火车过桥时静位移的计算结果，成功恢复出动挠度信号。

第七章全文总结。

第2章 串联式频率特性校正方法的发展与应用

工程中使用的振动传感器应该具有以下的特点：

- 1) 体积、重量不能太大；
- 2) 强的抗冲击和交叉振动影响的能力；
- 3) 不需调零；
- 4) 运输、安装方便；
- 5) 性能稳定可靠。

一般认为固有频率在8Hz以上的磁电式检波器才比较稳定、可靠，固有频率在15Hz以上才易做到垂直、水平双向兼用。随着电子技术的发展，通过电路补偿而展宽传感器的频响特性得到了应用。电路补偿可以降低对传感器力学结构的要求，并使传感器呈现出良好的低频输出特性。在第1章中已讨论了无源校正、反馈校正和串联校正等几种校正方案，显然串联校正具有明显的优点。其主要优点可以概括为：

- 1) 有效地扩展了低端测量范围；
- 2) 输出特性取决于电路参数，即使各个检波器的频率特性一致性差，通过精心调试可以获得良好的一致性；
- 3) 其抗冲击和抗交叉振动的性能取决于所用检波器的机械特性，可采用高可靠性的检波器；
- 4) 在低频端可测量大振幅，测量动态范围主要取决于电路。

但是校正电路的噪声，特别是低频漂移噪声，形成了频率扩展的瓶颈。为了使校正电路的输入端有良好的信噪比，希望采用固有频率低的检波器，这就和工程应用中要求高可靠性和抗冲击、抗交叉振动影响的要求产生矛盾。此外，固有频率低的检波器，其低频动态测量范围也因线圈—壳体间隙而受到限制。为此，作者探求这些矛盾的解决办法，进一步发展串联校正技术，改善低频扩展的能力。

2.1 高机械稳定性的DP型传感器

目前的DP传感器多采用固有频率10Hz的检波器。此种类型的检波器在地基、建筑、精密机床以及水轮发电机组的振动测试方面取得了比较满意的结果；DP型传感器在铁路桥梁方面的应用还处在实验阶段。铁路桥梁的

振动与上面所讲的几种物体的振动相比较有不同的特点，从而对测试设备也提出了不同的要求。上面提及的物体的振动的共同的特点是振动比较微弱，振动加速度不大。在脉动实验中，铁路桥梁的振动也是小振幅的，但在强振实验中，铁路桥梁振动形式比较复杂：从频率成分来看，包括从直流一直到几十Hz；振动强烈，振幅可达20mm；另外，桥梁的空间振动形态也比较复杂，存在强烈的交叉振动。在这样的情况下，固有频率10Hz的拾震器的稳定性和可靠性显得不足。固有频率28Hz的拾震器有更好的稳定性和可靠性，可以满足桥梁振动的测试的可靠性要求。另外28Hz的拾震器的还可以双向使用，增加了传感器的适应性。但是，28Hz的检波器的低频特性较差，其输出信号强度在低频段是10Hz检波器的1/8左右，要校正到同样的固有频率，需要对低频信号作更高倍数的放大，因此低频漂移也要严重一些。这是机械稳定性和低频特性之间的矛盾。在强振实验中，桥梁的振幅较大，由于采用28Hz的检波器引起的低频漂移还不成为主要矛盾。实验证明，这种DP型传感器在铁路桥梁强振实验中有很好的表现。表2-1给出一个利用28Hz检波器，做成固有频率0.5Hz，灵敏度0.1V/mm的位移型DP传感器(DPS—0.5—0.1)的标定结果。

表 2-1 采用 28Hz 检波器的 DP 传感器的标定结果

频率(Hz)	垂直方向			水平方向		
	输入 (μm)	输出 (mV)	灵敏度 (V/mm)	输入 (μm)	输出 (mV)	灵敏度 (V/mm)
0.5	200	17	0.085	500	38	0.076
0.8	200	20	0.1	500	50	0.1
1	200	20	0.1	500	50	0.1
2	200	20	0.1	500	50	0.1
5	200	20	0.1	500	49	0.098
10	200	20	0.1	500	49	0.098
20	200	20	0.1	500	46	0.092
30	200	20	0.1	200	20	0.1
40	200	21	0.105	200	20	0.1

2.2 磁电式检波器频率特性低频扩展的限制

利用串联校正方法可以有效地扩展磁电式传感器的低频特性。如果没有噪声影响，选择合适的参数，可以使校正后的固有频率无限接近于直流，但是噪声是不可避免的，低频扩展的范围受到噪声的限制。

考察具有二阶高通特性的磁电式地震检波器，电压输出对于振动速度输入的传递函数为：

$$H(s) = \frac{U(s)}{sX(s)} = \frac{\alpha s^2}{s^2 + 2\xi_0\omega_0 s + \omega_0^2} \quad (2-1)$$

其中， α 为标称灵敏度($\text{V/m}\cdot\text{s}^{-1}$)， ξ_0 为阻尼， ω_0 为固有角频率。若频率为 ω 的振动位移幅值为 X_m ，则磁电式地震检波器电压输出的幅值 U_m 为：

$$U_m = \frac{\alpha\omega^3 X_m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\xi_0\omega_0\omega)^2}} \quad (2-2)$$

如果输入信号频率远低于传感器固有频率，近似有：

$$U_m = \frac{\alpha\omega^3 X_m}{\omega_0^2} \quad (2-3)$$

表明电压输出幅值与输入信号频率的三次方、振动位移幅值成正比。显然，频率越低，输出的衰减越严重。

表2-2给出了振动位移幅值 $X_m=1\mu\text{m}$ 时，磁电式地震检波器输出电压幅值与频率的理论关系。

表 2-2 磁电式地震检波器电压输出幅值与信号频率的理论关系
(振幅 $1\mu\text{m}$ ，固有频率 10Hz ，标称灵敏度 $30\text{V/m}\cdot\text{s}^{-1}$ ，阻尼 0.65)

频率(Hz)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
电压(μV)	0.002	0.015	0.051	0.12	0.24	0.41	0.65	0.97	1.34	1.89

实验证明，选用性能优良的运算放大器芯片，校正电路的输入级噪声相当于 $0.1\mu\text{V}$ ，对于 0.4Hz 振幅 $1\mu\text{m}$ 的振动信号，地震检波器的理论输出为 $0.12\mu\text{V}$ ，已与校正电路的输入级噪声在同一量级，此时DP传感器尚能达到微米级的分辨力，对于 0.1Hz 的振动，DP传感器只能分辨 0.05mm 的振动。

提高DP传感器对低频振动的分辨力，只能有两个途径。一是选用性能优良的芯片，优化电路，降低输入级噪声。另一途径是选用灵敏度更高，固有频率更低的地震检波器，增强检波器输出，从而提高DP型传感器对低频振动的分辨力。

2.3 地震式特殊低频传感器

采用串联校正的方法可以有效地降低磁电检波器的固有频率，如果没有噪声的影响，可以使校正后的固有频率无限接近直流。但电路中的噪声使降低固有频率存在一定的极限。实践表明，采用串联校正的方法可以将磁电检波器的固有频率降低到原固有频率的 $1/20 \sim 1/60$ 。另外，设计同样固有频率的低频传感器，采用固有频率不同的检波器，得到的低频传感器的漂移是不同的。当然可以用10Hz的检波器来得到固有频率0.2Hz的特殊低频传感器，但采用5Hz的检波器的低频传感器得到同样固有频率的低频传感器，漂移可以降低到原来的 $1/4$ 左右，这在许多应用领域有着十分重要的意义。比如用DP传感器测试桥梁的动挠度，希望传感器具有尽量好的低频特性，包括尽量低的固有频率和尽量小的低频漂移，有利于进行信号恢复。

固有频率5Hz磁电式检波器，在体积上可以做到与10Hz相同，但它在稳定性和可靠性方面存在明显的差距，其量程也不能满足强振测试的需要。而采取并联电容的方法可以在不明显损失低频灵敏度的情况下明显地提高磁电检波器的可靠性和抗震性能，同时使量程也扩大了。

某些地震式传感器用并联电容的方法，以损失灵敏度为代价，扩展其低频端的灵敏度线性区域，本文在全面研究并联电容对检波器特性影响的基础上，用低固有频率的检波器，采用并联电容的方法改善其耐冲击和强振的性能，并采用电路网络校正其低频特性，从而开发出一种工程上适用的特殊低频传感器。

2.3.1 并联电容对磁电检波器特性的影响

并联电容后速度检波器的力学模型和电学模型如图2-1所示。 C 为并联电容， R 为后续电路的输入电阻。

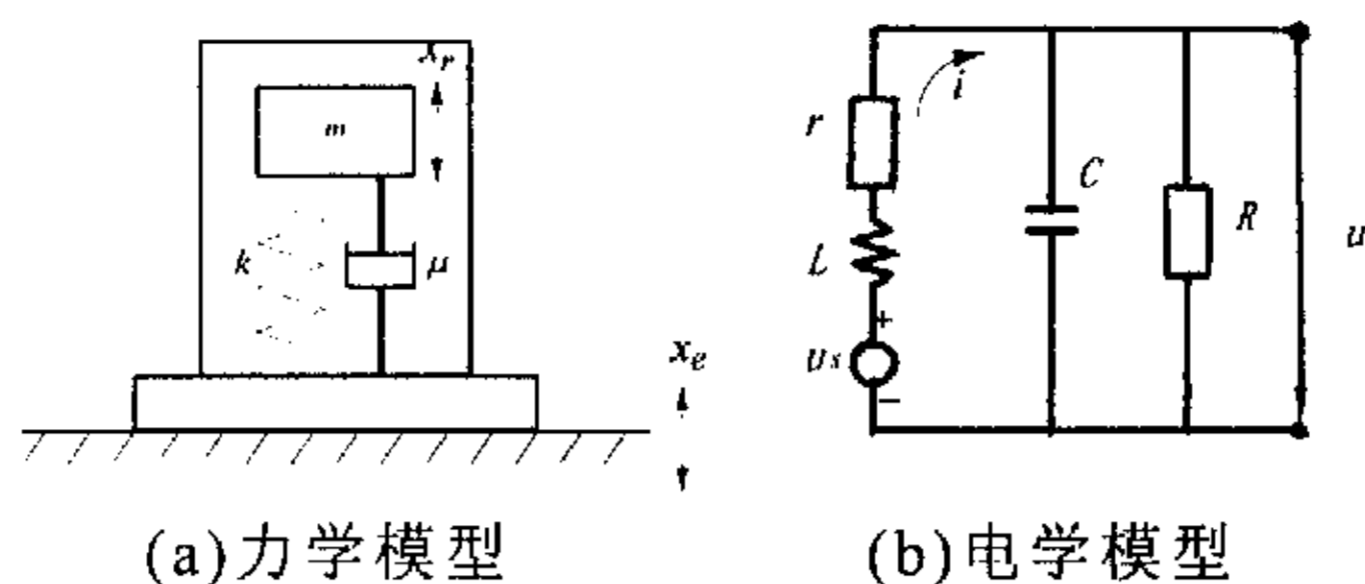


图 2-1 并联电容电阻的磁电速度检波器的力学和电学模型

$$\text{动力学方程: } m\ddot{x}_r + \mu\dot{x}_r + kx_r = -m\ddot{x}_e - f \quad (2-4a)$$

$$\text{电磁力方程: } f = \alpha \cdot i \quad (2-4b)$$

$$\text{电磁感应方程: } u_s = \alpha \cdot \dot{x}_r \quad (2-4c)$$

$$\text{电路方程: } u + ri + L \frac{di}{dt} = u_s \quad (2-4d)$$

$$\frac{u}{R} + C \frac{du}{dt} = i \quad (2-4e)$$

式中, m 为惯性体质量, k 为弹簧刚度, μ 为阻尼系数, x_e 为壳体(基座)的运动位移, x_r 为惯性质量相对壳体的位移, B 为磁通密度, l 为线圈有效长度, L 为线圈电感, u 为检波器输出电压, i 为线圈内电流, 检波器机械结构的固有圆频率为 $\omega_0 = 2\pi f_0 = \sqrt{k/m}$, 灵敏度为 $\alpha = Bl$ 。

将式(2-4a)~式(2-4e)作Laplace变换, 消去中间变量, 经过化简后得到:

$$H_1(s) = \frac{X_r(s)}{X_e(s)} = \frac{-(B_4 s^4 + B_3 s^3 + ms^2)}{A_4 s^4 + A_3 s^3 + Ms^2 + \mu_1 s + k} \quad (2-5)$$

$$H_2(s) = \frac{U(s)}{sX_e(s)} = \frac{-\alpha ms^2}{A_4 s^4 + A_3 s^3 + Ms^2 + \mu_1 s + k} \cdot \frac{R}{R+r} \quad (2-6)$$

$H_1(s)$ 为机械传输特性, $H_2(s)$ 为系统电压对振动速度的传输特性。其中

$$A_4 = \frac{RLCm}{R+r}$$

$$A_3 = \frac{LRC\mu + rRCm + Lm}{R+r}$$

$$M = m + \frac{\alpha^2 RC + \mu L + rRC\mu + LRck}{R+r}$$

$$\mu_1 = \mu + \frac{rRCk + Lk + \alpha^2}{R+r}$$

$$B_4 = \frac{RLCm}{R+r}$$

$$B_3 = \frac{mrRC + Lm}{R+r}$$

如果 $C=0$, $R=\infty$, $H_1(s)$, $H_2(s)$ 都为二阶高通特性。而并联电容和电阻后, 系统的传递特性不再是二阶高通的, 而是一种比较复杂的形式。但对 $H_2(s)$ 而言, 如果忽略三次方和四次方项, 仍可简化成二阶形式:

$$H_2(s) = \frac{U(s)}{sX_e(s)} = \frac{-\alpha ms^2}{Ms^2 + \mu_1 s + k} \cdot \frac{R}{R+r} \quad (2-7)$$

并联的电容、电阻和检波器的线圈构成闭合回路, 当由于振动线圈上产生感应电压的时候, 闭合回路中产生电流, 从而使线圈受到电磁力的作用, 此作用阻碍振子的运动, 输出信号越强, 电流就越强, 电磁力就越大, 并联电容的存在起到负反馈的作用, 因此, 也把并联电容叫做反馈电容。从简化后的公式可以看到, 并联电容的效果相当于系统的质量和阻尼系数得到增加, 从而系统的固有频率也降低了。我们把 M 和 μ_1 分别称为当量质量和当量阻尼系数。

为了更直观地说明并联电容对检波器特性的影响, 我们代入实际的参数进行仿真计算。检波器的参数用其习用的单位表示为:

$m=10\text{g}$, $\mu=0.377\text{N/m/s}$, $k=9.87\text{N/m}$, 相当于固有频率 $f_0=5\text{Hz}$, 阻尼比 $\xi_0=0.6$ 。

$\alpha=28\text{V}/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$, $L=180\text{mH}$, $r=470\Omega$, $R=7\text{k}\Omega$ 。

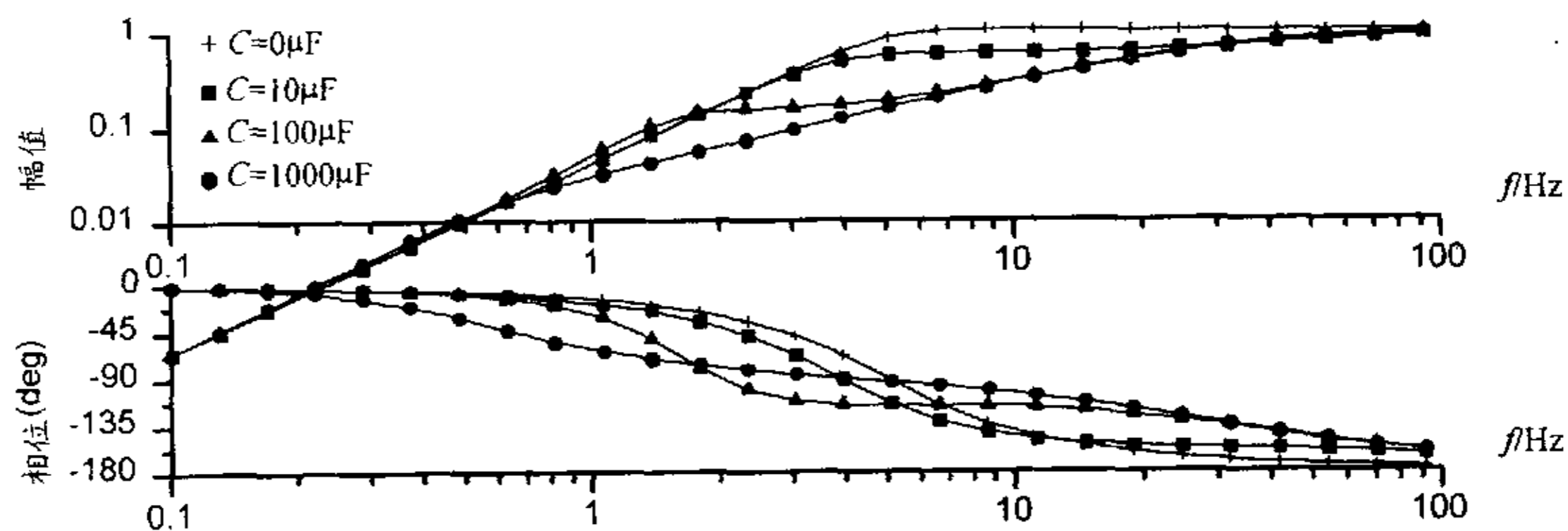

 图 2-2 并联不同电容的 $H_1(s)$ 的幅相频率特性

图2-2给出并联不同电容的检波器机械传输特性。

检波器内部运动部件的运动间隙是一定的, 检波器可测的最大振幅受到此间隙的制约。在高于固有频率的频段, 检波器的可测最大振幅与运动间隙基本相等, 在低于固有频率的频段, 运动部件与壳体间的相对位移小于壳体振动的绝对位移, 因而可测最大振幅将有所增加。检波器的可测最大振幅在不同频率下是不同的, 设检波器的内部运动间隙为 d , 则检波器的可测最大振幅 $B(f)$ 为:

$$B(f) = \frac{d}{|H_1(j2\pi f)|} \quad (2-8)$$

并联电容使检波器的运动部件的运动特性发生改变。为了更清楚地说明并联电容在不同频率下对速度检波器机械传输特性的影响, 定义量程放大函数:

$$\gamma(f) = \frac{B(f)|_C}{B(f)|_{C=0}} = \frac{|H_1(j2\pi f)|_{C=0}}{|H_1(j2\pi f)|_C} \quad (2-9)$$

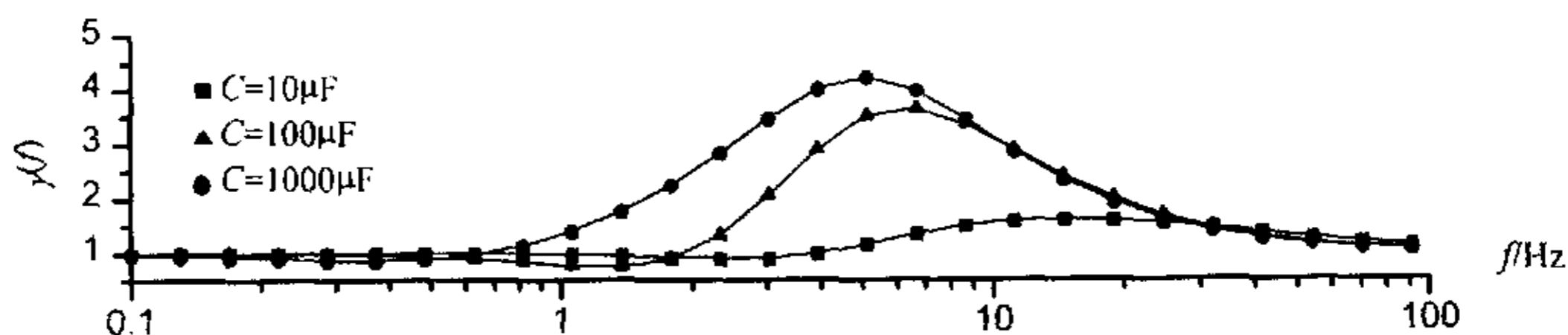


图 2-3 并联不同电容的进行量程放大函数

$\gamma(f)$ 可以反映并联电容对检波器的机械特性的影响程度。 $\gamma(f)$ 在低频段和高频段都接近1,说明并联电容在低频段和高频段对检波器的机械行为影响并不显著。这是因为电容对低频信号的容抗较大,而线圈电感对高频信号的感抗较大,因而感应电流微弱,线圈受到的电磁力也较小。在中频段, $\gamma(f)$ 的数值较大,说明并联电容对此频段有比较显著的影响。从以上分析可以看出,在磁电检波器的输出端并联电容后,振子受到电磁力的作用,与检波器壳体的相对运动减小,因此机械量程得到放大,机械稳定性也提高了。

图2-4给出并联不同电容后检波器的输出特性的比较。由于反馈效应和并联电容的负载效应,检波器的幅频特性在高频端被拉下来。在低频段,检波器的信号输出强度并没有明显减弱。

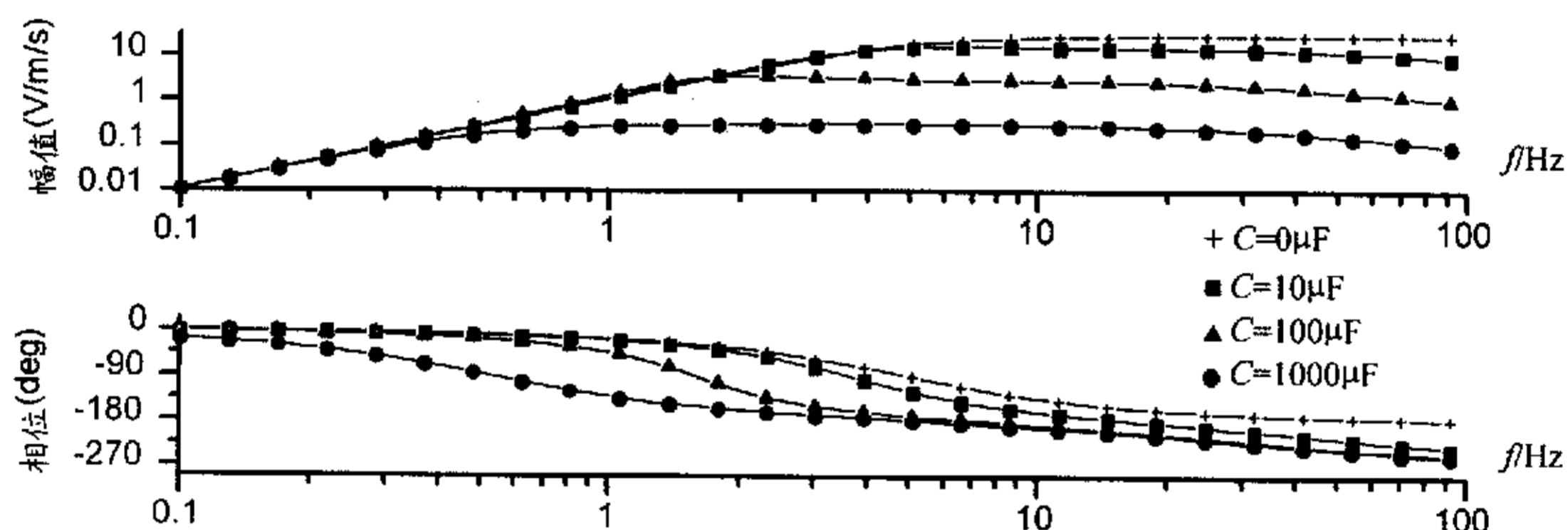


图 2-4 并联不同电容后的 $H_2(s)$ 的幅相频率特性

在一定频率以下,检波器的输出特性仍与二阶高通特性相似。图2-5给出 $C=100\mu\text{F}$ 时检波器的实际特性曲线与简化后的二阶特性曲线的比较。在 10Hz 以前,二者没有较大的差别。

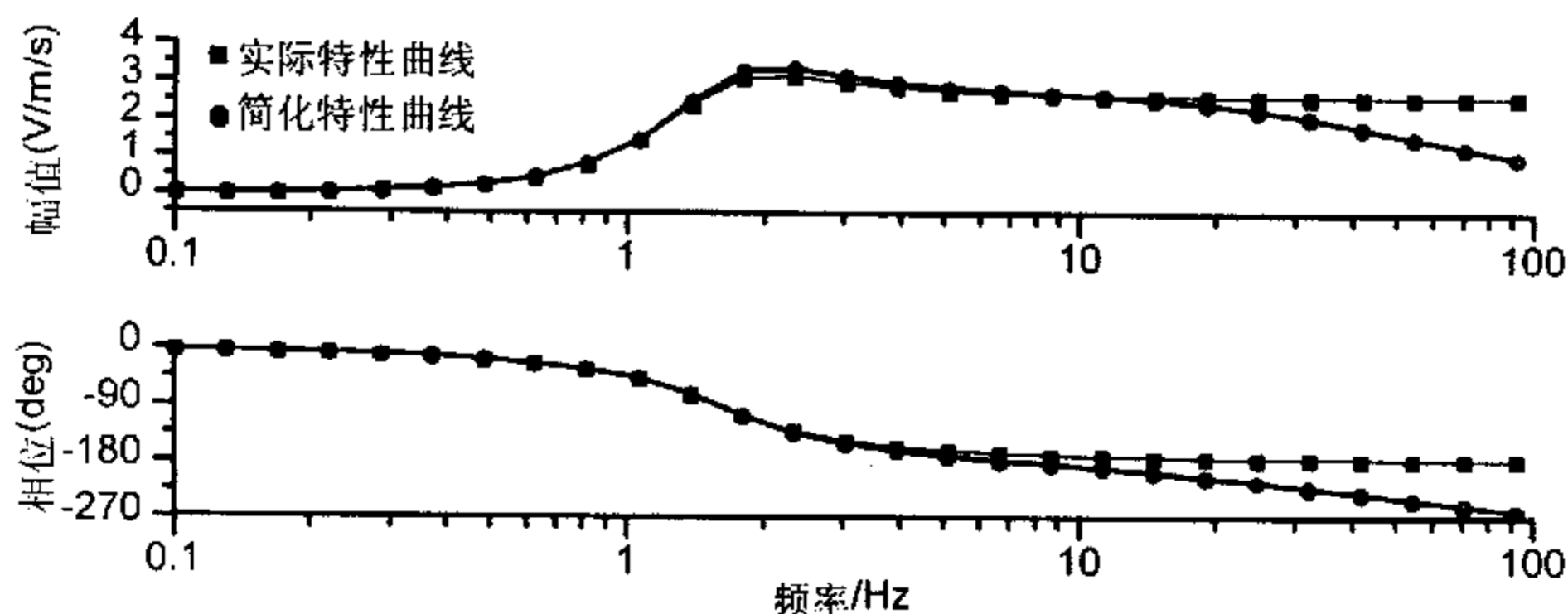


图 2-5 简化结果与实际特性的比较 ($C=100\mu\text{F}$)

2.3.2 地震式特殊低频传感器的实现方案

采用串联校正的方法实现DP型地震式低频传感器，采用低固有频率的检波器可以得到更低的固有频率和更小的低频漂移。低固有频率的检波器的稳定性和可靠性较差，只在某些特殊场合应用。此外低固有频率的检波器在强振测试中存在量程问题。因此低频特性和机械稳定性之间存在矛盾。

并联电容的方法是一种无源校正方法，检波器的信号输出强度受到一定的衰减，但可以有效地扩大检波器的量程范围，使其可靠性得到提高，其线性范围也有一定的扩大，相当于降低固有频率。并联电容后的检波器的输出特性在低频段与二阶高通特性相似，仍然可以用串联校正网络补偿其低频特性。

因此，本文采用3~5Hz的检波器，通过并联电容增加其机械稳定性和量程，采用串联校正的方法进一步降低其固有频率，可以得到地震式特殊低频传感器。原理如图2-6所示。

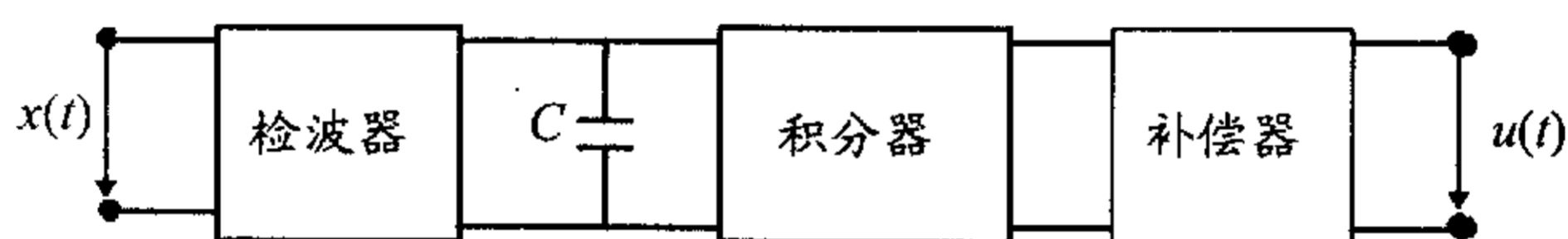


图 2-6 地震式特殊低频传感器原理框图

本方案具有以下特点：

1. 并联电容后，由于电磁力的作用，相当于检波器的悬挂系统的质量和阻尼得到增加，固有频率得到一定的降低，运动部件运动位移有所减小，因而机械稳定性得到提高，可测最大振幅也得到增加。

2. 并联电容后，检波器特性在低频段仍于二阶高通特性相似，仍可以用串联校正网络校正其低频特性。

3. 并联电容后，由于反馈作用和负载效应，检波器的幅频特性在高频段被拉下来，但低频段的信号强度并没有明显减弱，并联电容并不会增加传感器的低频漂移。

因此该方案通过并联电容，以损失高频段的灵敏度为代价，提高低固有频率检波器的机械稳定性的同时，而低频段的灵敏度并没有明显衰减，这样就解决了低频特性和机械稳定性的矛盾。通过进一步串联校正，得到了一种新型的特殊低频传感器。

2.3.3 实验

实验所用的磁电检波器的标称参数为：

固有频率 $f_0=4.5\text{Hz}$ ，

阻尼比 $\xi_0=0.5\sim 0.7$ ，

灵敏度 $\alpha=28\text{mV/mm}\cdot\text{s}^{-1}$ 。

图2-7给出原磁电检波器并联电容前后的频率特性比较以及经过电路校正后的传感器的频率特性。传感器的频率特性采用第3章中介绍的标定系统加以测试。在实验中，由于磁电检波器是速度型的传感器，在低频段要使传感器的输出信号达到适合计算机采集的强度需要很大的振幅，这在实际的实验中是难以实现的。为了方便测试，将检波器的输出进行一次积分后转换成位移信号，这并不改变其频率特性的形状。

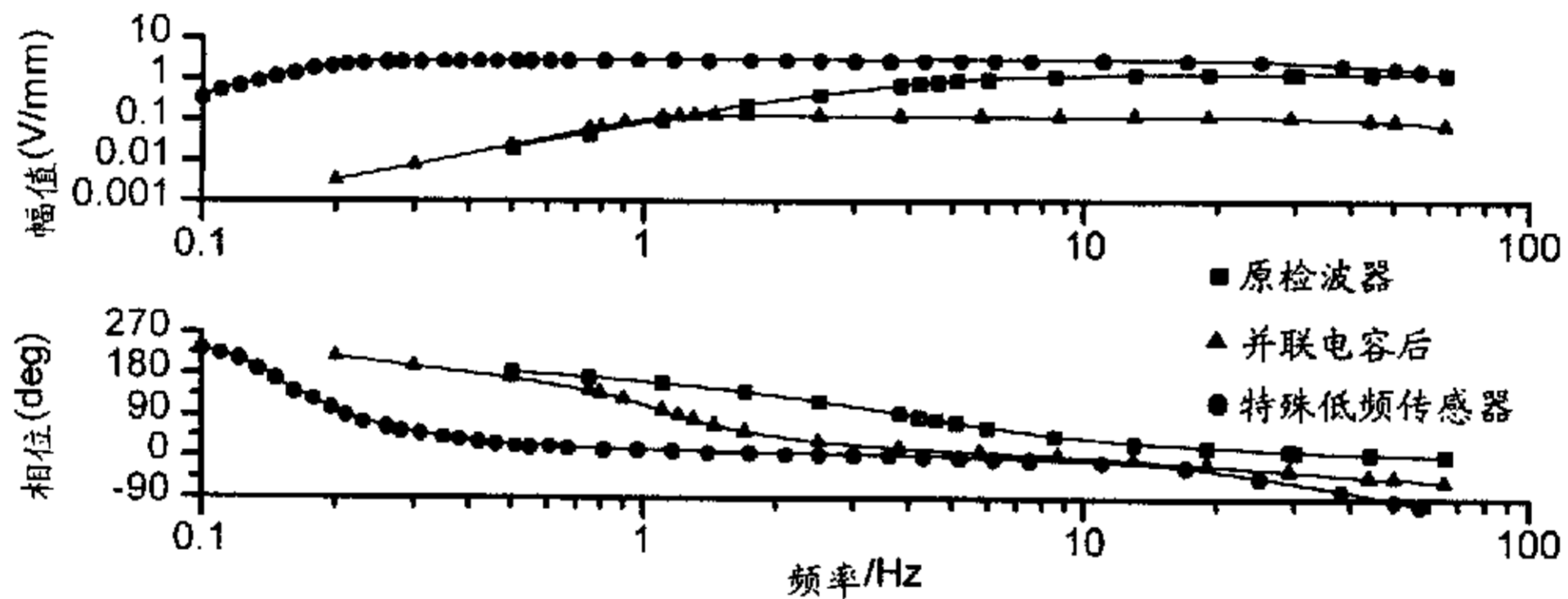


图 2-7 三类传感器的特性比较

原检波器的固有频率为 4.2Hz ，在其输出端并联 $94\mu\text{F}$ 的电容后，固有频率变为 1.3Hz 左右，高频段灵敏度降低到原来的 $1/10$ 左右，而低频段灵敏度基本没有衰减。通过进一步的串联校正，将固有频率降低到 0.2Hz 左右。由于并联电容的影响，传感器特性在 10Hz 以后幅值衰减，相位也逐渐偏离二阶特性曲线。

2.4 轴绝对振动测量

转子是旋转机械的核心部件。大量事实表明，旋转机械的大多数故障与

转子直接有关。监视转子的振动状态是大型旋转机械状态监测和故障诊断的最主要的内容。在多数场合，轴振动比轴承座的振动大，有时甚至大数倍至数十倍，此时轴的径向相对振动就可以提供足够的信息；当轴的振动比轴承座的振动不是大很多时，为了不遗漏有关的振动信息，测定轴的径向绝对振动是必要的。ISO/DP 7919（建议草案）规定，当轴承振动超过轴相对振动的20%时，需要测量轴的绝对振动^[61]。

测量轴的绝对振动的最直接的方法是将涡流传感器安装在“不动”的参考点上。但是，这一方法在旋转机械现场是难以实现的，因为包括基础在内的所有非转动部件都参与了振动，因此必须采用惯性原理的传感器。惯性传感器必须安装在被测物体上，随被测物体一起振动。但对旋转轴而言，在它上面直接安装传感器是不可行的，必须采取特殊的措施。

ISO/DP 7919推荐了两种旋转轴绝对振动的测量方法。

图2-8展示了采用骑轴机构的测量原理。骑轴机构的支撑系统能使骑轴架精确地跟随旋转轴的径向振动，惯性传感器安装在骑架上，从而实现轴绝对振动的测量。

骑轴机构的支撑系统应该有足够的刚度，保证骑轴架能够跟随轴的绝对振动，另一方面，支撑系统的刚度也不能太大，防止给机组运行带来不利的影响，而且也应当没有颤振，在所感兴趣的频率范围内不产生不利影响或歪曲轴振动测量的固有频率。这些要求往往对此结构的应用带来一定的限制。

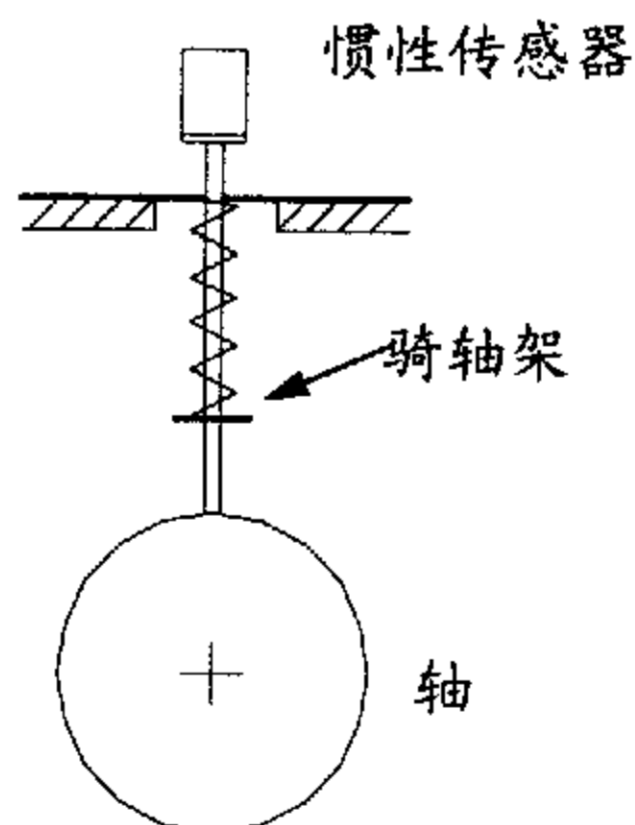


图 2-8 采用骑轴机构的轴绝对振动测量原理

轴绝对振动测量的另外一个可行的方法是采用复合原理。轴的绝对振动可以分解为两部分。设轴承座的绝对振动为 x_0 ，轴相对轴承座的振动为 x_{10} ，

则轴绝对振动 x_1 为:

$$x_1 = x_{10} + x_0 \quad (2-10)$$

将轴的绝对振动进行这样的分解之后,两个分量都有比较成熟的测试方法。涡流传感器和磁电速度传感器都是大型旋转机械状态监测中广泛应用的传感器,本文将采用这两种传感器分别测量旋转轴相对轴承的相对振动及轴承座的绝对振动。

2.4.1 复合传感器的复合误差

复合原理的传感器要求两种传感器都能真实地反映所测振动信号,然而由于传感器频率特性的影响,测量结果会产生一定的偏差,我们称之为复合误差。

设 x_0 和 x_{10} 为正弦信号,经过传感器后的输出分别为 y_0 和 y_{10} :

$$y_0 = (k + \Delta k_1) x_0 e^{j\varphi} \quad (2-11)$$

$$y_{10} = (k + \Delta k_2) x_{10} e^{j\theta} \quad (2-12)$$

k 为传感器的标称灵敏度, Δk_1 和 Δk_2 为灵敏度偏差, φ 及 θ 为传感器带来的相移。复合结果 y_1 为:

$$y_1 = y_{10} + y_0 = k(x_{10} e^{j\theta} + x_0 e^{j\varphi}) + \Delta k_1 x_0 e^{j\varphi} + \Delta k_2 x_{10} e^{j\theta} \quad (2-13)$$

在传感器的调试过程中,灵敏度比较容易把握,通过认真的调试,可以认为 $\Delta k_1 = \Delta k_2 = 0$;而传感器引入的相移随频率的变化而改变,而且一般由传感器的物理机制所决定,因而解决由传感器带来的相角误差成为复合传感器的关键。在忽略灵敏度误差的情况下,公式(2-13)简化为:

$$\begin{aligned} y_1 &= k(x_{10} e^{j\theta} + x_0 e^{j\varphi}) \\ &= k e^{j\theta} (x_{10} + x_0) + k(e^{j\varphi} - e^{j\theta})x_0 \\ &= k e^{j\theta} x_1 + \Delta y \end{aligned} \quad (2-14)$$

式中, $\Delta y = k(e^{j\varphi} - e^{j\theta})x_0$

可见,传感器的相角误差对测试结果产生两方面的影响:一方面它使轴绝对振动信号整体产生一定的相移,另一方面由于两路传感器的相移不一致而产生了附加误差 Δy 。

涡流式传感器是一种低通型传感器，在直流到数千Hz范围内幅频特性平坦，相角滞后可以忽略。而磁电速度传感器为二阶高通型传感器，配接积分器后得到位移传感器，仍然为二阶高通类型，其归一化传递函数为：

$$H(s) = \frac{U(s)}{X(s)} = \frac{s^2}{s^2 + 2\xi_0\omega_0 s + \omega_0^2} \quad (2-15)$$

其幅频特性 $A(\eta)$ 和相频特性 $\varphi(\eta)$ 分别为：

$$A(\eta) = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4\xi_0^2\eta^2}} \quad (2-16)$$

$$\tan\varphi(\eta) = \frac{2\xi_0\eta}{1-\eta^2} \quad (2-17)$$

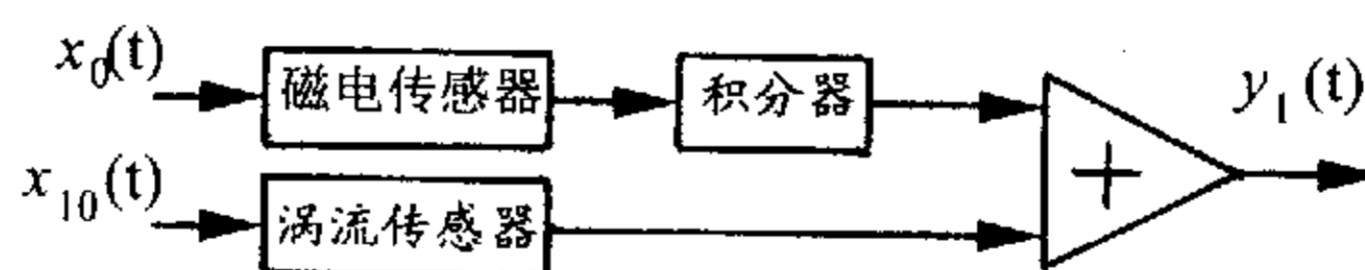
式中 ω_0 为固有圆频率， $\eta=f/f_0$ ， f_0 为固有频率， ξ_0 为阻尼比。根据式(2-16)及(2-17)计算可得当 $\xi_0=0.7$ 时有：

表 1 磁电速度传感器的幅值、相位特性

η	1	2	3	4	5	25	50
$A(\eta)$	0.7	0.975	0.996	1	1	1	1
$\varphi(\eta)$	-90	-137	-152	-159.5	-163.7	-176.8	-178.4
$\Delta\varphi=\varphi(\eta)+180^\circ$	90	43	28	20.5	16.3	3.2	1.6

$\varphi(\eta)+180^\circ$ 为对磁电式速度传感器的输出进行反相后的相角差。

若将涡流传感器与磁电传感器直接复合，如图2-9所示：



则复合结果为：

$$y_1 = k x_1 + \Delta y \quad (2-18)$$

其中, $\Delta y = k(e^{j\varphi} - 1)x_0$ 为复合误差。

相对复合误差(见图2-10)为:

$$\delta = |e^{j\varphi} - 1| = 2\sin(\varphi/2) \quad (2-19)$$

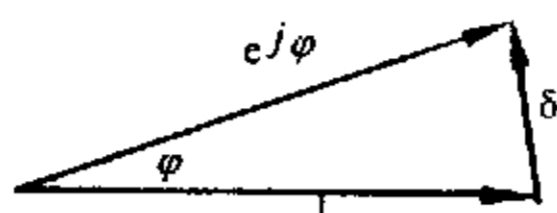


图 2-10 由相差引起的相对复合误差

由简单的计算可以知道, 要使由相位带来的复合相对误差 $\delta < 5\%$, 则要求相位差 $\varphi < 3^\circ$ 。

对于磁电速度传感器, 当频率比大于2时, 幅值特性趋近于平坦, 但要使相位特性满足误差条件, 则应保证频率比大于25, 针对工程中常用的固有频率10Hz的传感器, 若直接复合, 满足精度要求的频段应在250Hz以上。汽轮发电机组的工作转速为3000转/分钟, 相当于频率50Hz, 其它类型的旋转机械转速更低, 显然, 直接复合是不能满足使用要求。

2.4.2 复合误差的补偿方法

从上面的分析可以看出, 两种类型的传感器信号在复合之前必须采取必要的补偿措施。

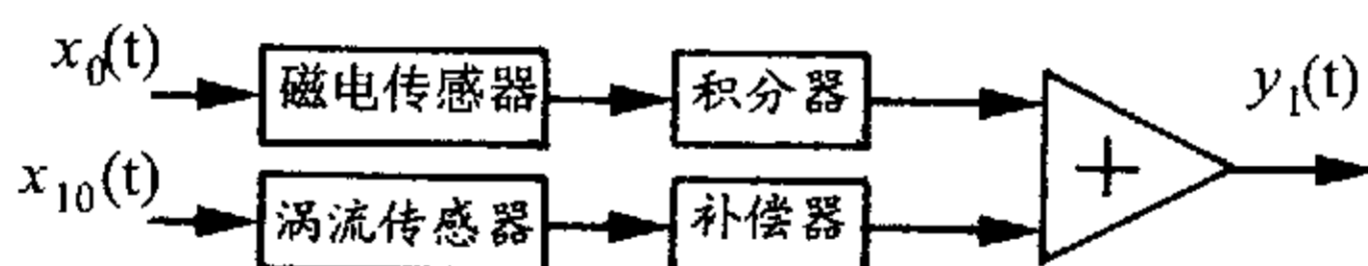


图 2-11 相角误差补偿原理

图2-11给出了补偿相角误差的一种方法^[62-64]: 在涡流传感器的输出上串联一个补偿器, 该补偿器具有和磁电传感器完全相同的固有圆频率和阻尼比的二阶高通环节 $C(s)$, 即:

$$C(s) = \frac{s^2}{s^2 + 2\xi_0\omega_0 s + \omega_0^2} \quad (2-20)$$

则补偿后的涡流传感器具有和速度传感器完全一致的频率特性。这种方

法可以消除附加误差 Δy ，但传感器的输出较轴的真实振动有一定的相移，在像动平衡这样的实验中，相角是非常重要的信息，在信号的后续处理中，应该按照磁电传感器的频率特性加以修正。

2.4.3 采用DP传感器的复合传感器实现方案

在直接复合方案中，复合误差随频率的增加而降低，当传感器的工作频段远高于磁电传感器的固有频率时，则可以得到足够的复合精度。因此，如果能将磁电传感器的固有频率降到足够低，同样可以达到消除复合误差的目的。因此利用DP传感器可以有效地消除相差对复合结果的影响。利用DP传感器实现的旋转轴绝对振动传感器原理由图2-12给出。

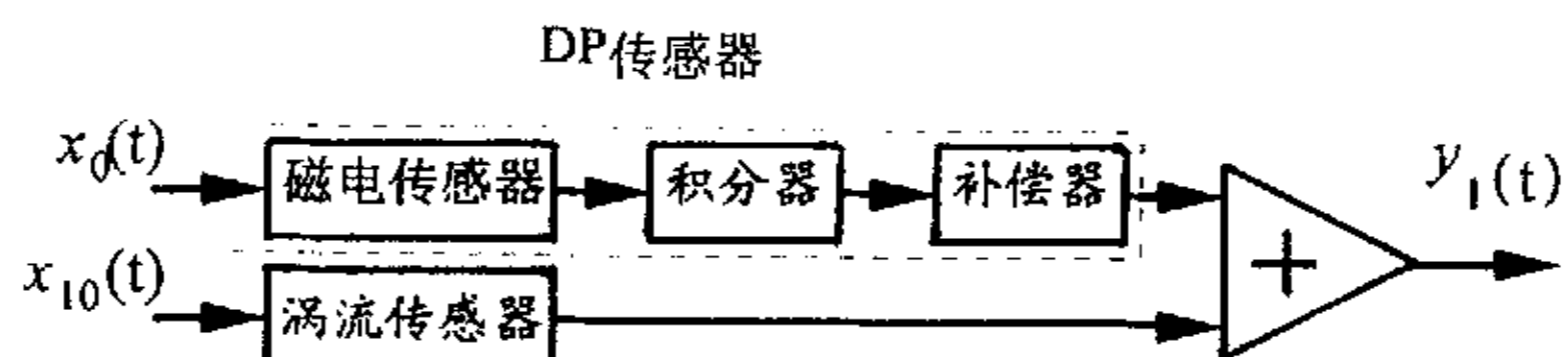


图 2-12 利用 DP 传感器的轴绝对振动传感器原理框图

采用固有频率0.5Hz的低频绝对振动传感器与涡流传感器复合，则引入的相角误差对25Hz的涡动仅为 1.6° ，对于50Hz的工频仅为 0.8° ，此误差已可忽略。

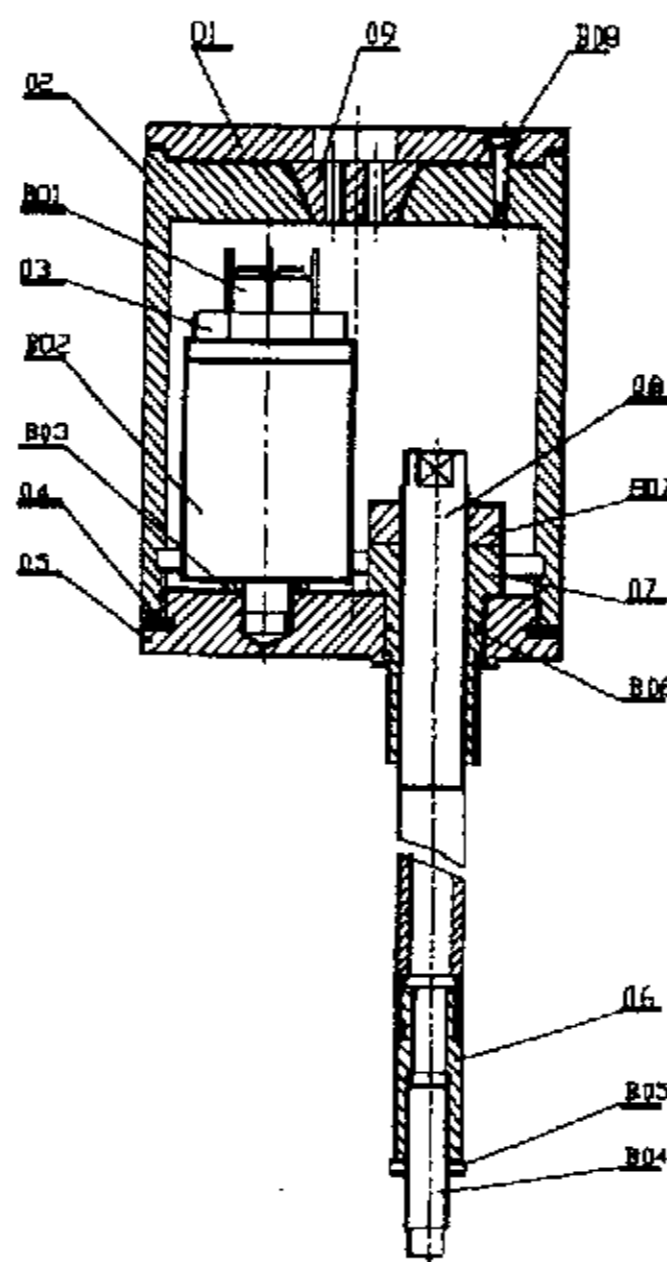


图 2-13 轴绝对振动传感器的结构

在“八五”攻关85—720—07课题大型旋转机械状态监测、分析及故障诊断技术研究中^[65]，本文作者对轴绝对振动传感器进行了结构设计，如图2-13所示。B02为磁电检波器，B04为涡流传感器。涡流传感器安装在一根加长杆上，加长杆可以调节伸出的长度，以达到调节涡流传感器与旋转轴的初始间隙。磁电检波器则安装在基座上，用以测量基座的绝对振动。传感器的信号由导线引出在专门的电路板上实现复合。

图2-11的方案与本方案的区别在于：图2-11的方案将补偿器放在涡流传感器的通道上，将一个比较理想的传感器的特性校正到与一个不太理想的传感器特性相一致，虽然消除了相差的影响，却给信号带来了一定的相移。而本方案则将补偿器置于磁电传感器的通道上，使其特性趋近于比较理想的传感器特性，因此比前一种方案具有一定的优越性。

2.4.4 轴绝对振动传感器测试实验

复合传感器的误差可以用图2-14所示的实验加以测试。将涡流传感器和磁电速度传感器安装在振动台上，如果两传感器的灵敏度和相位一致，则输出信号理论上应该为零。反之，如果两传感器的灵敏度或相位出现不一致的现象，则输出结果即为复合残差信号。测试结果如表2-3所示。

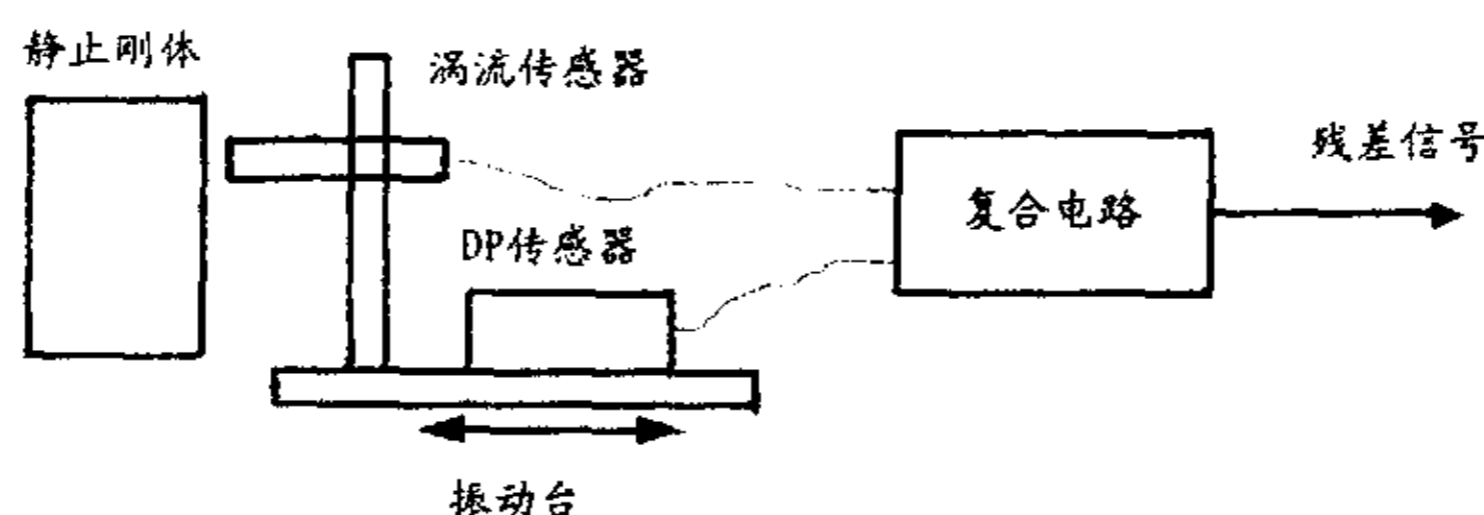


图 2-14 复合传感器残差测试原理图

表 2-3 复合传感器残差

频 率(Hz)	0.5	1	8	20	25	30	45	54	70
激 励(mV)	800	800	800	800	800	800	800	800	800
复合残差(mV)	1100	550	80	40	40	30	25	25	15
相对误差(%)	138	70	10	5	5	3.8	3	3	2
理论误差(%)	130	70	8	3.2	2.6	2.1	1.6	1.5	0.8

从表中可以看出，在高于20Hz的频段内，复合残差满足5%的精度要求，

对于工作频率为50Hz的气轮发电机组，该传感器可以胜任气轮机轴绝对振动的测试要求。

2.5 本章小结

磁电式地震检波器具有二阶高通特性，检波器的不失真频段在固有频率以上，测量低频信号受到其固有频率的限制。利用串联校正网络对地震式检波器频响特性进行校正，得到的DP传感器具有与原传感器同形的二阶高通特性，而其固有频率得到了降低。

●DP传感器的分辨率受到噪声的限制，并随频率的降低而变差。如果采用固有频率10Hz、灵敏度 $30\text{mV/m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的检波器，校正为固有频率0.5Hz的DP型传感器，则低频漂移大约可折合 $1\mu\text{m}$ 的输入。

●采用低固有频率的检波器可以得到更低的固有频率和更小的低频漂移。低固有频率的检波器的稳定性和可靠性较差，在强振测试中存在量程问题。因此低频特性和机械稳定性之间存在矛盾。并联电容后，由于电磁力的作用，相当于检波器的悬挂系统的质量和阻尼得到增加，固有频率得到一定的降低，运动部件运动位移有所减小，因而机械稳定性得到提高，可测最大振幅也得到增加。由于反馈作用和负载效应，检波器的幅频特性在高频段被拉下来，但低频段的信号强度并没有明显减弱。检波器特性在低频段与二阶高通特性相似，仍可以用串联校正网络校正其低频特性，并联电容并不会增加传感器的低频漂移。采用低固有频率的检波器，利用并联电容和电路补偿网络相结合的方法可以得到极低固有频率和较高可靠性的地震式特殊低频传感器。

●针对旋转轴绝对振动测量，作者采用DP传感器可以有效地解决复合传感器中的相差问题，并克服了传统校正方法中的存在相移的缺点，为轴绝对振动测量提供了新的实现方案。

第3章 DP型传感器的计算机标定及参数识别

DP型传感器在制造过程中需要调节补偿网络中低通、带通和全通环节的放大倍数来实现补偿网络的零点和磁电传感器的极点对消，从而达到降低固有频率的目的。

DP型传感器的电路中，除了补偿环节外，还有积分环节和隔直环节。由于理想积分环节是不可实现的，因而用一阶惯性环节代替理想积分环节。积分时间常数和隔直时间常数将对传感器的特性带来一定的影响。我们希望传感器的低频漂移尽可能小，采用较小的积分和隔直时间常数可以达到此目的，但为此传感器的特性将受到较大的影响，具体的表现是传感器的固有频率附近的幅值特性将受到衰减，如果补偿环节采用较小的阻尼，将补偿由于积分和隔直环节带来的影响。通过对DP传感器特性的测试，可以得到不同的参数配置对传感器特性的影响，从而得到合理的参数配置，使传感器的通带尽量平坦，漂移尽量小。

传感器的调试过程中总存在一定的偏差，而且经过一段时间的使用后，或传感器的使用环境发生变化，传感器的特性会有一定程度的改变。DP传感器由磁电式检波器和校正电路组成。实践证明，校正电路的特性是比较稳定的，而磁电式检波器的特性的变化是造成DP传感器特性改变的主要原因。影响磁电式检波器特性的因素主要有：

- 1)永久磁铁褪磁引起灵敏度的变化；
- 2)温度的变化引起线圈的阻抗的变化而进一步影响阻尼；
- 3)簧片机械性能的变化引起固有频率的改变。

在信号恢复中，需要精确地知道传感器的特性，包括幅频特性和相频特性。如果传感器特性本身存在偏差，将会对信号恢复的结果带来较大的影响。因此，希望设计一套标定系统来测试DP传感器的特性。而更进一步的要求是能够在测试现场对传感器进行标定，从而在最大程度上消除由于环境的变化而引起的传感器特性的改变。

所以DP型传感器的标定和参数识别有三方面内容：

- 1)磁电式检波器的特性和参数识别；
- 2)DP型传感器的幅相频率特性的标定；

3) DP型传感器特性参数的近似拟合。

本章将讨论上述问题。

3.1 磁电式检波器参数的估计方法

DP型传感器的敏感部件是磁电式地震检波器，这是在地质勘探和振动测试领域中广泛应用的、性能可靠、价格较低的传感器，固有频率有3Hz、5Hz、8Hz、10Hz、14Hz、28Hz等各种型号。受材料和工艺影响，同一型号的检波器的固有频率、阻尼比和灵敏度均有一定的偏差，DP型传感器的校正电路就需要逐个调试以保证输出特性的一致性程度。当校正电路参数确定以后，由于环境温度变化和材料性能受时效影响，检波器的特性参数将有一定的变异，因而影响DP传感器的输出特性。因此，对检波器特性的测试是研究DP校正电路补偿措施的先声。

检波器的特性参数可以在振动台上标定，但这项工作比较费事。利用磁电式传感器和激振器的可逆性，可以用电激励的方法进行参数识别。后一方法比较快捷、方便，而且可以现场使用。

磁电检波器的电学原理是电磁感应现象，当线圈在磁场中作切割磁力线运动时，线圈中就产生了与相对运动速度成正比的感应电压。反过来，在线圈上通上电流后，线圈在磁场中就受到一个与电流成正比的电磁力的作用。磁电速度检波器壳体静止时在电流激励下的力学和电学模型如图3-1所示。

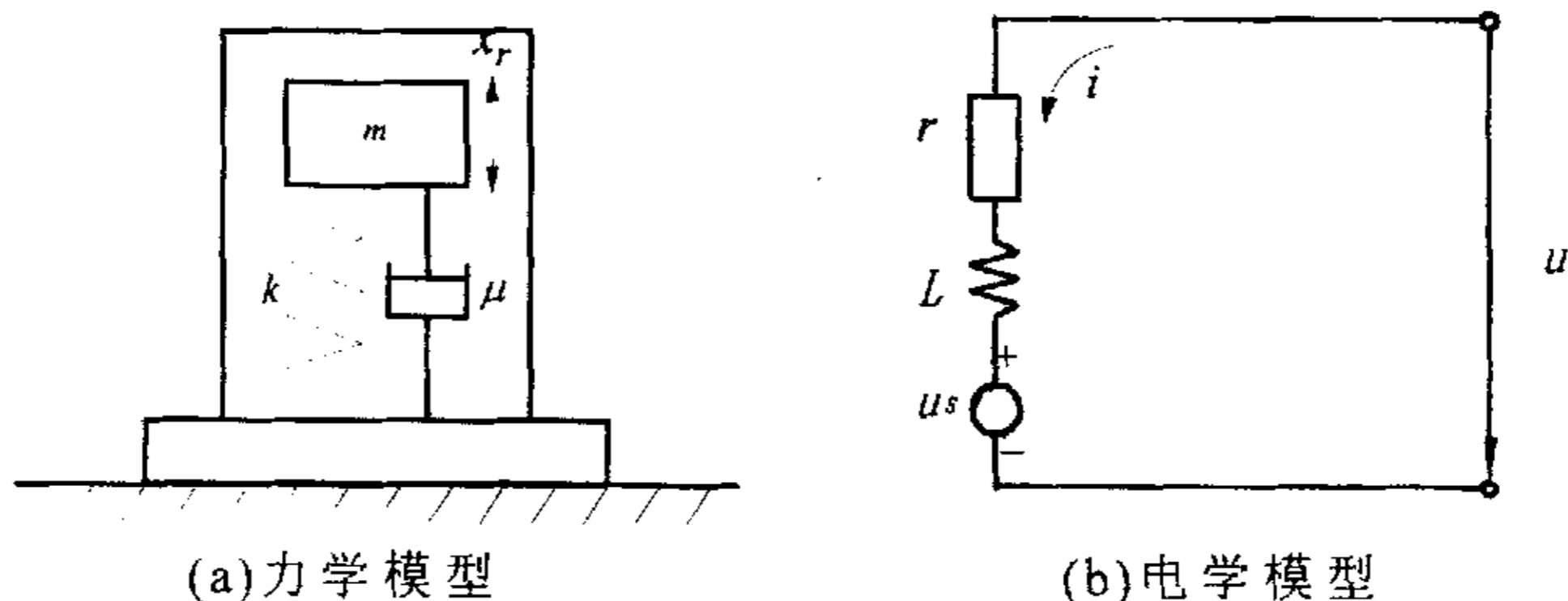


图 3-1 磁电速度检波器壳体静止时在电流激励下的模型

$$\text{动力学方程: } m\ddot{x}_r + \mu\dot{x}_r + kx_r = f \quad (3-1a)$$

$$\text{电磁力方程: } f = \alpha \cdot i \quad (3-1b)$$

$$\text{电磁感应方程: } u_s = \alpha \cdot \dot{x}, \quad (3-1c)$$

$$\text{电路方程: } u + ri + L \frac{di}{dt} = u_s \quad (3-1d)$$

对式(3-1a)~式(3-1d)作Laplace变换, 消去变量 f, x, u_s 得到复阻抗特性

$$Q(s) = \frac{U(s)}{I(s)} = \frac{s^3 + (\frac{\mu}{m} + \frac{r}{L})s^2 + (\frac{r\mu}{mL} + \frac{k}{m} + \frac{\alpha^2}{mL})s + \frac{rk}{mL}}{\frac{1}{L}s^2 + \frac{\mu}{mL}s + \frac{k}{mL}} \quad (3-2)$$

记作:

$$Q(s) = \frac{s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0}{b_2s^2 + b_1s + b_0} \quad (3-3)$$

这是磁电检波器的壳体静止时输出电压和输入电流的传递函数, 如果我们用系统辨识的方法得到这个传递函数, 就可以求出传感器的重要参数:

$$\text{固有频率: } f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{b_0}{b_2}} \quad (3-4)$$

$$\text{阻尼比: } \xi = \frac{\mu}{2\sqrt{mk}} = \frac{b_1}{2\sqrt{b_0b_2}} \quad (3-5)$$

$$\text{灵敏度: } \alpha = \sqrt{\left(\frac{a_1}{b_2} - \frac{a_0b_1}{b_0b_2} - \frac{b_0}{b_2^2}\right)m} \quad (3-6)$$

由于质量 m 是固定不变的, 可以事先根据在实验室中的标定结果计算出来。

磁电检波器的复阻抗频率特性可以由图3-2所示的系统进行测试。由计算机控制D/A产生一定频率的正弦电压, 经过一个精密电阻施加在检波器上。

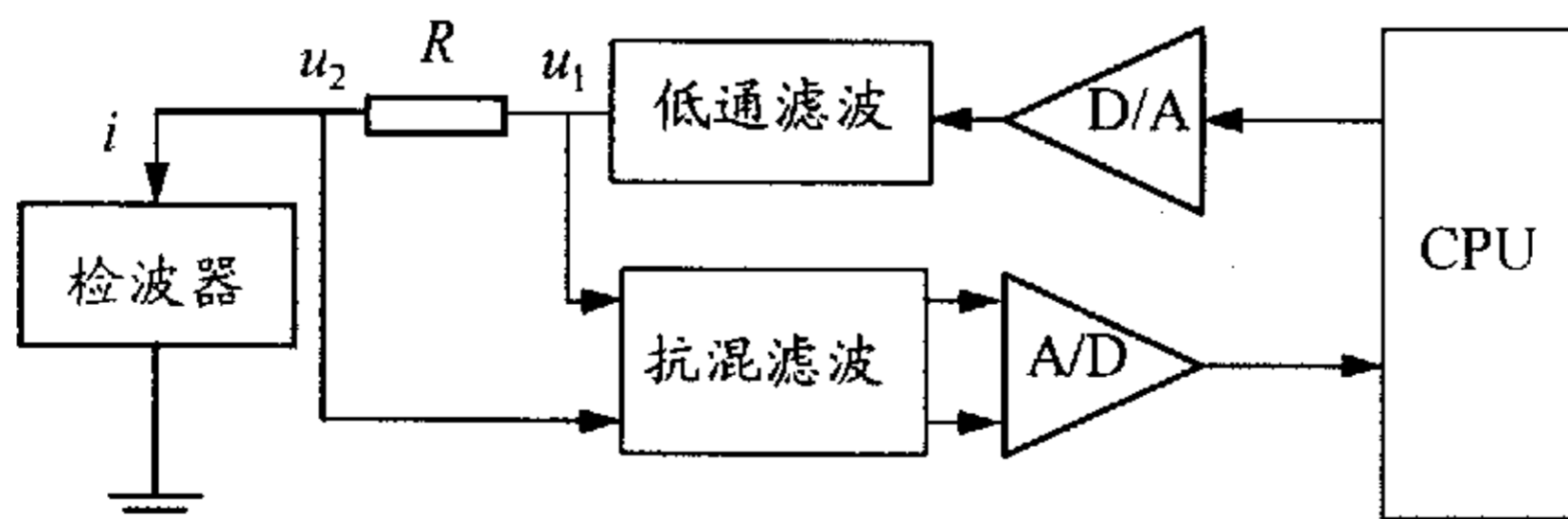


图 3-2 检波器复阻抗特性的测试系统

通过精密电阻两端的电压差可以求得检波器线圈回路中的电流，而检波器两端的电压为 u_2 。所以检波器的复阻抗特性为：

$$Q(s) = \frac{RU_2(s)}{U_1(s) - U_2(s)} \quad (3-7)$$

相应的复阻抗频率特性为：

$$Q(j\omega) = \frac{RU_2(j\omega)}{U_1(j\omega) - U_2(j\omega)} \quad (3-8)$$

复阻抗频率特性可以在对信号进行整周期采样后用FFT进行计算。在得到复阻抗频率特性在一系列频率点的值后，可以用系统辨识的方法得到系统的复阻抗特性。以下我们对传递函数的辨识方法进行讨论。

设系统的传递函数为：

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1s + \cdots + b_ms^m}{1 + a_1s + \cdots + a_ns^n} \quad (3-9)$$

对应的频率特性为：

$$G(j\omega) = \frac{b_0 + b_1(j\omega) + \cdots + b_m(j\omega)^m}{1 + a_1(j\omega) + \cdots + a_n(j\omega)^n} \quad (3-10)$$

记作：

$$G(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} \quad (3-11)$$

实测的频率特性为 $H(j\omega_i)$ $i=0, 1, \cdots, N-1$ 。

引入损失函数：

$$J = \sum_{i=0}^{N-1} |H(j\omega_i) - G(j\omega_i)|^2 = \sum_{i=0}^{N-1} \left| H(j\omega_i) - \frac{N(j\omega_i)}{D(j\omega_i)} \right|^2 \quad (3-12)$$

现在的问题是求使 J 达到最小的 a_i 和 b_i 。令：

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial a_i} &= 0 \quad i=1, 2, \cdots, n \\ \frac{\partial J}{\partial b_i} &= 0 \quad i=0, 1, \cdots, m \end{aligned} \quad (3-13)$$

就能得到由 $n+m+1$ 个方程组成的非线性方程组，解这个方程组就可以得到 a_i 和 b_i 的值。非线性方程组的解算非常麻烦，Levy将损失函数改为式(3-14)的形式，从而使式(3-13)成为线性方程组^[66-67]。解算此线性方程组就可以得到 a_i 和 b_i 的值。

$$J = \sum_{i=0}^{N-1} |H(j\omega_i)D(j\omega_i) - N(j\omega_i)|^2 \quad (3-14)$$

本文对XZ-4型(清华大学附属仪器厂生产)磁电检波器用Levy法进行了参数识别实验, 实验结果见表3-1。

表3-1 磁电检波器的标定结果

检波器参数	直流电阻(Ω)	固有频率(Hz)	阻尼比	灵敏度($V/m \cdot s^{-1}$)
标称值	780	10	0.6	200
垂直标定值	782.6	9.66	0.54	177.6
水平标定值	779.6	9.39	0.55	180.7

3.2 DP型传感器的计算机标定系统的构成

计算机标定系统是为了给出DP型传感器的幅相频率特性, 这不仅为了评估传感器的性能, 也是为进行信号恢复所必需。目前实验室中的标定系统(如图3-3所示)是由以下型号的部件构成:

- 低频振动台 : 自制
- 信号发生器 : XD5型超低频信号发生器
- 功率放大器 : GF20-2型直流功率放大器
- 激振器 : JZQ-2型
- 涡流传感器 : QH型
- 双踪存储示波器 : DSS6521

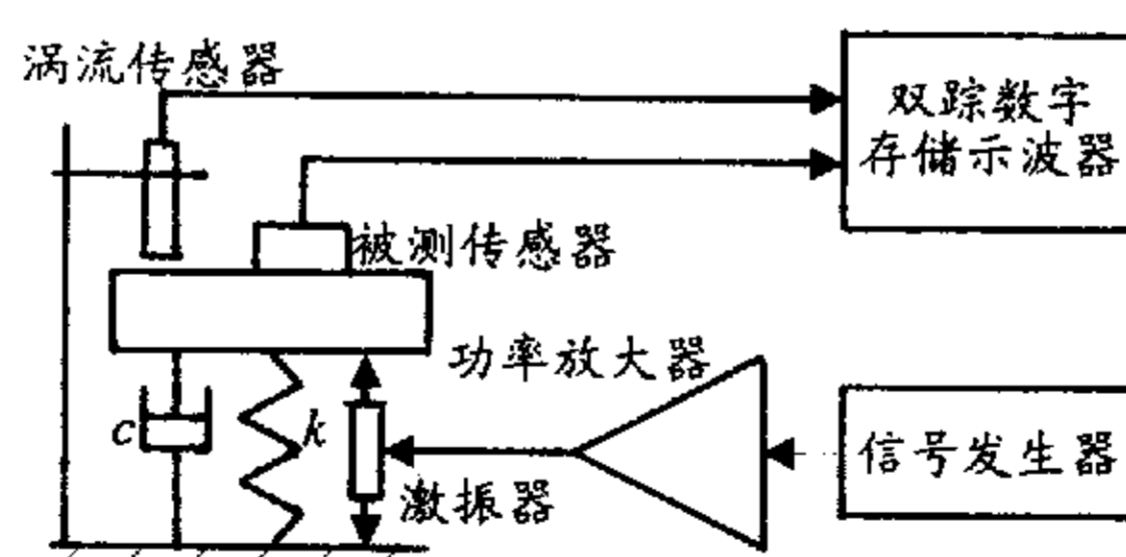


图 3-3 目前的 DP 型传感器标定系统

由于采用数字存储示波器读数, 可以较好地获得各频率点的输入、

输出幅值读数。通过李萨如图形或者输入输出波形的过零点时差，也可以估计其相位差值。但利用示波器上两个波形求相位差不仅费事，而且不够精确。本文采用计算机标定系统，即由计算机控制D/A、A/D，产生激振信号并且采集和处理传感器的输出信号，从而实现DP型传感器的幅相特性的标定。

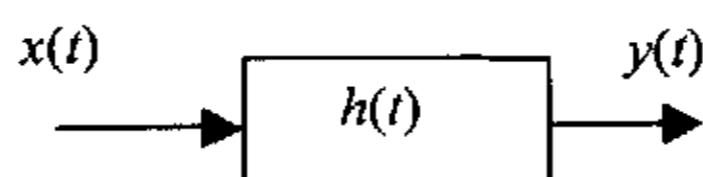


图 3-4 线性系统示意框图

一个线性系统可以由图3-4所示的框图表示。如果已知 $x(t)$ 和 $y(t)$ 而求 $h(t)$ ，这就是系统辨识问题。传感器动态特性的标定属于此类问题。

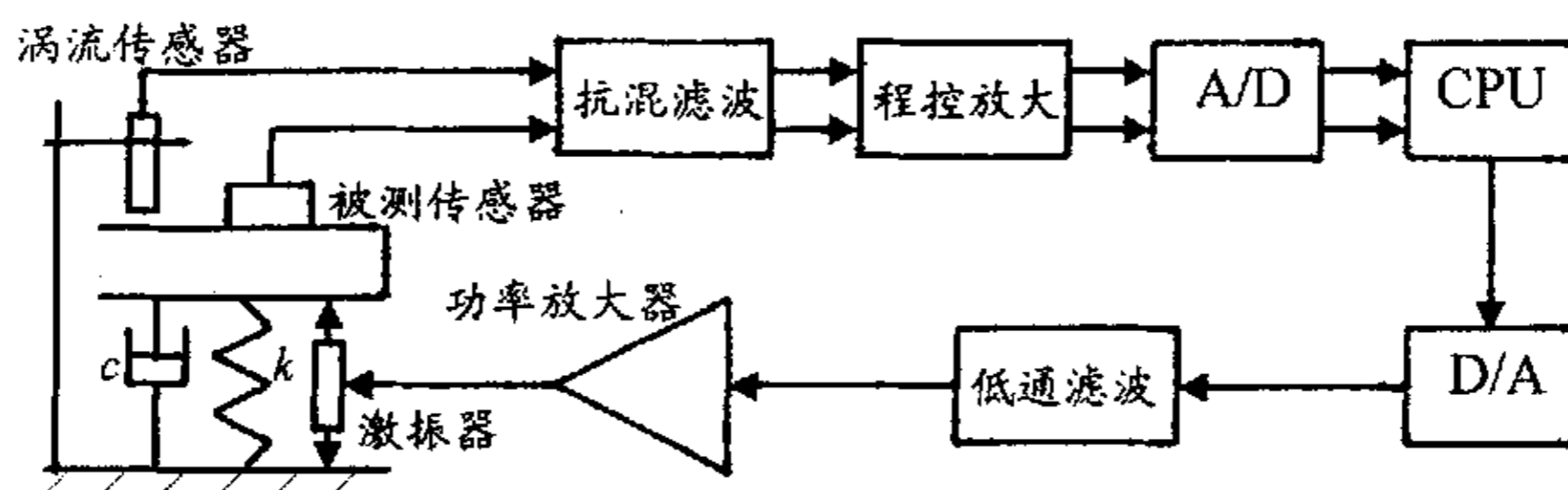


图 3-5 DP 传感器的计算机标定系统

地震式传感器的动态特性标定系统由图3-5所示。该系统中，振动台、功率放大器、激振器和涡流传感器的型号和以前的标定系统相同，A/D和D/A则采用研华公司的PCL-818，该型号的A/D板同时具有A/D和D/A的功能，都是12位的。

该系统针对CPU而言包括两个通道：输出通道和输入通道。输出通道包括D/A，低通滤波器和功率放大器。CPU产生的数字信号经过D/A转换成模拟信号。如果D/A的速度不够快，其输出将出现明显的台阶，低通滤波器可以消除信号中高频成分而使信号更加光滑。滤波后的信号经过功率放大器后推动振动台产生振动。传感器的输出由输入通道进入CPU。为了防止混叠，采样之前有抗混滤波器，程控放大器将信号放大到适合采样的幅度，尽量充分利用A/D的动态范围。

该系统将经过标定的涡流传感器的输出信号作为标准信号。由于涡流传感器是低通类型的传感器，在直流到数kHz的频段内幅值平坦，相

位滞后可以忽略, 因此可以认为它真实地反映了振动台的运动情况。但必须说明的是, 这种假设只有在低频的情况下才成立。因为涡流传感器是相对的测量方法, 当振动台的振动频率高时, 其振动将通过地面传递到涡流传感器的支架上, 从而使测量产生误差。涡流传感器和被测传感器的信号经过A/D进入计算机, 通过计算可以得到被测传感器的频率特性。

3.3 激振信号的选择

激振信号可以是周期信号, 也可以是随机信号。如果选择白噪声激励信号, 它包含各种频率成分, 可以快速地标定出传感器的特性。但选择白噪声激励, 在把信号进行截断的时候会带来泄漏而产生一定的误差。另外, 要使振动台产生白噪声振动是困难的。因为功率放大器和振动台都有一定的频率特性, 尤其是一般的振动台往往是小阻尼的, 在其固有频率处将产生共振。因此, 即使激振信号是白噪声, 振动台的振动也是以其固有频率为主要成分的有色噪声。对于激振信号强度不高的频段, 标定结果会有较大的误差。

采用正弦信号作为激励, 因为激振信号和采样都由同一计算机控制, 就可以实现整周期采样, 从而避免了泄漏。采用正弦信号也可以方便地控制振动台在特定频率成分下的振幅, 从而使信号具有较高的信噪比。其缺点是需要逐个频率点进行标定, 速度较慢。激振信号的另外的选择是多谐正余弦振动信号。利用多谐信号可以兼顾标定的速度和精度。

3.4 激励信号的产生与采样

在此标定系统中, 计算机同时充当了信号发生器和数据采集的功能。这在实际的工作中是很方便的。一方面省掉了信号发生器, 另一方面, 对于周期性的激励信号, 计算机能够精确地知道激励信号的周期, 实现整周期采样, 从而避免泄露带来的误差。

标定软件是在DOS下编制的。计算机中只有一个CPU, 要同时控制A/D和D/A的动作, 又要精确地控制A/D和D/A的频率, 普通的程序设计方法有一定的困难。本文采用定时器中断的方式实现此功能。

中断^[72-74]是现代计算机发展的一种重要技术。它的出现原是为克服

对I/O接口采用程序查询所带来的处理机低效率的弊病，以确保CPU在运行过程中能实时地对外部的中断请求予以响应。当外部设备对CPU发出中断请求时，CPU将暂停正在执行的指令，转到中断服务程序，即响应中断请求。当中断服务程序完成后，CPU将继续执行原来的指令。如果中断是由定时器发出的，它的中断服务程序是执行A/D或D/A的指令，那么就可以实现定时采样或发生波形。

标定系统中采用的A/D板的型号为PCL-818，是研华公司的产品。此种类型的A/D板同时具有A/D和D/A的功能。板上有定时器芯片，可以提供定时中断，并提供中断方式采样的驱动程序。

D/A所需要的定时中断则需要依靠计算机主板上的定时器芯片。PC机系列采用8253/8254可编程定时芯片。PC系列定时系统利用8253/8254的通道0计数器OUT0输出，定时提出日时钟中断请求，从而引发中断08H，以支持系统设置的日时钟。8253/8254的时钟频率为1.1931816MHz，经过一个16位的计数器分频后引发日时钟中断，即日时钟的中断频率为18.2Hz。通过修改分频计数器的数值可以精确地控制D/A的频率。

3.5 标定系统中的信号处理方法

如果振动台作简谐振动，振动频率为 f 。采样频率 f_s 应满足采样定理，在理想情况下，传感器的输出都应该只有一个频率成分 f ，那么 $f_s \geq 2f$ 就可以满足采样定理。但实际情况中总会有一定的噪声，振动台的非线性也会引起高次谐波，因此实际的采样频率的选择为 $f_s = 128f$ ，即每周周期采样128点。

将涡流传感器的输出信号 $x(t)$ 和被测传感器的输出信号 $y(t)$ 作整周期采样，得到 M 段数据 $x^{(i)}(n)$ 和 $y^{(i)}(n)$ $i=0, 1, 2, \dots, M-1$, $n=0, 1, \dots, N-1$ 。

$$X^{(i)}(k) = \text{DFT}[x^{(i)}(n)] \quad i=0, 1, 2, \dots, M-1$$

$$Y^{(i)}(k) = \text{DFT}[y^{(i)}(n)] \quad i=0, 1, 2, \dots, M-1$$

如果每段数据采样 l 个周期，则频率 f 对应第 l 根谱线

$$H^{(i)}(f) = \frac{Y^{(i)}(l)}{X^{(i)}(l)} \quad i=0, 1, 2, \dots, M-1 \quad (3-15)$$

$$H(f) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} H^{(i)}(f) \quad (3-16)$$

$H(f)$ 即为被标传感器的频率特性。此算法对振动台没有很高的要求,如果由于振动台的特性不好而引起波形畸变, DFT的过程实际上起到滤波器的作用,从而消除振动台特性的影响。采用多段平均的方法可以有效地消除噪声,提高标定精度。

表3-2给出一个DP型传感器的标定结果,该传感器的有关参数为:

型号: DPS-0.5-0.5

所用检波器:

固有频率:10Hz

校正电路设计参数:

固有频率:0.5Hz

阻尼比:0.6

积分时间常数: 0.5s

隔直时间常数: 2.2s

表 3-2 DPS-0.5-0.5 型传感器的频响特性

f/Hz	$ H(f) /\text{V}\cdot\text{mm}^{-1}$	$\varphi/(^{\circ})$
0.225	0.106	214.9
0.3375	0.202	158.8
0.50625	0.335	103.1
0.75938	0.420	65.6
1.13906	0.467	43.0
1.70859	0.501	28.2
2.56289	0.502	18.1
3.84434	0.500	10.9
5.7665	0.497	5.95
8.64976	0.493	2.42

3.6 DP型传感器的二阶模型参数

表3-2给出的DPS-0.5-0.5型传感器的幅、相频率响应特性完全可以描述传感器的性能,可直接用于信号恢复。

DP传感器用串联校正环节的零点与检波器的极点对消达到降低固

有频率的目的。在补偿电路中，积分环节用一阶惯性环节代替，而且为了防止直流和减小低频漂移，电路中还增加了两个隔直环节，这些环节将使DP传感器的特性偏离二阶高通特性。而且制造过程中的调节误差也使得零极点不能完全对消而对DP传感器的特性带来影响。但工业中习惯用一个相当的磁电式地震检波器表述，即认为它仍然是一个二阶高通环节，用固有频率阻尼比和灵敏度三个主要参数表述。我们采用式(3-17)所示的二阶高通模型用Levy法对表3-2的数据进行拟合。

$$H(s) = \frac{\alpha s^2}{s^2 + a_1 s + a_0} \quad (3-17)$$

结果为

$$a_0 = 12.99, a_1 = 4.76, \alpha = 0.498$$

所以该DP型传感器的参数为：

$$\text{固有频率} : f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{a_0} = 0.573 \text{ Hz}$$

$$\text{阻尼比} : \xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}} = 0.661$$

$$\text{灵敏度} : \alpha = 0.498 \text{ V/mm}$$

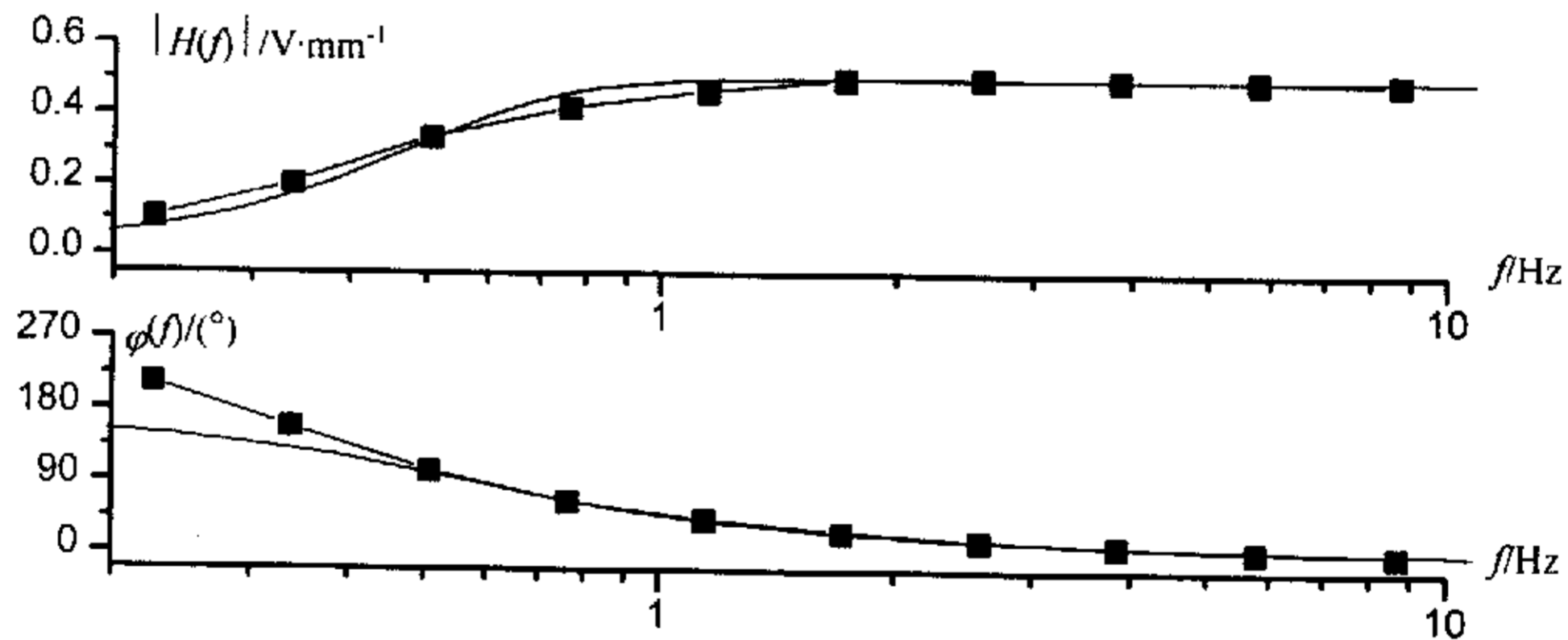


图 3-6 DP 传感器实际特性与辨识结果比较
(带标记线为实际特性，不带标记线为识别结果)

图3-6给出该DP型传感器的实际特性与辨识结果的比较。二者在高频段符合得很好，低频段则存在一定的偏差，这是积分和隔直环节的影响的表现。

3.5 本章小结

●磁电检波器具有可逆性，在线圈上通上电流，线圈在磁场中受电磁力的作用将产生运动。利用这一性质可以对磁电检波器的一些重要参数进行测定，而不需要振动台，实现了磁电检波器特性的在线检测。

●本章设计了DP传感器的标定系统。利用该系统可以标定DP传感器的幅频特性和相频特性。

●该系统利用周期信号作为激励，采用中断技术实现A/D和D/A的协调工作，实现了信号的整周期采样，从而避免了泄露带来的误差。采用多段平均的手段可以有效地消除噪声，提高标定精度。

●利用Levy法可以给出DP传感器的参数模型，实际的辨识结果表明，DP传感器在低频段与二阶高通特性有一定的差别。利用参数模型可以为DP传感器的设计提供指导作用，并检验调节精度。

第4章 大型结构动态特性测试

工程中比较典型的大型结构包括桥梁、高层建筑、海洋平台、坝体等。大型结构的质量巨大，其结构刚度和阻尼系数与其质量相比显得比较小，因此一般具有固有频率低、阻尼比小的特点。一些特殊的结构还具有振动模态密集的特点。结构的模态参数主要包括固有频率、阻尼比及振型。结构模态参数的测试有十分重要的意义^[75-76]，它一般用于以下几个方面：

1. 评估结构的设计和施工质量。
2. 评价结构的运行状态。
3. 研究其对自然灾害的响应特性和其在负载激励下的行为。

目前对结构模态参数的测试大体有三种实验方法：

1. 正弦激励：用激振器对结构激振，通过结构在不同频率下的响应求得结构的动力响应。

2. 阶跃激励：利用突然施压或突然卸载后结构的衰减振动曲线求得结构的模态参数。

3. 脉动法：结构所处的环境中存在各种各样的随机激励，如地脉动，风、水浪、车辆、行人等。结构对随机激励的响应包含有结构的模态参数的信息，利用数字信号处理的方法可以得到结构的模态参数。

前两种方法可以比较准确地确定结构的模态参数，但需要大型的激振设备，投资大，实验准备工作繁重，并受到具体条件的限制；脉动法比较经济、方便，但对测试系统和信号处理方法有较高的要求。

地脉动和风振等自然激励基本上是随机激励，能量集中在低频段，激励的功率谱类似有色噪声，各频段的分布并不均匀，但其带宽显著大于结构滤波器的带宽。所以对结构动态特性的测试而言，自然激励可视为白噪声激励。通常大型结构的低阶固有频率可能在 10^{-1} Hz的量级，自然激励的能量虽然集中在低频段，但是能量很弱。所以结构对自然激励的响应的测量属于低频微弱振动的测量。利用地脉动和环境自然激励测试结构动态特性要求：

1) 传感器有足够的灵敏度，特别是低频段灵敏度，以使低端测试信号有足够高的信噪比。结构响应的加速度可能在 10^{-5} g的量级。此外，传感器应有足够宽的频段和动态范围；

2) 信号处理技术必需保证能分离密集模态和较准确地测出小阻尼比；

3)传感器和测量系统应轻巧、可靠，适于野外使用。

高灵敏度的速度型DP传感器可以胜任这一测量任务。之所以选用速度型传感器，这是因为速度型传感器可以同时兼顾低阶和高阶模态。

本章主要讨论利用脉动法识别结构模态参数中用到的信号处理方法。

4.1 功率密度谱在模态参数识别中的作用

在脉动实验中，激励是随机信号，结构的响应也是随机信号。如果激励是平稳随机过程，那么结构的响应也是平稳随机过程，其自相关函数或不同测点响应的互相关函数是确定的信号，它们的傅里叶变换分别是自功率密度谱和互功率密度谱函数。功率谱分析是随机信号分析中重要的分析手段。

$x_a(t)$ 、 $y_a(t)$ 是两个连续的平稳随机过程，它们的互相关函数定义为：

$$R_{xy}^a(\tau) = E[x_a(t)y_a(t+\tau)] \quad (4-1)$$

$x_a(t)$ 、 $y_a(t)$ 的互相关函数和互功率密度谱为一对傅里叶变换对：

$$S_{xy}^a(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}^a(\tau)e^{-j\Omega\tau}d\tau \quad (4-2a)$$

$$R_{xy}^a(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}^a(\Omega)e^{j\Omega\tau}d\Omega \quad (4-2b)$$

当两个信号相同时，互相关函数和互功率密度谱函数就分别变为自相关函数和自功率密度谱函数。

$$S_{xx}^a(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}^a(\tau)e^{-j\Omega\tau}d\tau \quad (4-3a)$$

$$R_{xx}^a(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}^a(\Omega)e^{j\Omega\tau}d\Omega \quad (4-3b)$$

相干函数定义为：

$$\gamma_{xy}^a(\Omega) = \sqrt{\frac{|S_{xy}^a(\Omega)|^2}{S_{xx}^a(\Omega)S_{yy}^a(\Omega)}} \quad (4-4)$$

● 自功率密度谱：

自谱中不含有相位信息，只包含幅值信息。由于大型结构一般表现为小阻尼特性，所以自功率密度谱在固有频率处有较高的幅值。利用自功率密度谱可以确定模态振型各测点间的幅值关系。

● 互功率密度谱：

互谱中不但有幅值信息，还反映测点间的相位关系。在固有频率处，互谱除了具有比较高的幅值之外，还具有比较平坦的相位，并且在 0° 或 180° 附近。结合自谱的幅值和互谱的相位关系，可以得到模态的振型。

● 相干函数

结构各个点的振动在固有频率处有固定的幅值和相位关系，因此在固有频率处有比较高的相干函数。影响相干函数的一个因素是测量噪声。由于测量噪声是完全随机的，因此使相干函数下降。DP传感器的噪声主要表现为低频漂移，因此将影响到低频段的相干函数。影响相干函数的另外一个因素就是测点间的距离。如果两个测点的距离比较远，则除了模态固有频率处之外，其他的频率成分的相干函数都会比较低；如果两个测点的距离很近，在非固有频率处仍然可以有高的相干函数。相干函数为结构固有频率的判定提供进一步的检验信息。

结构的固有频率在功率密度谱上一般有以下特点：

1. 自谱和互谱幅值出现尖峰
2. 互谱相位比较平坦，并且在 0° 或 180° 附近。
3. 有比较高的相干函数。

利用功率密度谱的这些特点，可以比较可靠地确定大型结构的模态参数。

4.2 连续信号与数字信号的频域联系

实际工程中的信号一般为连续信号，要经过采样转换成数字信号后才能由计算机进行处理，那么有必要建立连续信号和数字信号之间的联系。

模拟信号 $x_a(t)$ 的傅里叶变换表示式为：

$$X_a(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j\Omega t} dt \quad (4-5a)$$

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \quad (4-5b)$$

数字信号 $x(n)$ 是由模拟信号采样得到的， $x(n)=x_a(nT_s)$ ，其傅里叶变换表示式为：

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad (4-6a)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{j\omega n} d\omega \quad (4-6b)$$

为了建立 $X_a(\Omega)$ 和 $X(\omega)$ 之间的联系, 建立 $x_a(t)$ 的脉冲采样信号 $\hat{x}_a(t)$:

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \quad (4-7)$$

则其傅里叶变换为:

$$\begin{aligned} \hat{X}_a(\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}_a(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) e^{-j\Omega t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) \delta(t - nT_s) e^{-j\Omega t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_s) e^{-j\Omega nT_s} \end{aligned}$$

$$\text{即 } \hat{X}_a(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega nT_s} \quad (4-8)$$

比较式(4-8)与式(4-6a)得到:

$$\hat{X}_a(\Omega) = X(\Omega T_s) \quad (4-9)$$

另一方面, 由于 $\hat{x}_a(t)$ 是 $x_a(t)$ 与采样脉冲序列的乘积, 它们的傅里叶变换满足卷积关系, 即

$$\hat{X}_a(\Omega) = \frac{1}{T_s} X_a(\Omega) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2k\pi/T_s) \quad (4-10)$$

在满足采样定理的条件下, 有

$$\hat{X}_a(\Omega) = \frac{1}{T_s} X_a(\Omega) \quad -\pi/T_s \leq \Omega \leq \pi/T_s \quad (4-11)$$

综合式(4-9)和式(4-11)得到:

$$X_a(\Omega) = T_s X(\Omega T_s) \quad -\pi/T_s \leq \Omega \leq \pi/T_s \quad (4-12)$$

写成用 $f = \Omega/2\pi$ 表示的形式为:

$$X_a(2\pi f) = X(2\pi f / f_s) / f_s \quad -f_s/2 \leq f \leq f_s/2 \quad (4-13)$$

式(4-12)和式(4-13)就是在满足采样定理的条件下模拟信号的傅里叶变换与数字信号傅里叶变换的关系, 这个关系揭示了模拟信号与数字信号的频域联系, 这样就可以用数字信号处理的结果反映模拟信号的性质。下面进一步说明模拟信号的功率密度谱与数字信号的功率密度谱的联系。

离散随机过程 $x(n)$ 和 $y(n)$ 是通过连续随机过程取样获得的, 即:

$$x(n)=x_a(nT_s) \quad y(n)=y_a(nT_s)$$

$x(n)$ 和 $y(n)$ 的互相关函数定义为:

$$R_{xy}(m) = E[x(n)y(n+m)] \quad (4-14)$$

$x(n)$ 、 $y(n)$ 的互相关函数和互功率密度谱同样为一对傅里叶变换对:

$$S_{xy}(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{xy}(m)e^{-j\omega m} \quad (4-15a)$$

$$R_{xy}(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{xy}(\omega)e^{j\omega m} d\omega \quad (4-15b)$$

$R_{xy}(m)$ 和 $R_{xy}^a(t)$ 的关系为:

$$\begin{aligned} R_{xy}(m) &= E[x(n)y(n+m)] \\ &= E[x_a(nT_s)y_a(nT_s+mT_s)] \\ &= R_{xy}^a(mT_s) \end{aligned}$$

所以 $R_{xy}(m)$ 是 $R_{xy}^a(t)$ 的采样信号, 如果满足采样定理, 根据式(4-13)有:

$$S_{xy}^a(2\pi f) = S_{xy}(2\pi f / f_s) / f_s \quad -f_s/2 \leq f \leq f_s/2 \quad (4-16)$$

式(4-16)就是连续随机过程与离散随机过程的功率密度谱之间的联系。

由式(4-3b)知道

$$R_{xx}^a(0) = E[x^2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}^a(\Omega) d\Omega \quad (4-17)$$

因此, $S_{xx}^a(\Omega)$ 下的面积正比于信号的平均功率, 由于这个缘故, 人们称 $S_{xx}^a(\Omega)$ 为功率密度谱。写成用 $f = \Omega / 2\pi$ 表示的形式:

$$R_{xx}^a(0) = E[x^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}^a(2\pi f) df \quad (4-18)$$

在满足采样定理的条件下, 令

$$P_{xx}(f) = S_{xx}^a(2\pi f) = S_{xx}(2\pi f / f_s) / f_s \quad -f_s/2 \leq f \leq f_s/2 \quad (4-19)$$

$$P_{xy}(f) = S_{xy}^a(2\pi f) = S_{xy}(2\pi f / f_s) / f_s \quad f_s/2 \leq f \leq f_s/2 \quad (4-20)$$

则
$$E[x^2(t)] = \int_{-f_s/2}^{f_s/2} P_{xx}(f) df \quad (4-21)$$

在符合采样定理的情况下, $P_{xx}(f)$ 反映了信号的功率在频域的分布情况, 使用 $P_{xx}(f)$ 和 $P_{xy}(f)$ 更易于工程理解, 在本章的实验中功率谱估计的结果也都表示为 $P_{xx}(f)$ 和 $P_{xy}(f)$ 的形式。

一般的数字信号处理文献只讨论数字信号的功率谱估计方法, 而在实际的工程中却想知道模拟信号的功率谱的情况, 建立了如式(4-16)所表达的模拟信号和数字信号的功率密度谱的联系之后, 就可以利用数字信号处理的结果来了解模拟信号的情况。

在下一节中, 我们将讨论数字信号的功率谱估计方法。

4.3 功率密度谱估计方法

功率谱估计有许多专著作了详细的介绍, 这里只给出韦尔奇方法^[80-82](Welch method)的计算公式。设有两个平稳的离散随机过程信号 $x(n)$ 和 $y(n)$, 记录的数据分成相互重叠的 K 段, 记为 $x^{(i)}(n)$, $y^{(i)}(n)$, 每段长度为 N , 则韦尔奇方法功率谱估计的公式为:

$$X^{(i)}(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x^{(i)}(n)w(n)e^{-j\omega n} \quad i=0, 1, \dots, K-1 \quad (4-22a)$$

$$Y^{(i)}(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} y^{(i)}(n)w(n)e^{-j\omega n} \quad i=0, 1, \dots, K-1 \quad (4-22b)$$

$$U = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} w^2(n) \quad (4-23)$$

自谱:

$$S_{xx}^w(\omega) = \frac{1}{KU} \sum_{i=0}^{K-1} |X^{(i)}(\omega)|^2 \quad (4-24a)$$

$$S_{yy}^w(\omega) = \frac{1}{KU} \sum_{i=0}^{K-1} |Y^{(i)}(\omega)|^2 \quad (4-24b)$$

互谱:

$$S_{xy}^w(\omega) = \frac{1}{KU} \sum_{i=0}^{K-1} \bar{X}^{(i)}(\omega) \cdot Y^{(i)}(\omega) \quad (4-25)$$

相干函数:

$$\gamma_{xy}^w(\omega) = \sqrt{\frac{|S_{xy}^w(\omega)|^2}{S_{xx}^w(\omega)S_{yy}^w(\omega)}} \quad (4-26)$$

$S_{xx}^w(\omega)$ 的期望值为:

$$E[S_{xx}^w(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{xx}(\theta) W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \quad (4-27)$$

式中

$$W(e^{j\omega}) = \frac{1}{NU} \left| \sum_{n=0}^{N-1} w(n) e^{-j\omega n} \right|^2 \quad (4-28)$$

如果 $x(n)$ 的各个数据段互不重叠的话, 则:

$$\text{var}[S_{xx}^w] \approx \frac{1}{K} P_{xx}^2(\omega) \quad (4-29)$$

韦尔奇方法是渐近无偏一致估计。

4.4 功率谱估计计算中的一点考虑

值得注意的一点是, 功率密度谱是一个连续函数, 在实际的计算过程中只能计算有限个频率点上的数值。韦尔奇方法常采用快速傅里叶变换(FFT)进行计算。如式(4-30)所示

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) w(n) e^{-j\frac{2k\pi}{N}n} \quad (4-30)$$

比较式(4-30)和式(4-22)可知, 利用FFT计算的第 k 根谱线对应的是 $\omega=2k\pi/N$ 的取值, 功率密度谱在其他频率点的取值无法直接用FFT得到, 这就是所谓的栅栏效应。在实际工程中, 功率谱的峰值位置一般不会与取样点重合, 从而影响对固有频率的估计精度。以下措施可以克服FFT的栅栏效应:

1. 对数据进行补零。对原数据补零后, 数据长度变为原来的 M 倍, 则频域中的采样密度也变为原来的 M 倍。此方法要求计算大数据量的FFT, 对计算机的容量有较高的要求。

2. 利用广义DFT。广义的DFT如(4-31)所示:

$$X(k, \alpha) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)w(n)e^{-j\omega n} e^{-j\frac{2k\pi}{N}n} \quad (4-31)$$

广义的DFT在原数据上乘以一个因子 $e^{j\alpha n}$, 然后再作DFT。一般 α 在0到 $2\pi/N$ 之间取值。广义的DFT仍可以用FFT的工具进行计算, 得到在频率 $\omega=2k\pi/N+\alpha$ 上的一系列数值。取不同的 α 值可以得到不同的系列。

3. 直接计算。利用式(4-22)可以直接计算任意频率点上的数值。此方法对计算机的内存要求很低, 但抛弃了FFT的计算工具, 计算量非常大。上面两种方法得到整个频段的数据, 而实际工程中往往只关心固有频率附近的狭窄频段, 因此可以先用FFT进行粗略计算, 再用此方法对感兴趣的频段仔细计算。

4.5 窗函数对功率密度谱估计的影响

在上一节中提到, 可以用许多方法实现对任意频率点的计算, 但这并不意味着谱估计的频率分辨率的提高, 频率分辨率受到窗函数的影响。计算机的容量是有限的, 必须对无限长度的时域信号用窗函数进行截断, 这就使利用有限长度数据作出的功率密度谱估计与信号的真实功率密度谱产生偏差。由式(4-27)可知, 功率密度谱的韦尔奇估计方法的期望值是真实值与窗函数卷积的结果。当信号频谱中含有窄的尖峰时, 如果窗函数不够长, 此尖峰的能量就会泄露到其他谱线上, 在视觉上的表现为谱估计要比实际的尖峰来得胖, 使频率分辨力下降, 这也是谱估计有偏性的表现。

几种常用的窗函数由下列各式定义^[81-82]:

矩形窗:

$$w(n)=1 \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (4-32a)$$

巴特利(Bartlett)窗(三角形窗):

$$w(n) = \begin{cases} \frac{2n}{N-1}, & 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{N-1}, & \frac{N-1}{2} \leq n \leq N-1 \end{cases} \quad (4-32b)$$

汉宁(Hanning)窗:

$$w(n) = \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{2n\pi}{N-1}\right) \right], \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (4-32c)$$

哈明(Hamming)窗:

$$w(n) = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2n\pi}{N-1}\right), \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (4-32d)$$

布莱克曼(Blackman)窗:

$$w(n) = 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2n\pi}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4n\pi}{N-1}\right), \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (4-32e)$$

它们的时域波形在图4-1中给出。

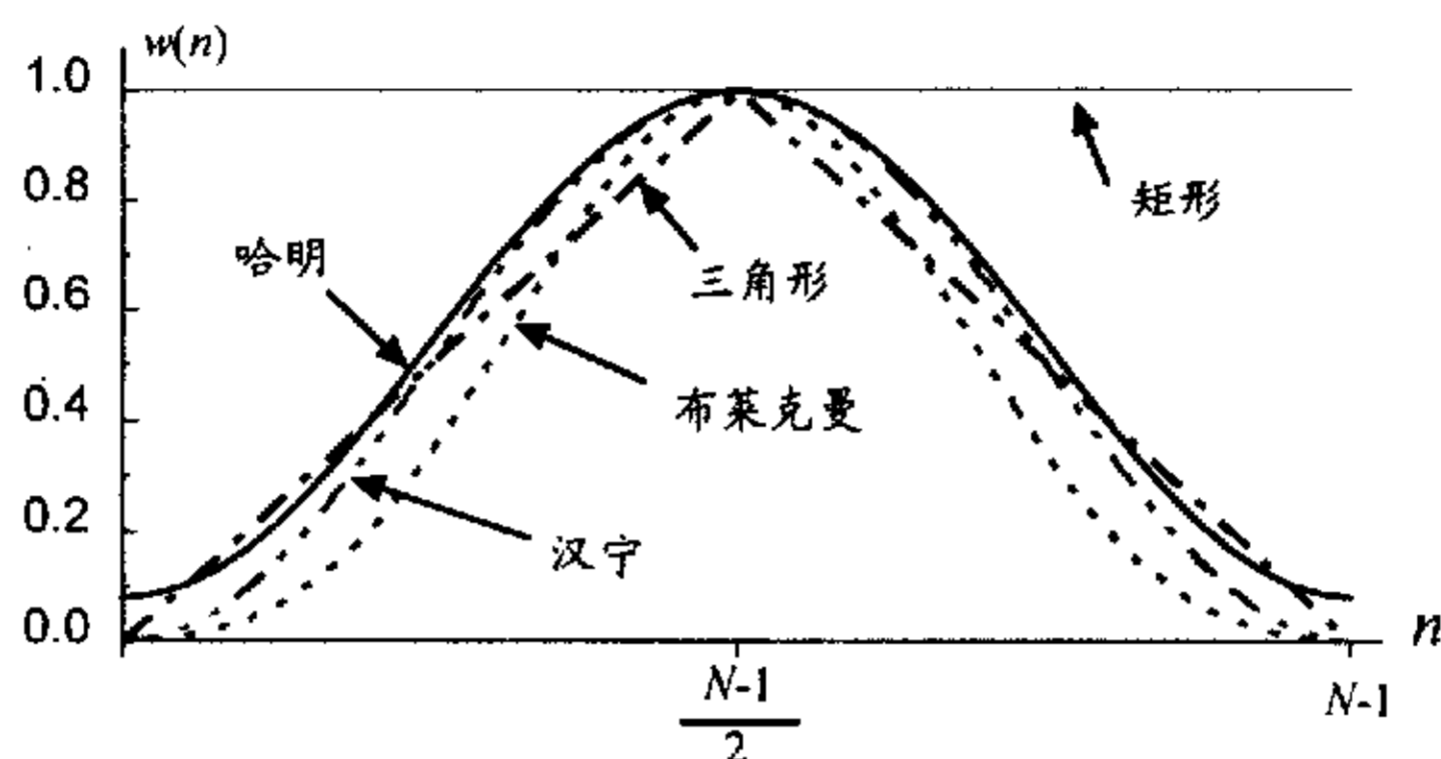
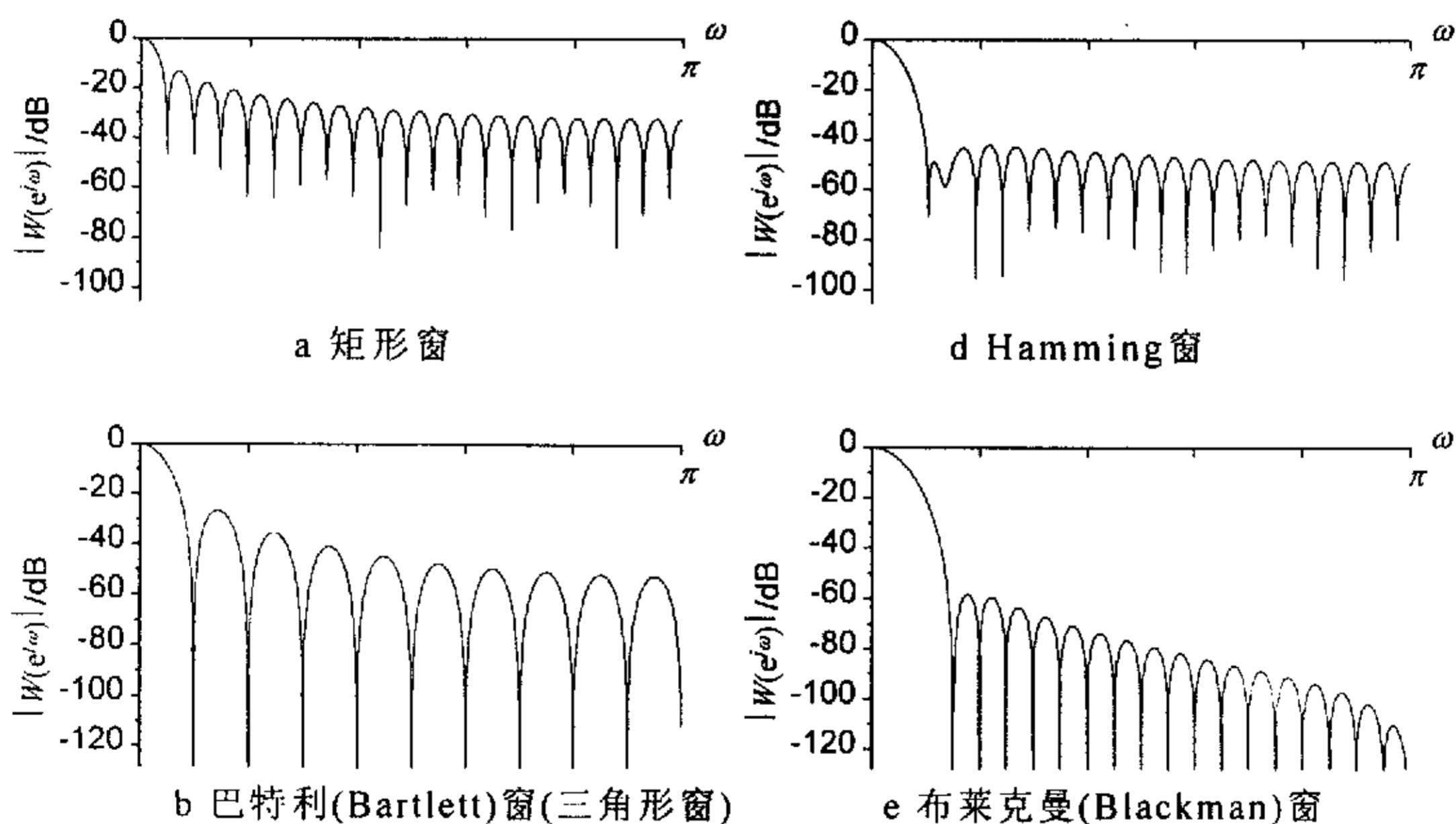


图 4-1 几种常用的窗函数

图4-2给出几种常用窗函数的傅里叶变换的分贝值。



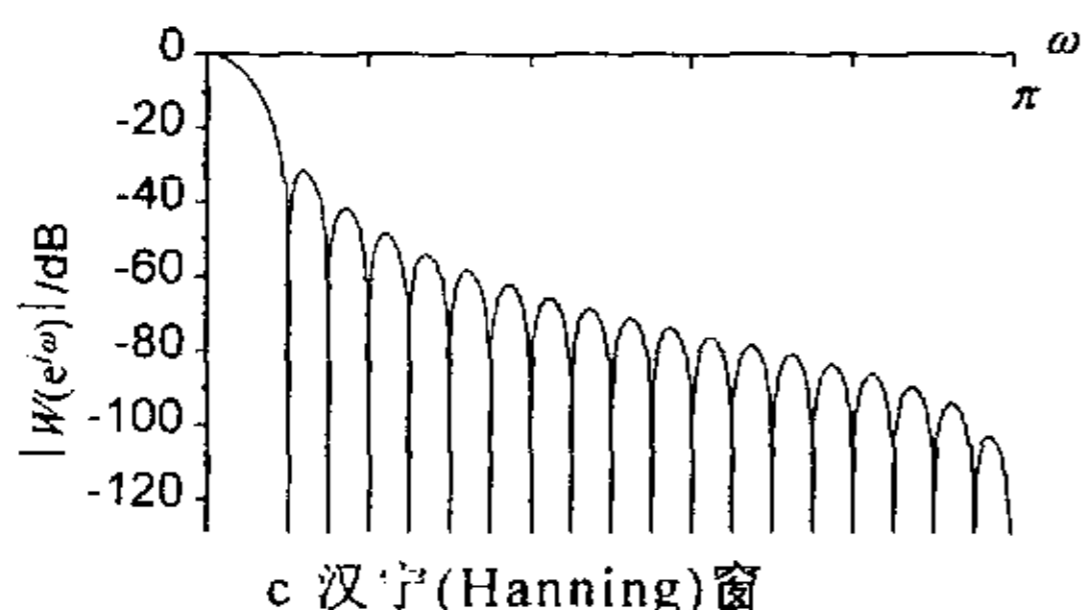


图 4-2 几种常用窗函数的傅里叶变换

虽然矩形窗的主瓣最窄，但它的第一旁瓣只比主峰低约13.5分贝，而且以后衰减也很慢—第三旁瓣才衰减到-20dB(%10)左右。布莱克曼窗的第一旁瓣就降到-60dB，但主瓣的宽度却是矩形窗的3倍。可以用ndB宽度来衡量窗函数的好坏，ndB宽度就是指这样一个最小宽度，在超出此宽度之外窗函数的幅值都在ndB以下。表4-1给出几种窗函数的宽度比较，当窗函数的ndB宽度大于主瓣宽度时不再写出。为了符合工程中的习惯，表中的数据用窗的时间长度 T 的形式给出。在几种常用的窗函数中，哈明窗具有最窄的-30dB宽度和-40dB宽度，因此哈明窗是工程应用中性质较好的窗函数。

表 4-1 几种窗函数的宽度比较

	矩形窗	三角形窗	汉宁窗	哈明窗	布莱克曼窗
主瓣宽度	$2/T$	$4/T$	$4/T$	$4/T$	$6/T$
-20dB宽度	-	$3/T$	$3.3/T$	$3.1/T$	$3.9/T$
-30dB宽度	-	-	$3.7/T$	$3.6/T$	$4.6/T$
-40dB宽度	-	-	-	$3.9/T$	$5/T$

-:大于主瓣宽度

谱估计的主要困难在于识别谱中的尖峰。大型结构表现为小阻尼特性，它对随机激励的响应信号的功率谱必然有尖峰存在，因此确定数据处理的窗长具有实际的工程意义。谱窗虽然使尖峰变胖，但并不影响最高点所在的位置，所以在结构固有频率的识别中，如果结构有多阶模态，只要谱窗的主瓣宽度小于结构相邻固有频率的最小间隔即可。按照这个原则可以知道，如果选择哈明窗或汉宁窗，窗的长度应满足以下的要求：

$$T \geq \frac{4}{\min |f_{0,i} - f_{0,i-1}|} \quad (4-33)$$

式中, $f_{0,i}$ 是结构的第 i 阶固有频率, $f_{0,i-1}$ 是结构的第 $i-1$ 阶固有频率。

4.6 大型结构阻尼比的确定

系统的阻尼比可以由系统的频率响应特性求出。在脉动实验中, 由于激励信号是未知的, 因此无法得到结构的频率响应特性。然而, 对于小阻尼系统, 由于系统的半功率带宽非常窄, 在这样一个窄带里, 可以认为对结构的激励具有白噪声的性质, 由于系统的输入输出满足下面的关系:

$$S_{yy}(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_{xx}(\omega) \quad (4-34)$$

对于白噪声输入, $S_{xx}(\omega) = C$, C 为常数, 所以 $S_{yy}(\omega) = C|H(j\omega)|^2$, 因而不必知道结构的频率特性, 而使用结构的响应信号来求得系统的阻尼比。

4.6.1 半功率带宽法

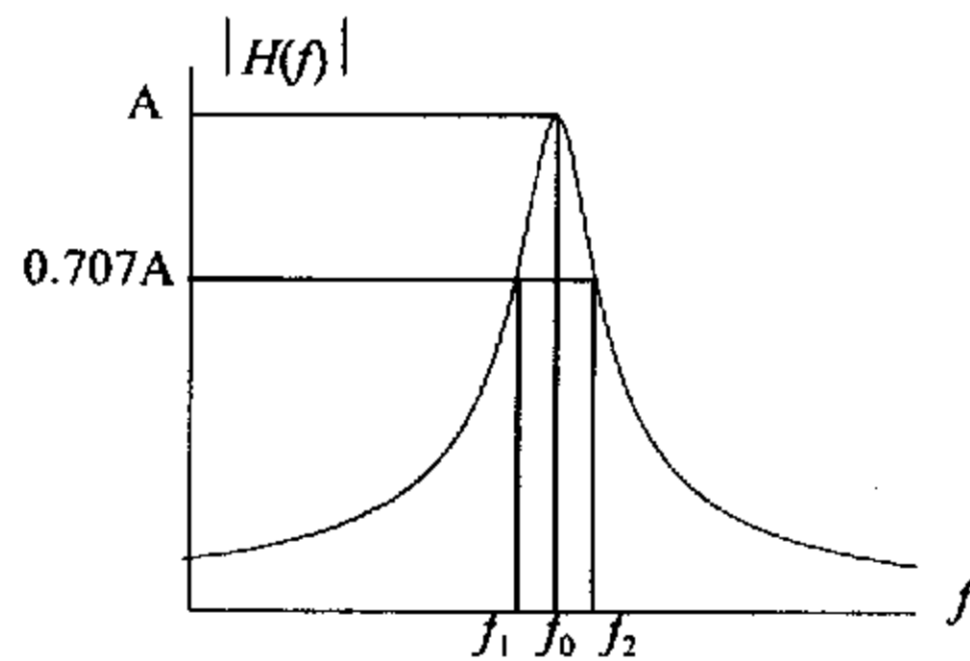


图4-3 半功率带宽法示意图

半功率带宽法是频域中最常用的求阻尼的方法^[84]。一个二阶系统, 其幅值频响特性如图4-3所示, 若 f_1 、 f_2 是功率谱上的谐振频率附近的两个半功率点, 即幅值谱上峰值的0.707处, 则阻尼比的半功率带宽法的计算公式为:

$$\xi = \frac{f_2 - f_1}{2f_0} = \frac{\Delta f}{2f_0} \quad (4-35)$$

式中, $\Delta f = f_2 - f_1$

从式(4-35)可以看到, Δf 的精度直接决定了计算结果的精度, 因此, 准确地确定半功率带宽成了此方法中的关键因素。

如上一节所述, 谱窗使谱估计的频率分辨力下降。为了清楚地观察谱窗对阻尼比计算精度的影响, 我们用仿真数据对算法进行验证。

一个二阶低通滤波器的传递函数如式(4-36)所示

$$H(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2} \quad (4-36)$$

该滤波器的参数为 $\omega_0 = 2\pi f_0$, $f_0 = 0.5\text{Hz}$, $\xi = 0.01$, 可以知道, 该系统的半功率带宽为 $\Delta f = 2\xi f_0 = 0.01\text{Hz}$ 。

将该系统离散化后, 用白噪声去激励该它, 得到系统的响应。其中的一段如图4-4所示。

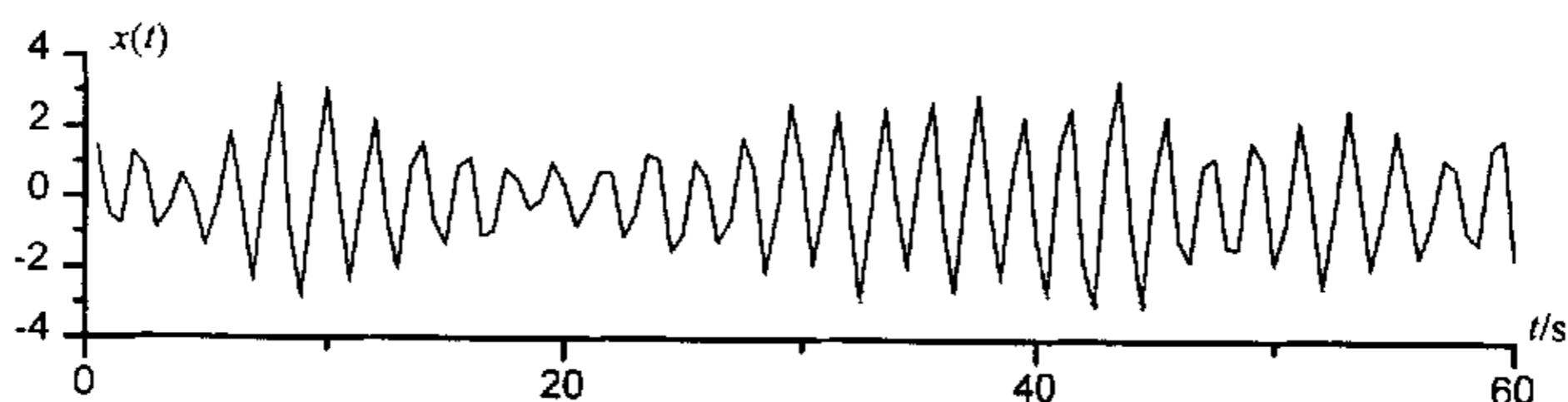


图 4-4 仿真系统在白噪声激励下响应的一段时域波形

用 Welch 方法对响应信号进行谱估计, 采用的是哈明窗。图4-5给出采用不同窗长的谱估计结果。

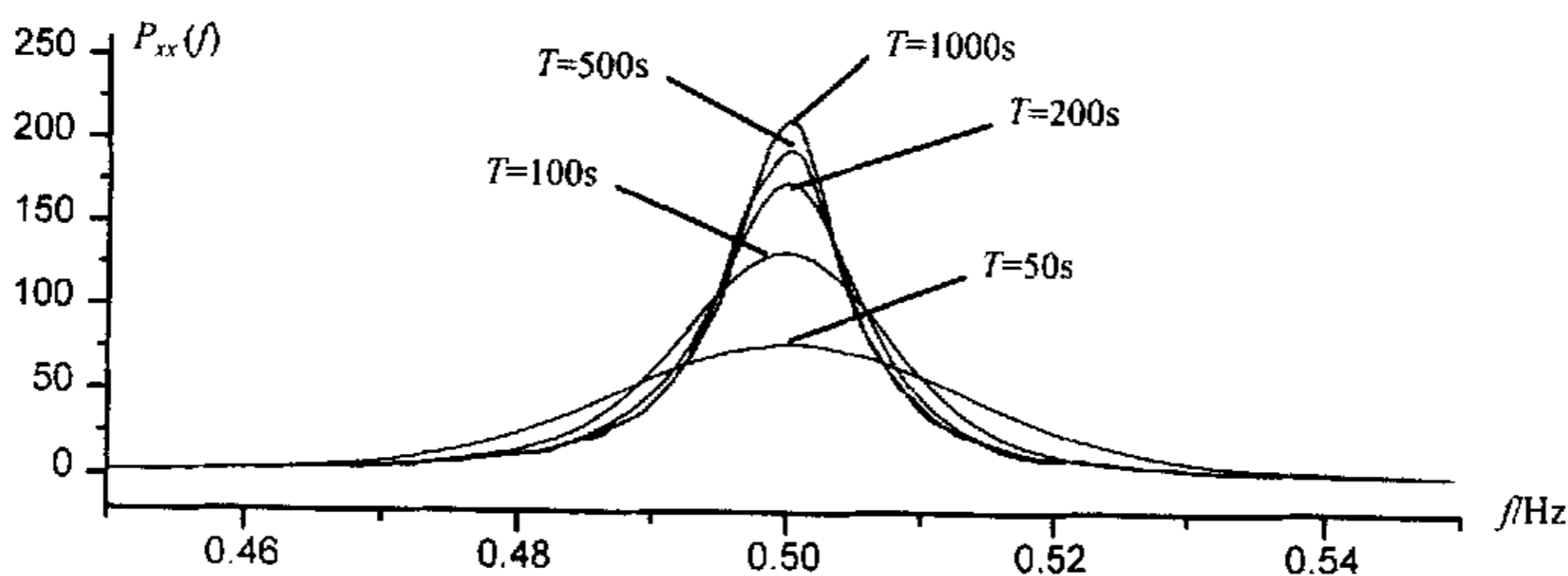


图 4-5 对仿真数据采用不同窗长(哈明)的 Welch 方法的估计结果

随着窗的长度的增加, 谱峰的宽度在逐渐变窄, 表4-2给出不同窗长度对阻尼比估计(半功率带宽法)的影响:

表 4-2 窗长度(哈明窗)对阻尼比估计精度的影响

窗长度 $T(\text{s})$	50	100	200	500	1000
窗主瓣宽度(Hz)	0.08	0.04	0.02	0.008	0.004
半功率带宽 $\Delta f(\text{Hz})$	0.0316	0.0187	0.0130	0.0110	0.01024
ξ 估计值	0.0316	0.0187	0.0130	0.0110	0.01024
估计相对误差(%)	216	87	30	10	2.4

从上表可以看到, 当窗长度达到1000s时, 主瓣宽度相当于半功率带宽的1/2~1/3, 泄露造成的误差才达到工程可以接受的范围。由此可以给出在采用哈明窗的情况下, 利用半功率带宽法估计阻尼比的经验窗长判据:

$$T \geq (4 \sim 5) / \xi f_0 \quad (4-37)$$

4.6.2 拟合方法

半功率带宽法在实际应用中比较简单、方便, 但却是一个比较粗糙的方法, 因为它只用到少量的信息, 所以精度比较差。如果得到的自功率密度谱不够光滑, 如何确定半功率带宽也成为一件棘手的问题。而采用拟合的方法可以比较精确地确定阻尼比。

设结构的某阶模态用一个低通滤波器模拟, 其幅度平方函数为:

$$S(\omega) = |H(j\omega)|^2 = \frac{C}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega_0^2 \omega^2 \xi^2} \quad (4-38)$$

也可以用带通滤波器来模拟, 在小阻尼的情况下差别不大。为了叙述方便, 设 $A(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2)^2$, $B(\omega) = 4\omega_0^2 \omega^2$, 于是

$$S(\omega) = \frac{C}{A(\omega) + B(\omega)\xi^2} \quad (4-39)$$

我们得到 $S(\omega)$ 在 ω_k 的一系列测量值 P_k , 令损失函数 L' 为

$$L' = \sum_{k=1}^N [P_k - S(\omega_k)]^2 \quad (4-40)$$

由方程组

$$\begin{aligned}\frac{\partial L'}{\partial C} &= 0 \\ \frac{\partial L'}{\partial \xi^2} &= 0 \\ \frac{\partial L'}{\partial \omega_0^2} &= 0\end{aligned}\quad (4-41)$$

可以得到系统的固有频率和阻尼比。但 L' 的分母中含有未知数，所以上式是非线性方程组，为了方便计算，可以将损失函数改为：

$$L = \sum_{k=1}^N [P_k [A(\omega_k) + B(\omega_k)\xi^2] - C]^2 \quad (4-42)$$

将 L 对 ω_0^2 求偏微仍然是 ω_0^2 的非线性函数，由于 ω_0 可以比较精确地从峰值点估计出来，所以将 ω_0 看作是已知的，于是得到线性方程组：

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial C} &= 0 \quad \sum_{k=1}^N P_k B(\omega_k) \xi^2 - NC = -\sum_{k=1}^N P_k A(\omega_k) \\ \frac{\partial L}{\partial \xi^2} &= 0 \quad \sum_{k=1}^N P_k^2 B^2(\omega_k) \xi^2 - \sum_{k=1}^N P_k B(\omega_k) C = -\sum_{k=1}^N P_k^2 A(\omega_k) B(\omega_k)\end{aligned}\quad (4-43)$$

解算上面的线性方程组，就可以得到结构的阻尼比。

为了比较拟合方法对半功率带宽法的优越性，用同样的数据，分别用两种方法对阻尼比进行估计，得到表4-3。

表 4-3 拟合法与半功率带宽法的比较

窗长度(哈明)(s)	50	100	200	350	500
带宽法估计的 ξ	0.0316	0.0187	0.0130	0.0116	0.0110
带宽法误差(%)	216	87	30	16	10
拟合法估计的 ξ	0.0272	0.01438	0.01089	0.01027	0.009979
拟合法误差(%)	172	43.8	8.9	2.7	0.21

由结果可以看到，采用拟合的方法可以大大提高阻尼比的估计精度，因为拟合方法比较充分地利用信息，可以部分地消除窗函数带来的误差，对窗长度的要求也放松了，这在实际工程中由非常重要的意义，在要求同等精度的情况下，利用拟合方法可以大大缩短实验时间。利用拟合方法对窗

长度要求的经验公式可以降低为：

$$T \geq (1.5 \sim 2) / \xi f_0 \quad (4-44)$$

实际工程中，如果能对结构有一定的先验知识，则可以事先确定数据窗的长度。如果没有这样的先验知识，可以先选一个窗长度进行计算，然后逐次加长窗长度，直到半功率带宽不再明显减小为止。

4.7 实验

南盘江铁路桥^[85]位于广西省百色地区，是南昆线上的一座重要的铁路桥梁。它横跨两山之间，最高的桥墩高达94m，被誉为“神州第一桥”。1997年5月29日，在正式通车之前，铁道科学院桥梁室与清华大学精仪系合作，利用地脉动和环境自然振动，对该桥进行了自振特性测试。实验用传感器为清华大学精仪系研制的速度类型的DP低频绝对振动传感器，固有频率为0.35Hz，灵敏度为10V/(mm·s⁻¹)。此外，实验中还采用了日本Kyowa公司的ASQ-BL型伺服加速度传感器。

南盘江铁路桥梁简介：

南盘江大桥的梁体为钢筋混凝土连续梁结构。5#、6#、7#墩都采用了V型支撑，其中6#墩最高，为90m左右；5#和7#墩略矮。5#、6#及6#、7#之间跨度为90m，4#、5#及7#、8#之间跨度为54m。为了方便说明，建立该桥的坐标系如图4-6所示。

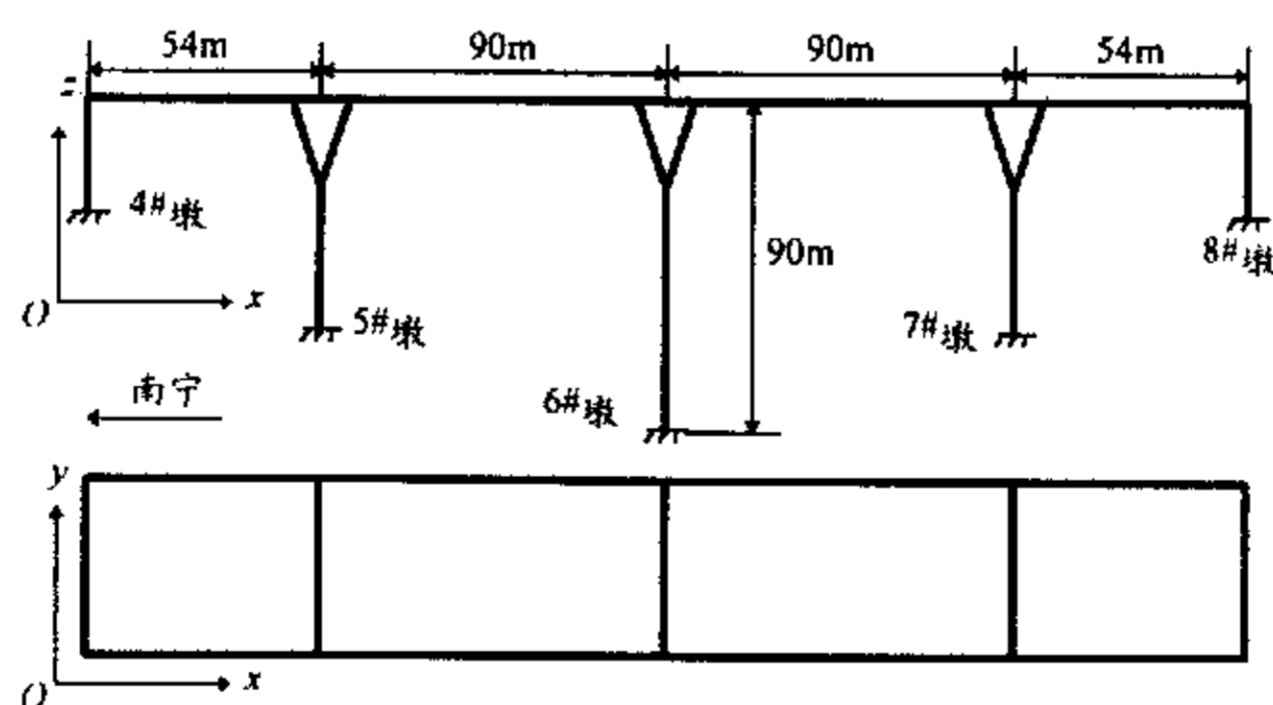


图 4-6 南盘江大桥结构示意图

水平方向:

水平方向进行了一次实验, 记为实验1, 测点布置如图4-7所示:

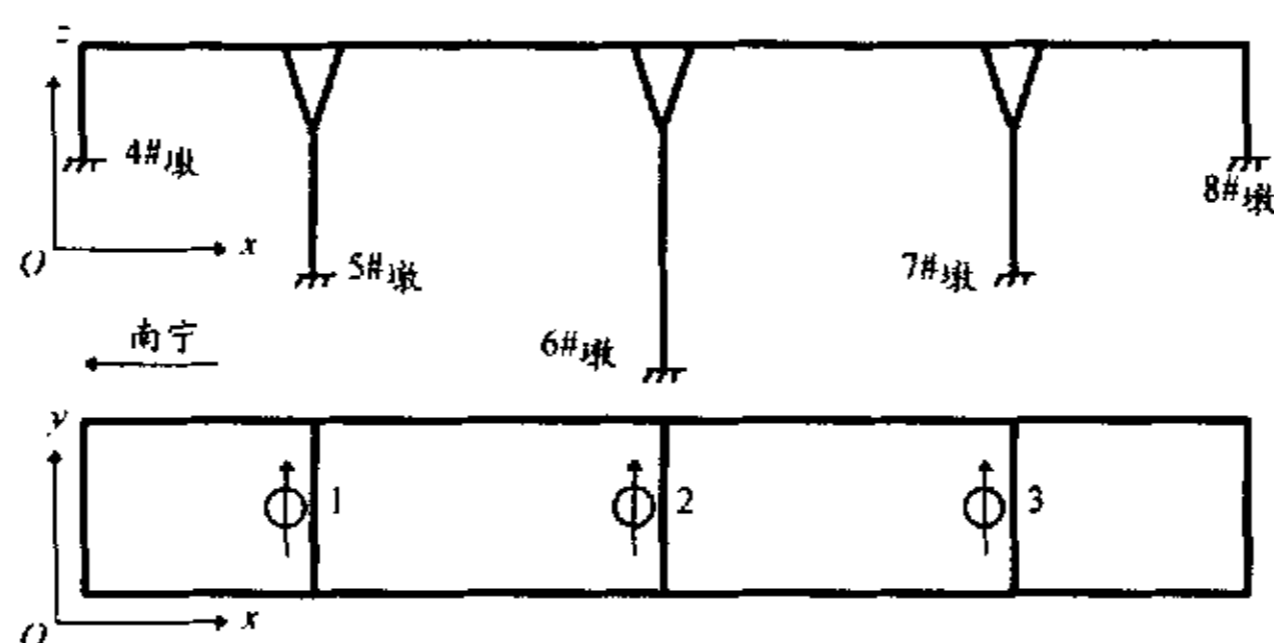
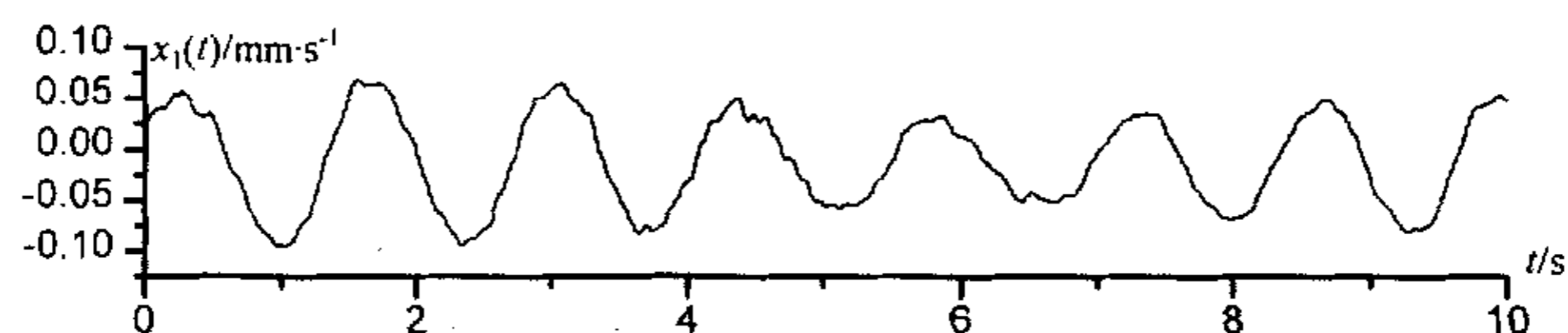
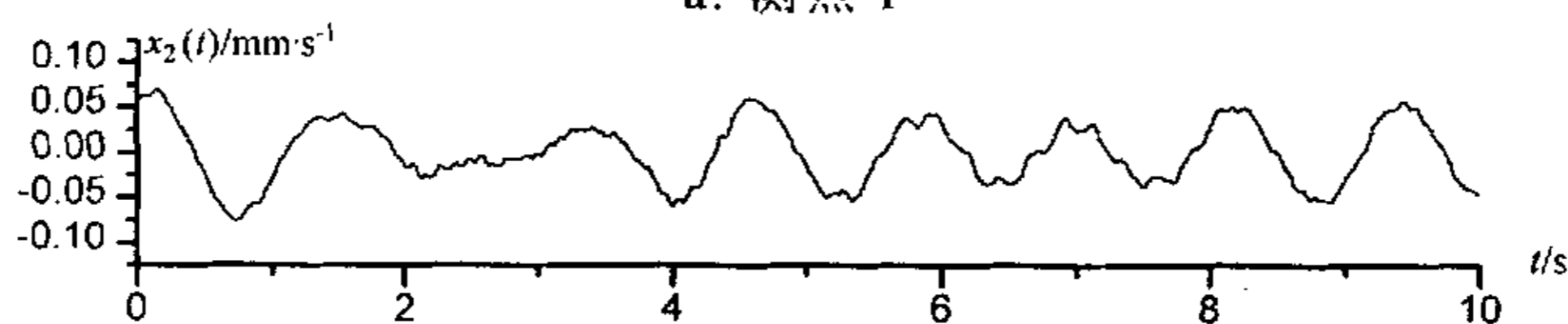


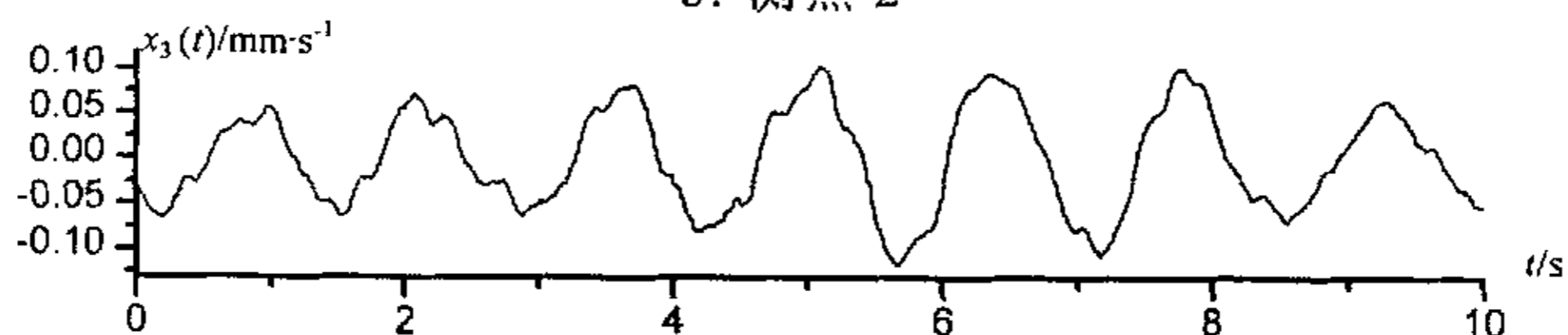
图 4-7 水平方向实验测点布置



a. 测点 1



b. 测点 2



c. 测点 3

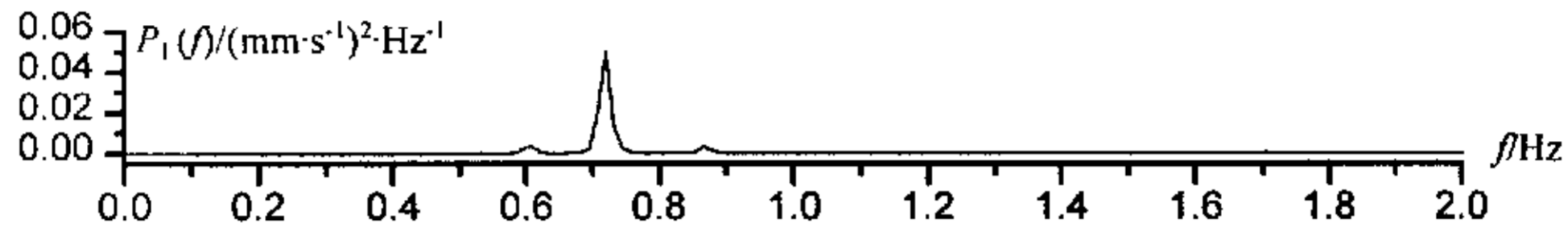
图 4-8 水平方向实验的一段时域波形

图4-8给出水平实验中用DP型传感器测到的一段实验记录波形。可以看到, 信号具有很好的信噪比。将速度信号换算成加速度后的数值在 $10^{-5}g$ (g 为重力加速度)的量级。而Kyowa公司的ASQ-BL型伺服加速度计在实验中没有输出信号, 由此可以看出DP传感器在结构测试方面的优越性。

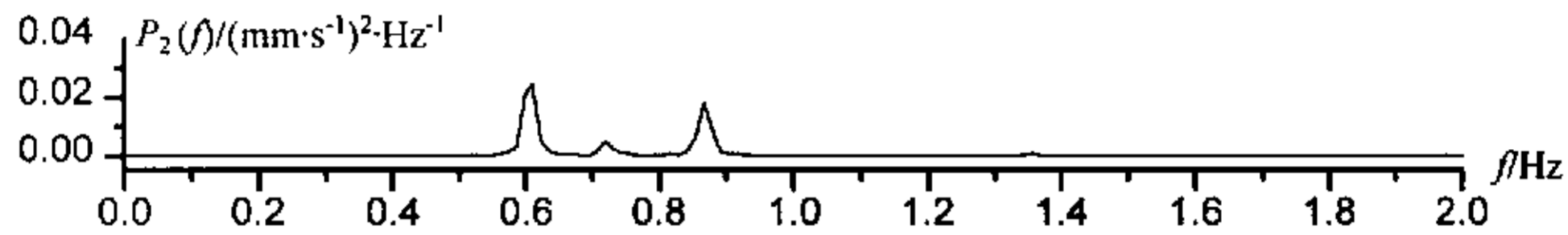
实验采用 Welch 方法进行谱估计。表 4-4 给出实验 1 中谱估计的数据处理方法。图 4-9 给出自功率密度谱，图 4-10 给出互功率密度谱和相干函数。

表 4-4 实验 1 数据处理方法

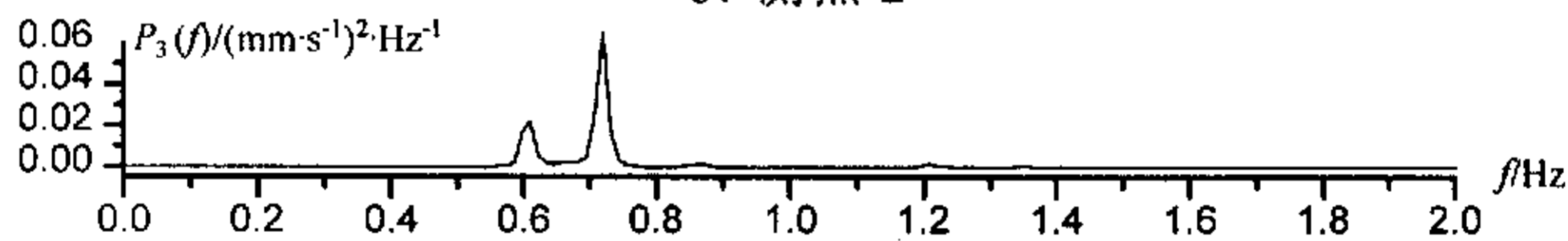
采样频率(Hz)	分析点数	重叠系数	平均段数	窗
100	8192	0.5	14	哈明



a. 测点 1

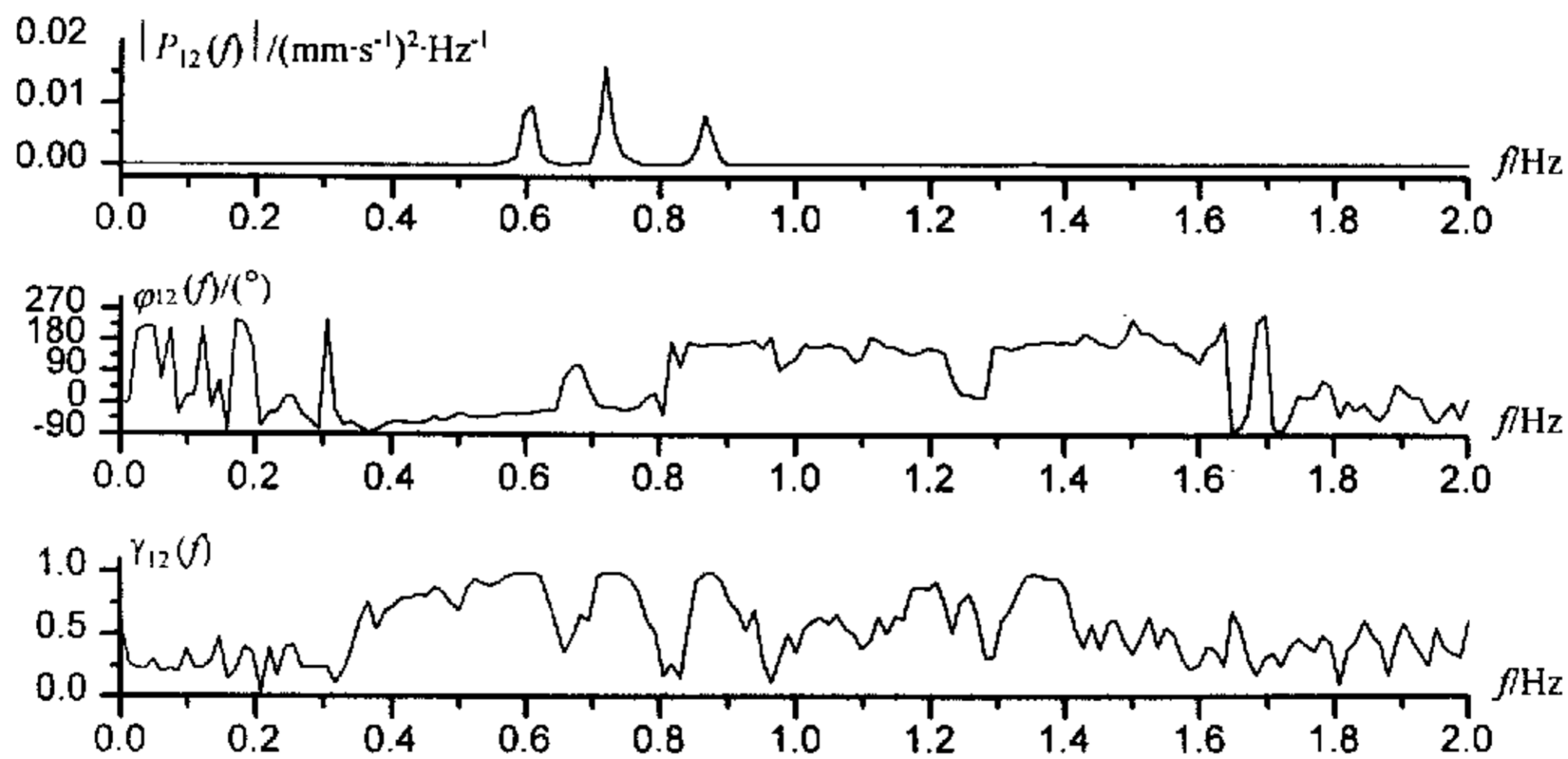


b. 测点 2

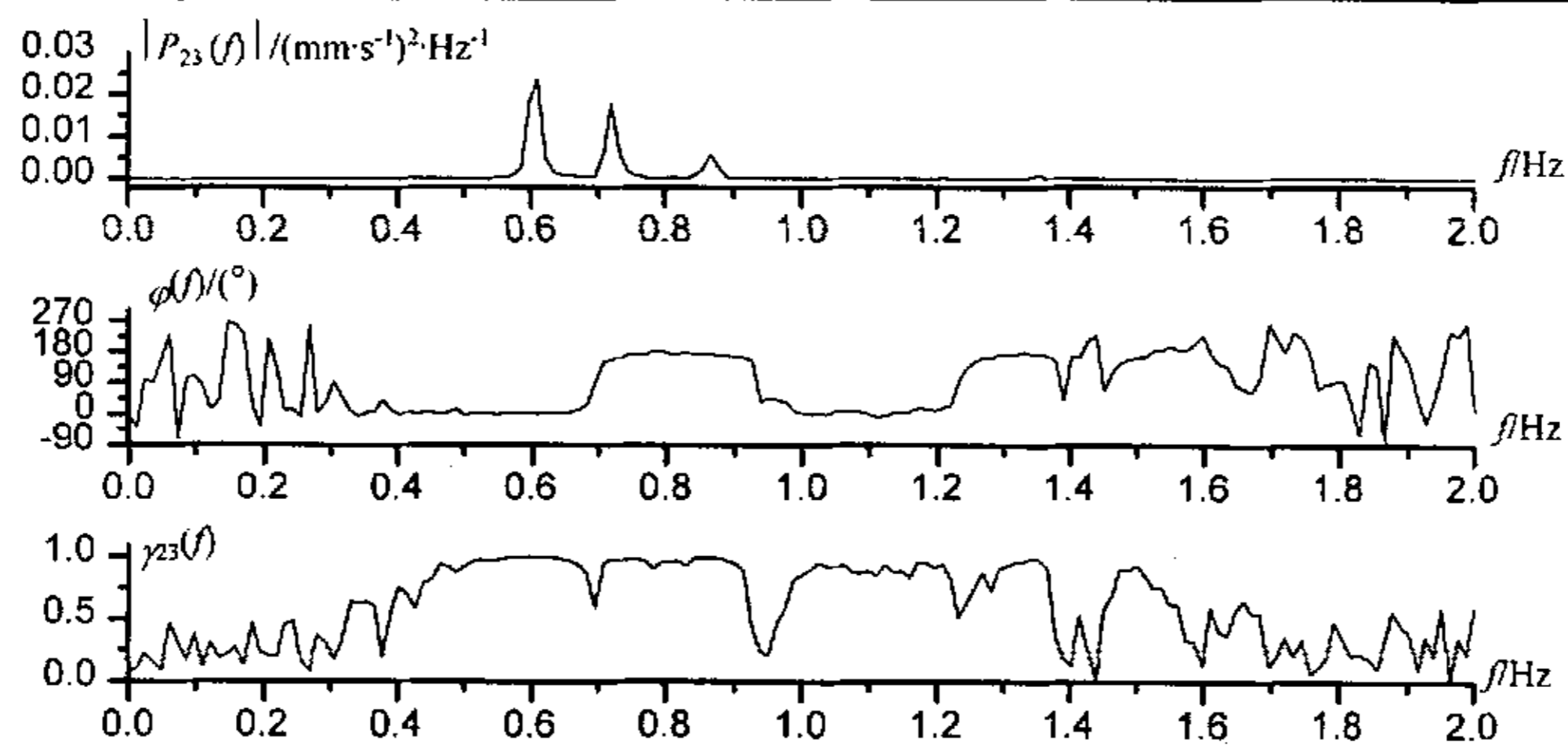


c. 测点 3

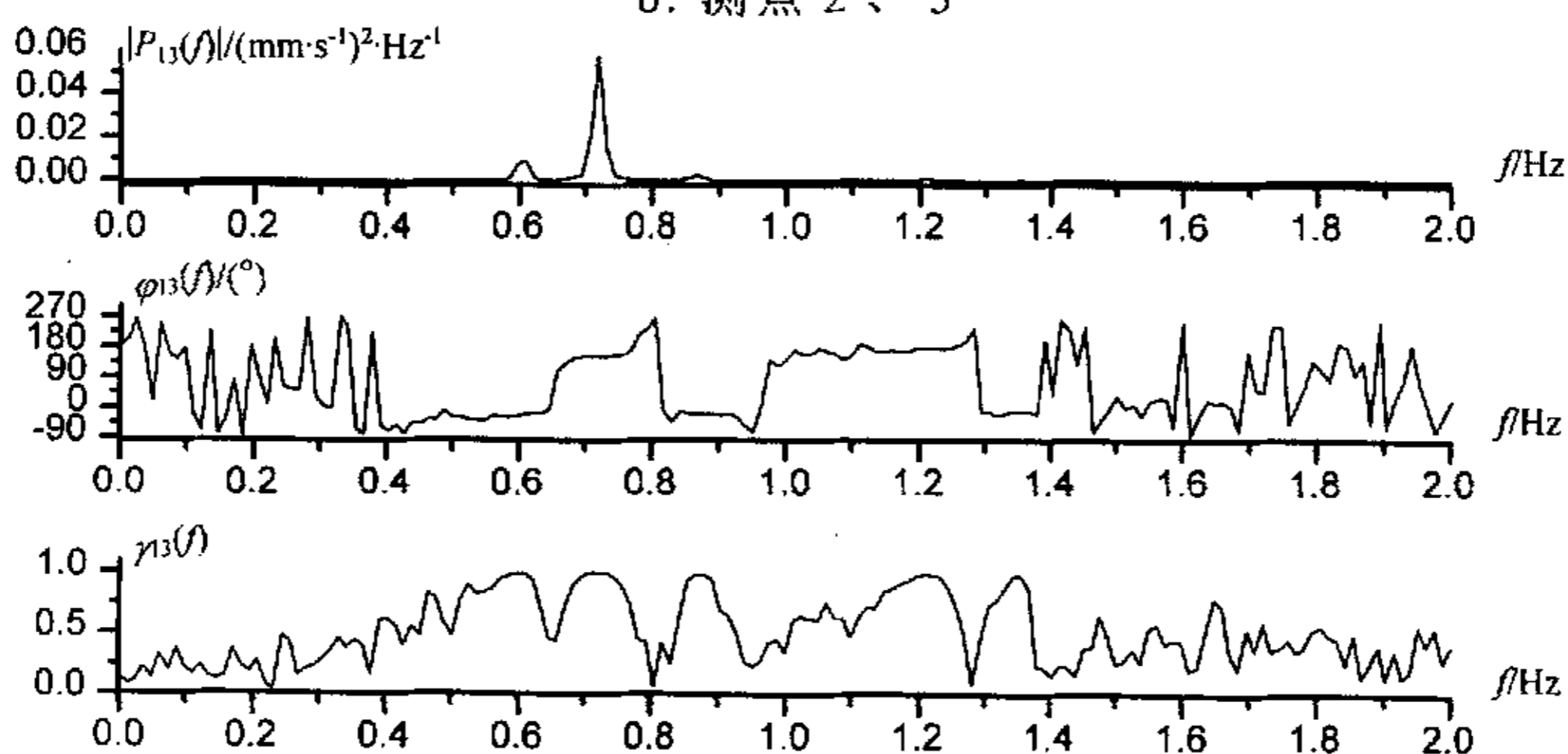
图 4-9 实验 1 中各测点信号的自功率密度谱



a. 测点 1、2



b. 测点 2、3



c. 测点 1、3

图 4-10 实验 1 测点间互功率密度谱和相干函数

谱图中比较明显的三根谱线的自功率密度谱数值见表4-5。

表 4-5 三根明显谱线的自功率密度谱数值

f/Hz	$P_1(f)/(\text{mm}\cdot\text{s}^{-1})^2\cdot\text{Hz}^{-1}$	$P_2(f)/(\text{mm}\cdot\text{s}^{-1})^2\cdot\text{Hz}^{-1}$	$P_3(f)/(\text{mm}\cdot\text{s}^{-1})^2\cdot\text{Hz}^{-1}$
0.61	0.003776	0.024633	0.02252
0.72	0.050969	0.005082	0.065121
0.87	0.003530	0.018203	0.001687

将表4-5中的数据取平方根，并按数值最大的点为基准作归一化，根据互谱相位提供的相位信息，与基准点同相取正值，反相则取负值，得到水平横向的前三阶振型，如图4-11所示。

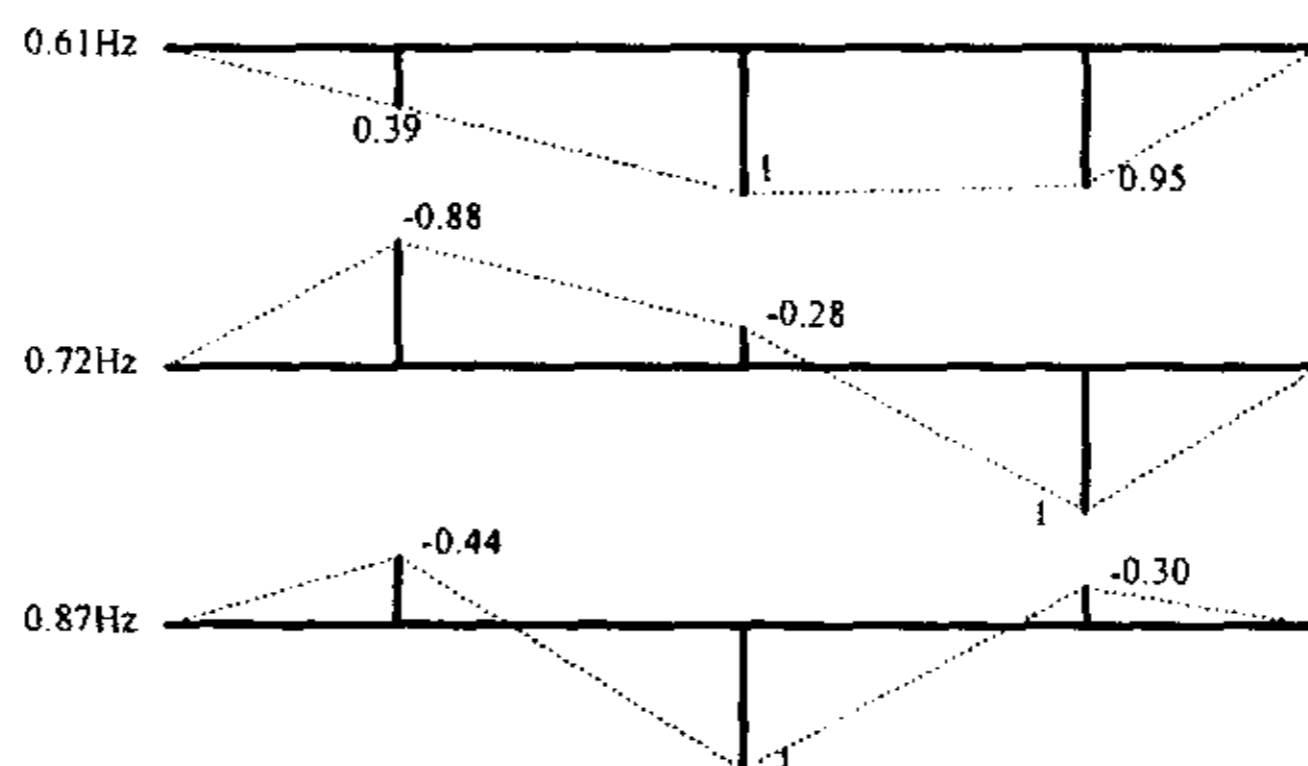
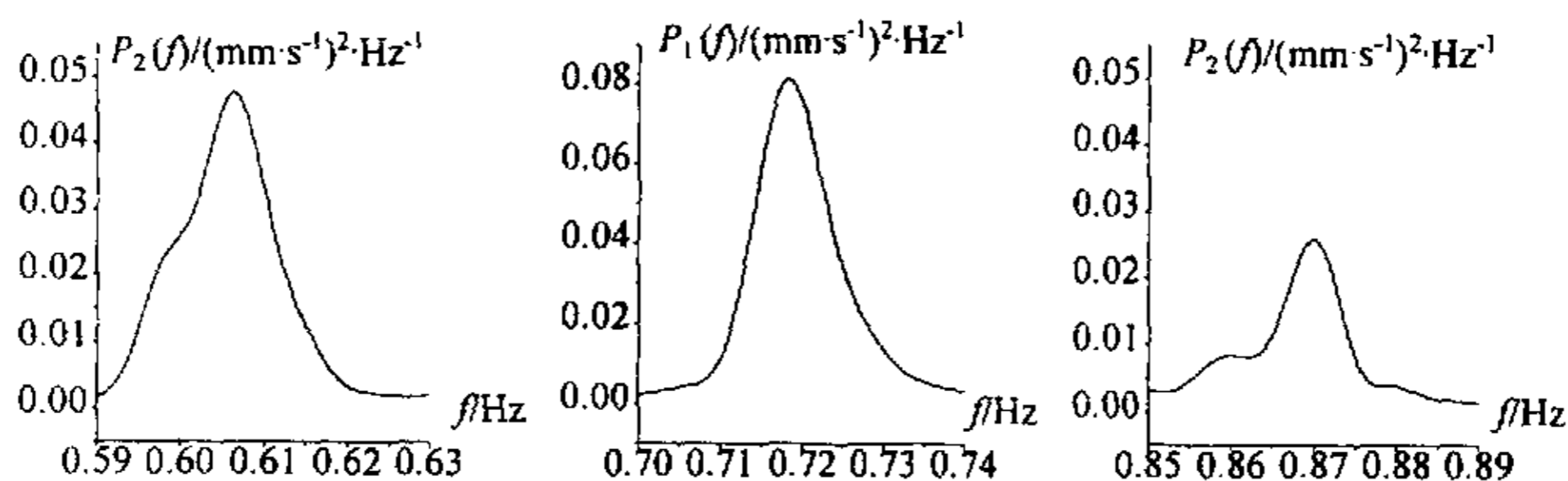


图 4-11 水平横向前三阶振型

如前所述，阻尼比估计对窗长的要求需要满足式(4-44)，我们采用窗长 $T=200\text{s}$ ，重叠系数0.5，经过5次平均后得到的谱估计结果如图4-12所示。

图 4-12 窗长 $T=200\text{s}$ 的自功率密度谱估计结果

采用拟合方法对三阶模态的阻尼比进行估计，得到表4-6。

表 4-6 前三阶模态的阻尼比估计结果

模态阶次	固有频率(Hz)	阻尼比
1	0.607	0.0078
2	0.718	0.0055
3	0.87	0.0047

阻尼比的估计结果表明，窗长 $T=200\text{s}$ 仍然没有满足式(4-44)的要求，所以阻尼比的实际值应该更小一些。但由于实验记录数据的缺乏，如果采取更长的窗，平均次数会更少，谱估计将出现较大的起伏，同样会影响阻尼比的估计精度。所以对阻尼比的估计需要较长的数据记录。

垂直方向:

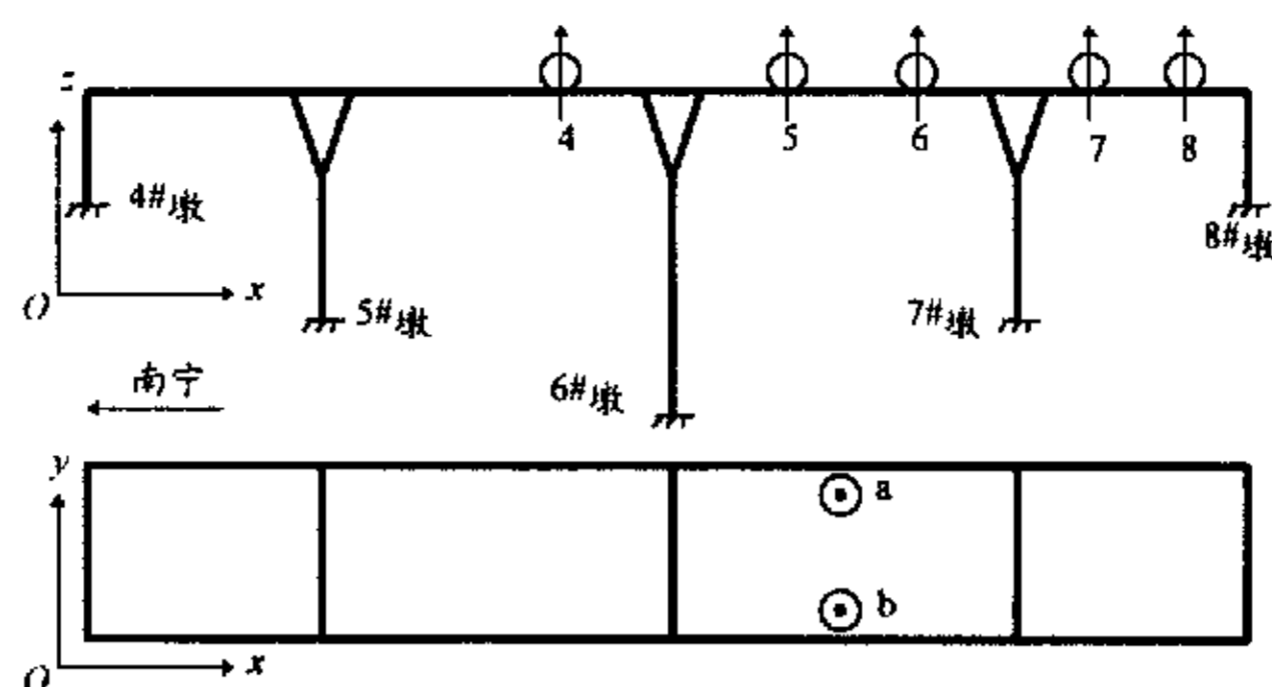


图 4-13 垂直方向实验测点布置

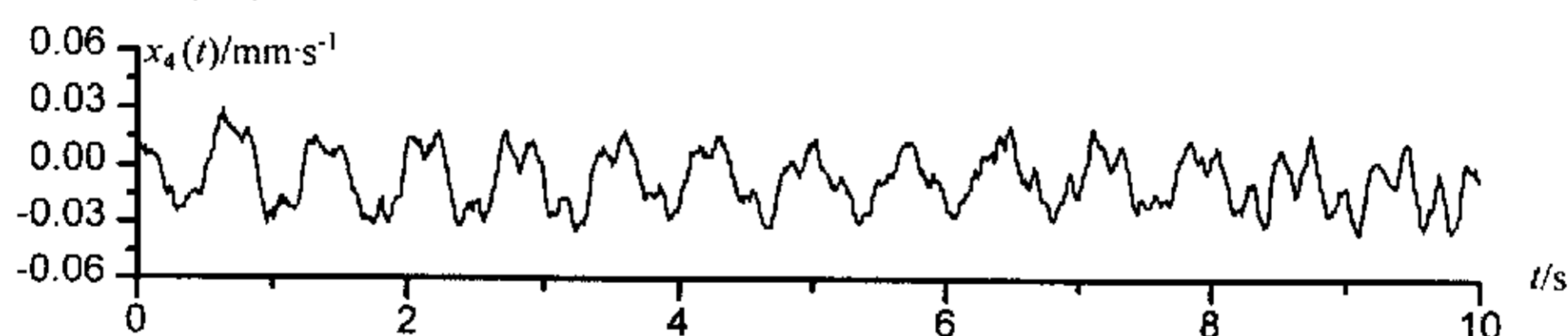
垂直实验的测点布置如图4-13所示。由于传感器的数量只有3个，所以各个测点不能同时进行测量，共进行了三次实验，分别记为实验2、实验3和实验4。各次实验的测点布置和谱估计数据处理方法如表4-7所示。

表 4-7 垂直方向实验数据处理方法

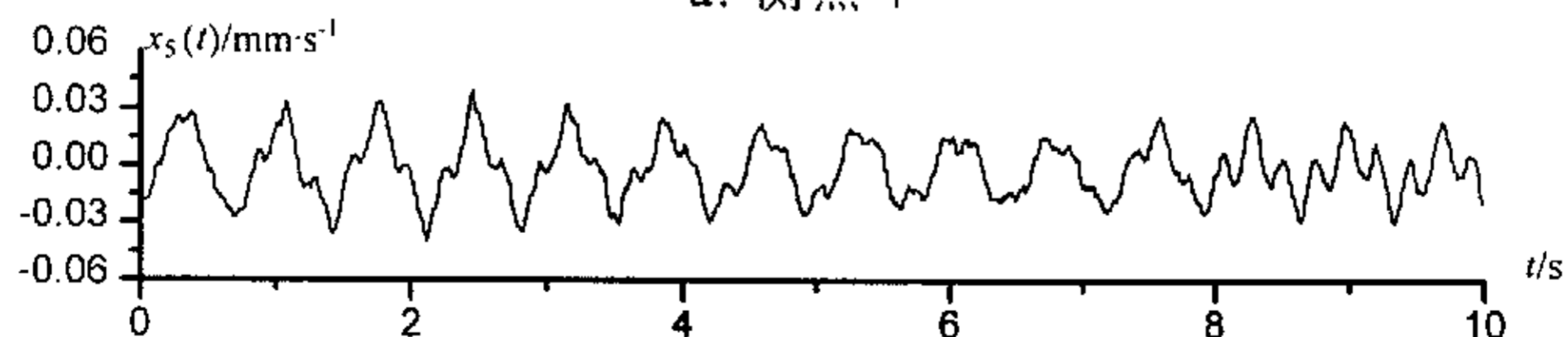
	测点	采样频率(Hz)	分析点数	重叠系数	平均段数	窗
实验2	4,5,6	100	8192	0.5	9	哈明
实验3	7,8	100	8192	0.5	6	哈明
实验4	a,b	100	8192	0.5	4	哈明

实验2:

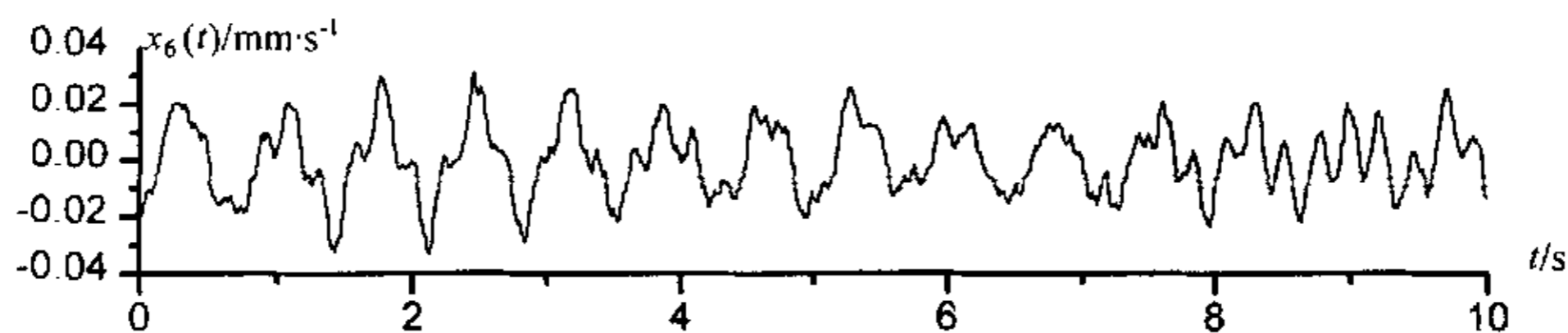
实验2的时域波形见图4-14，自功率密度谱见图4-15，互功率密度谱和相干函数见图4-16。



a. 测点 4

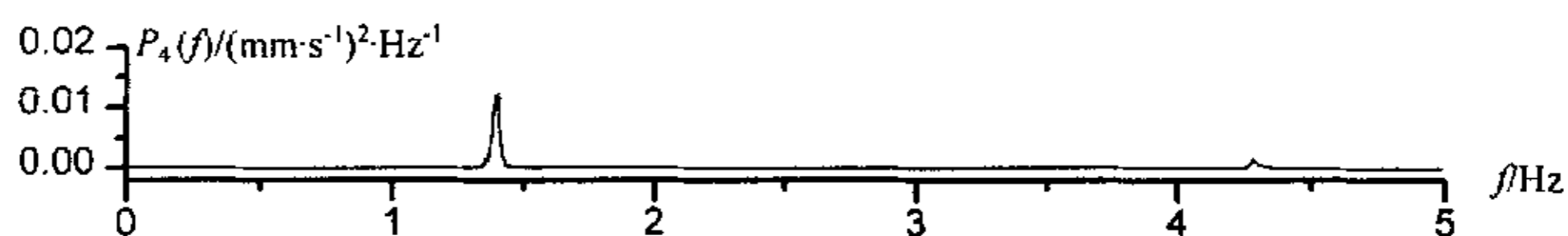


b. 测点 5

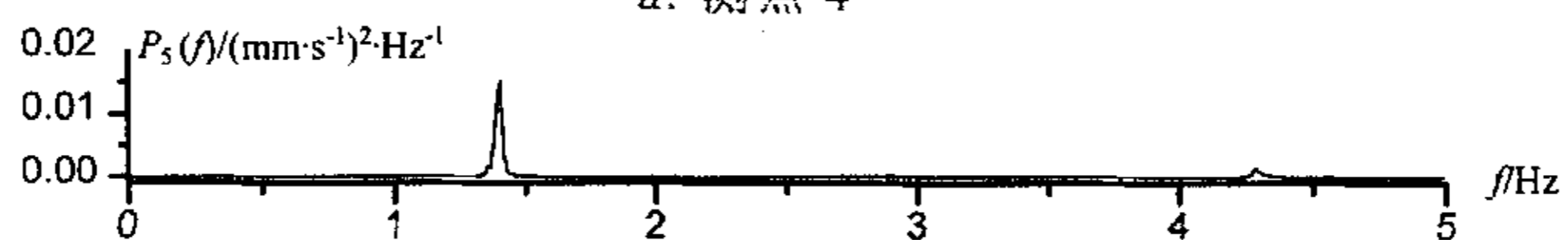


c. 测点 6

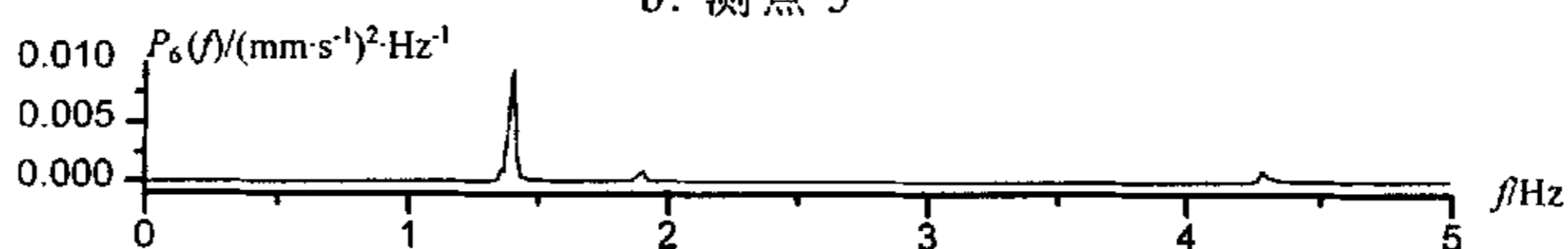
图 4-14 实验 2 测点的一段时域波形



a. 测点 4

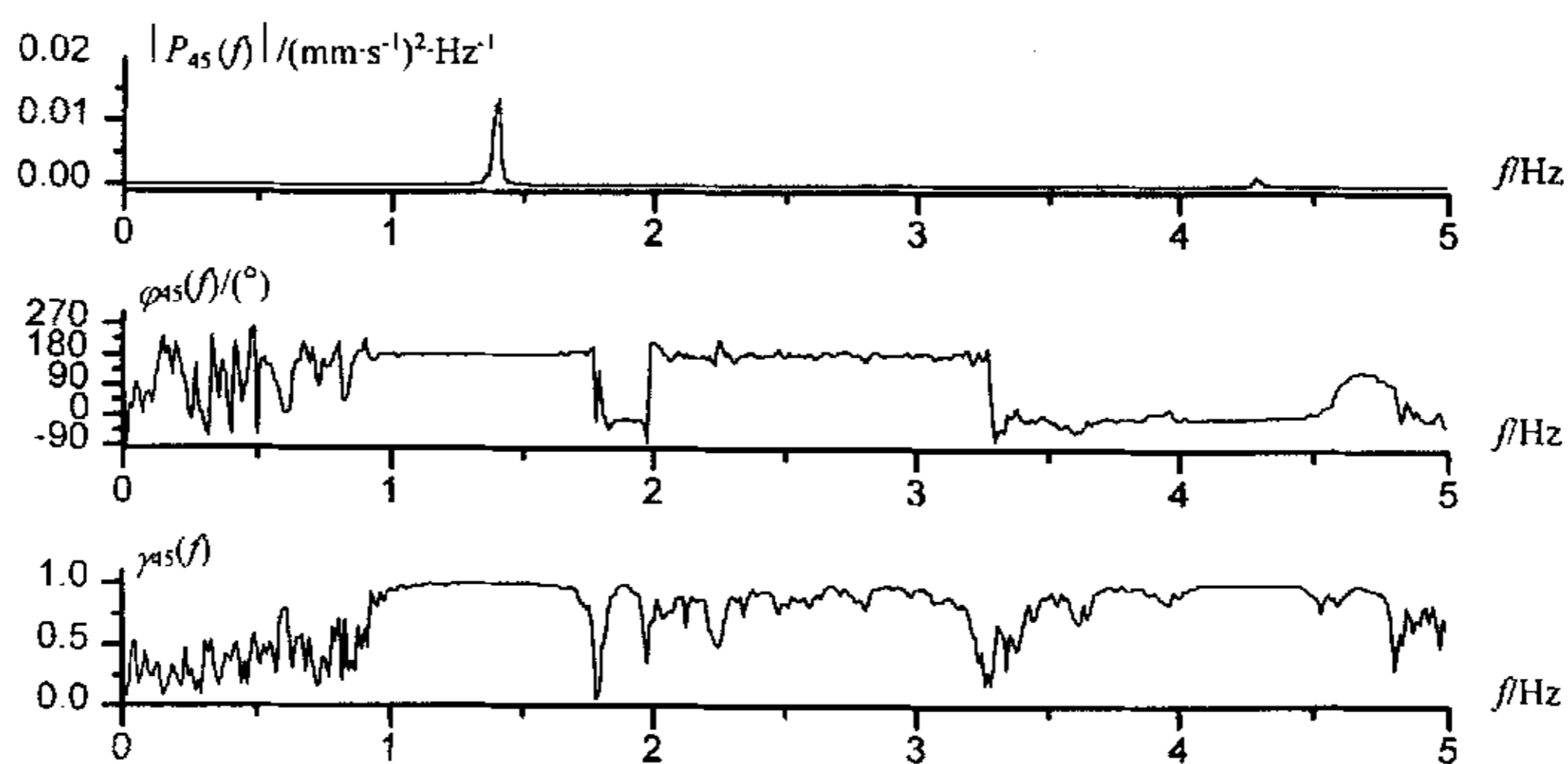


b. 测点 5

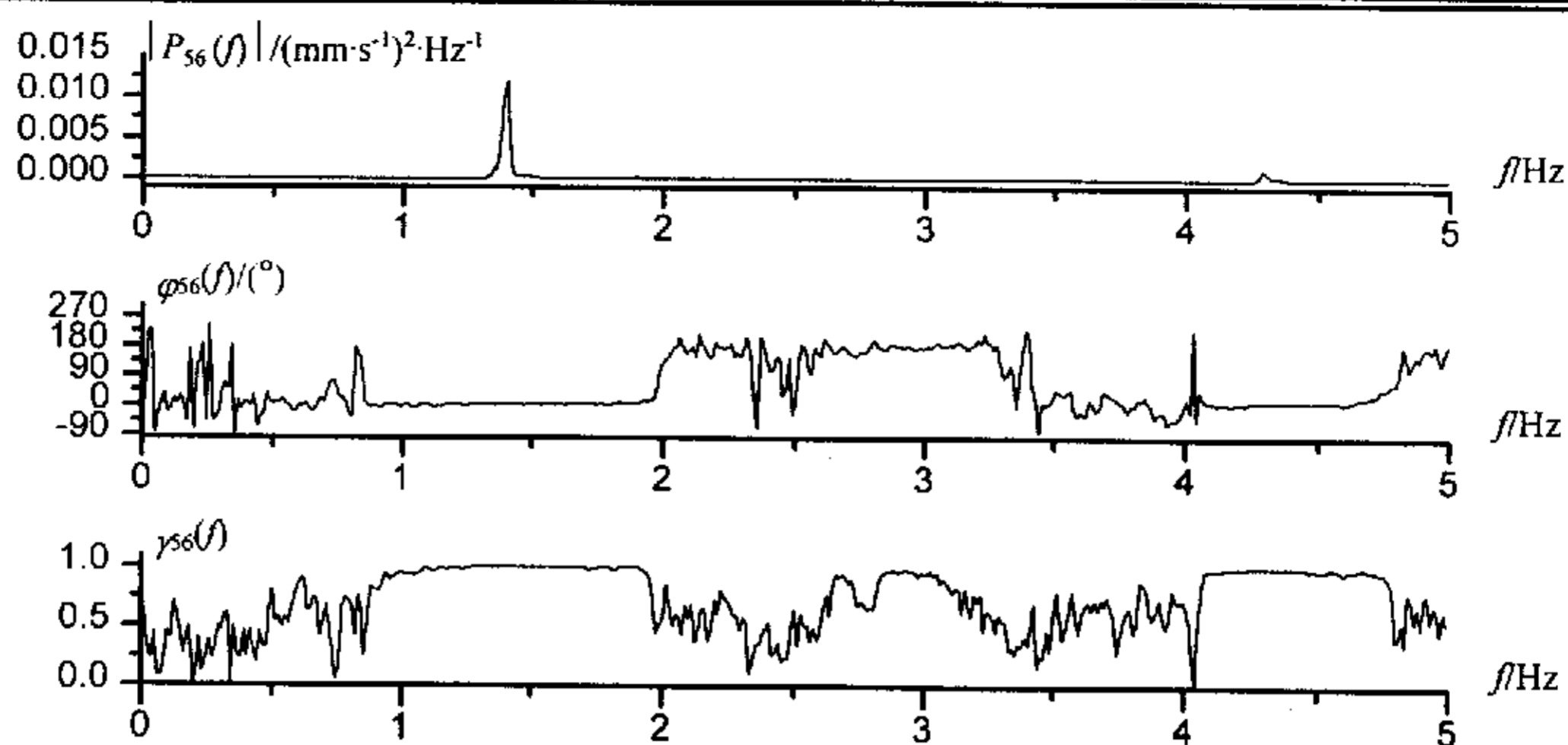


c. 测点 6

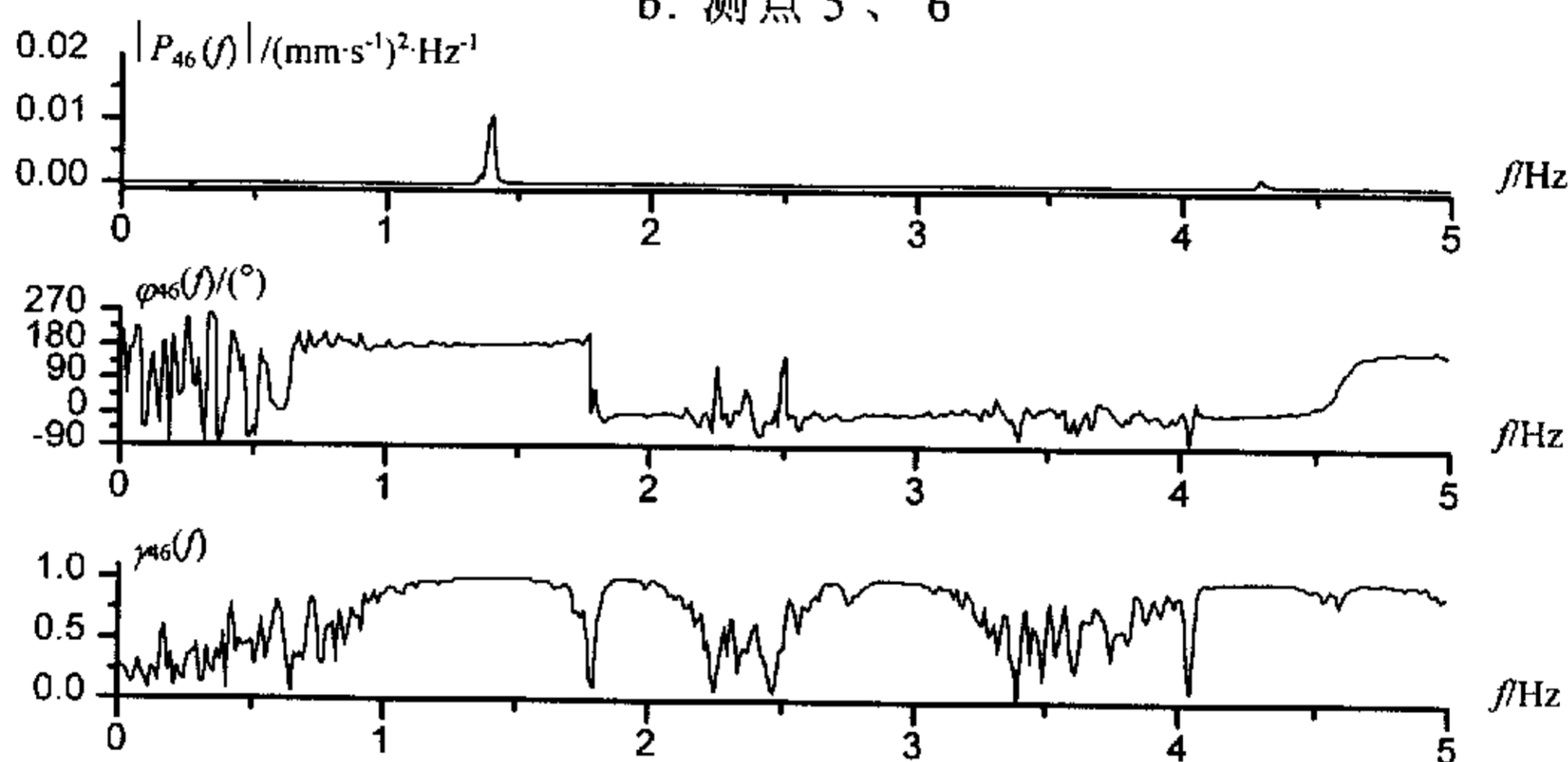
图 4-15 实验 2 测点自功率密度谱



a. 测点 4、5



b. 测点 5、6



c. 测点 4、6

图 4-16 实验 2 测点互功率密度谱和相干函数

以上数据中，1.40Hz为最明显的一根谱线，该固有频率的振型如图4-17所示。由于传感器数量的限制，没能得到此阶模态在该桥全长上的振型。

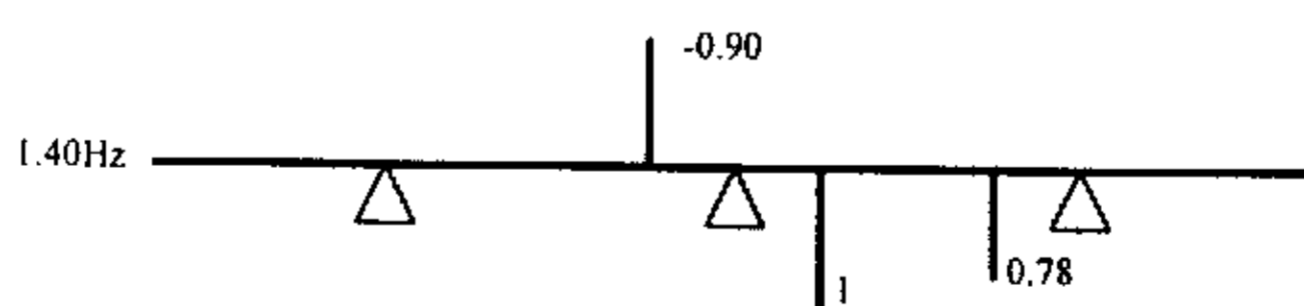


图 4-17 垂直一阶固有频率振型

实验3:

实验3的时域波形见图4-18, 自功率密度谱见图4-19, 互功率密度谱和相干函数见图4-20。

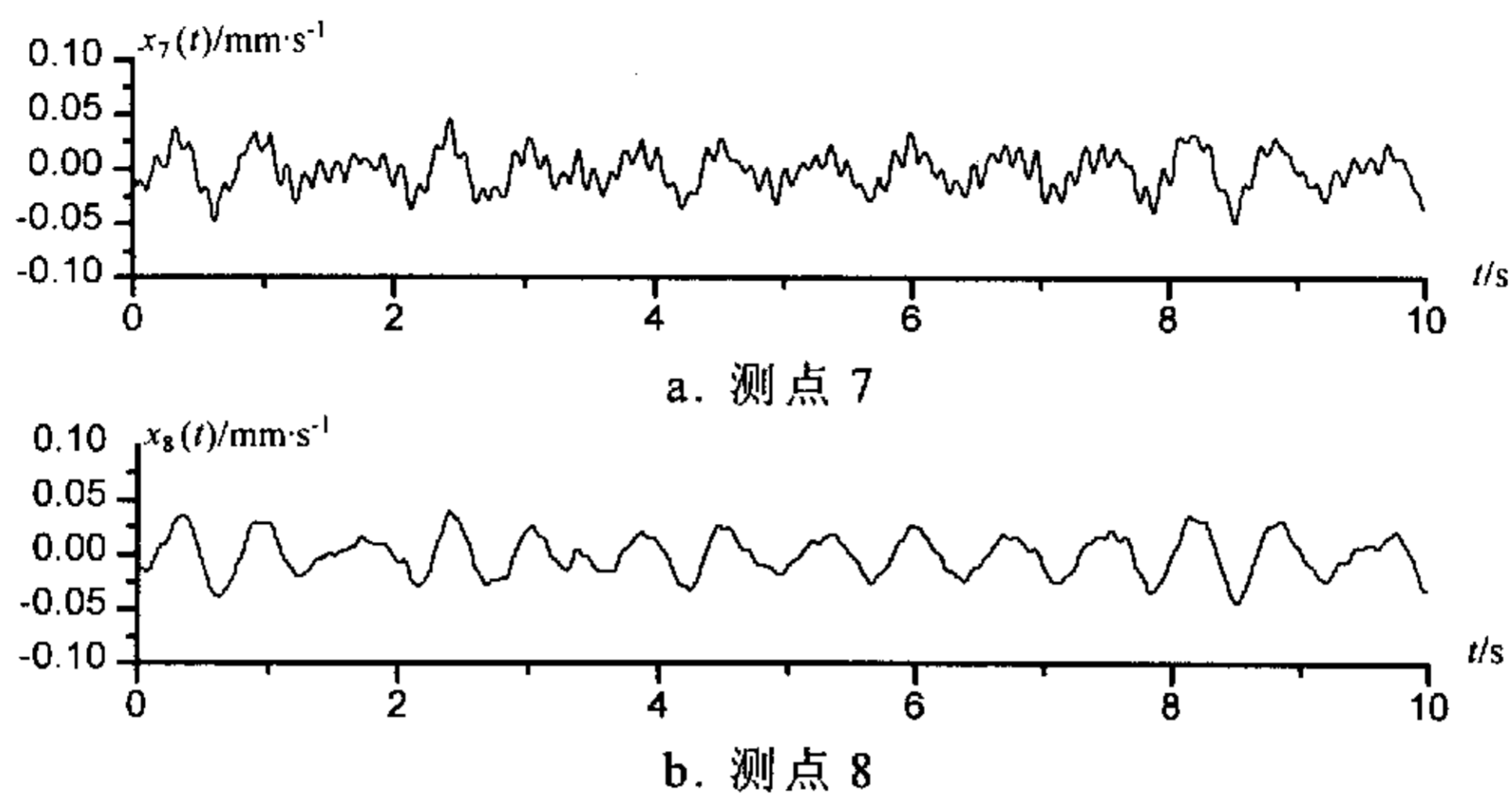


图 4-18 实验 3 的一段测点时域波形

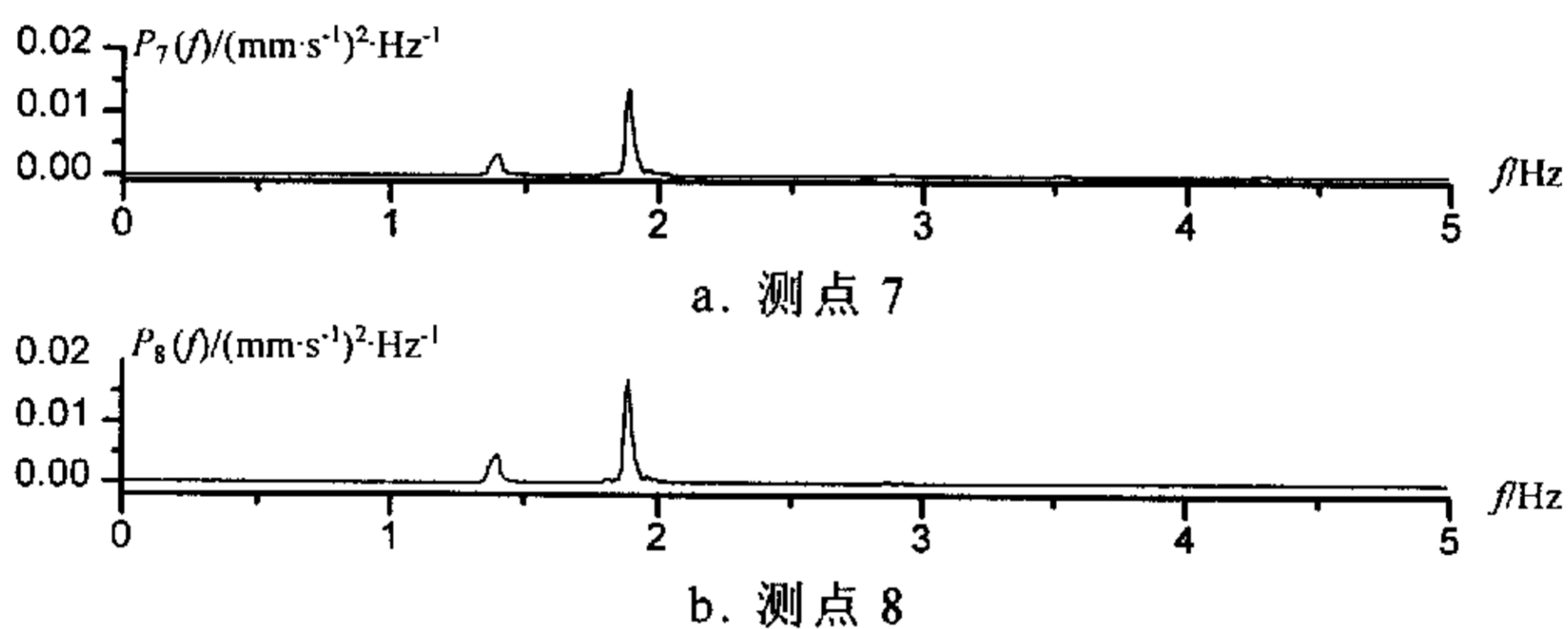


图 4-19 实验 3 测点的自功率密度谱

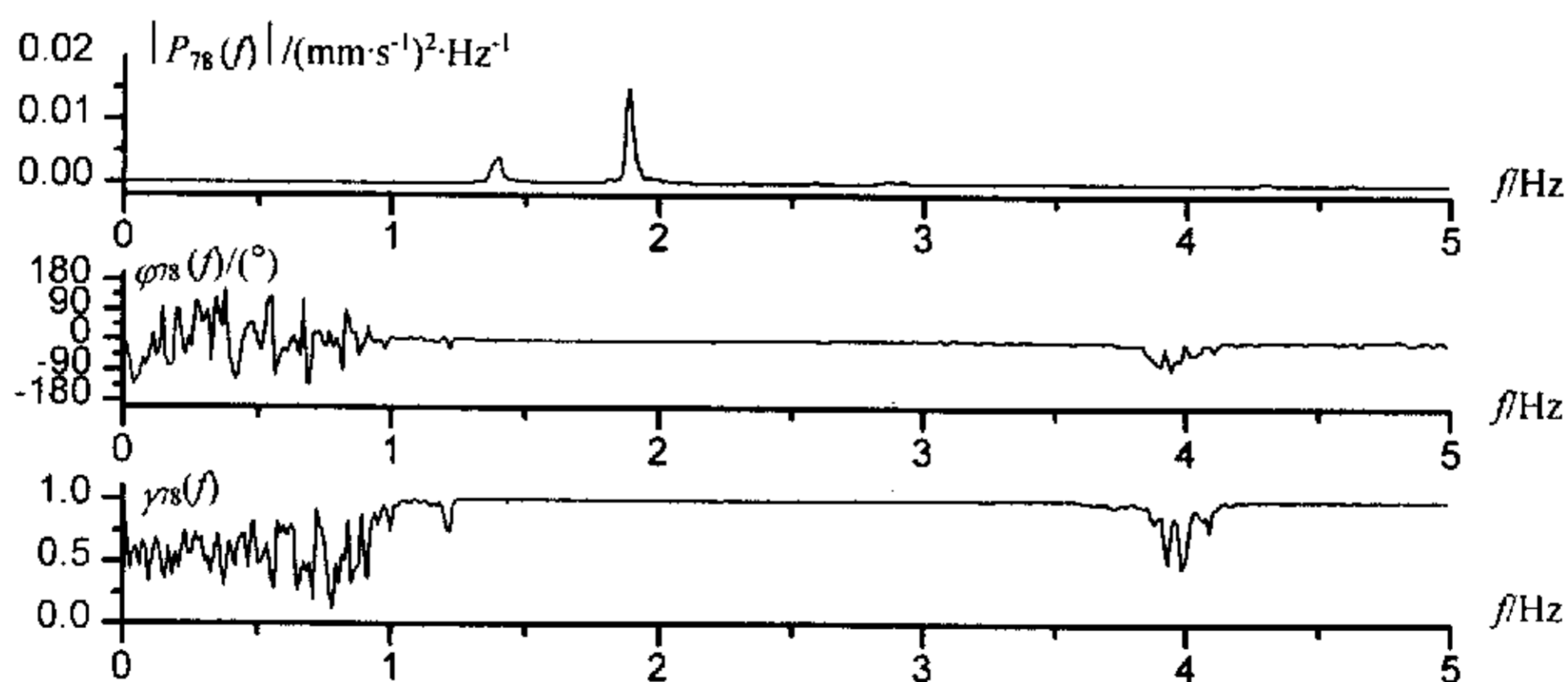
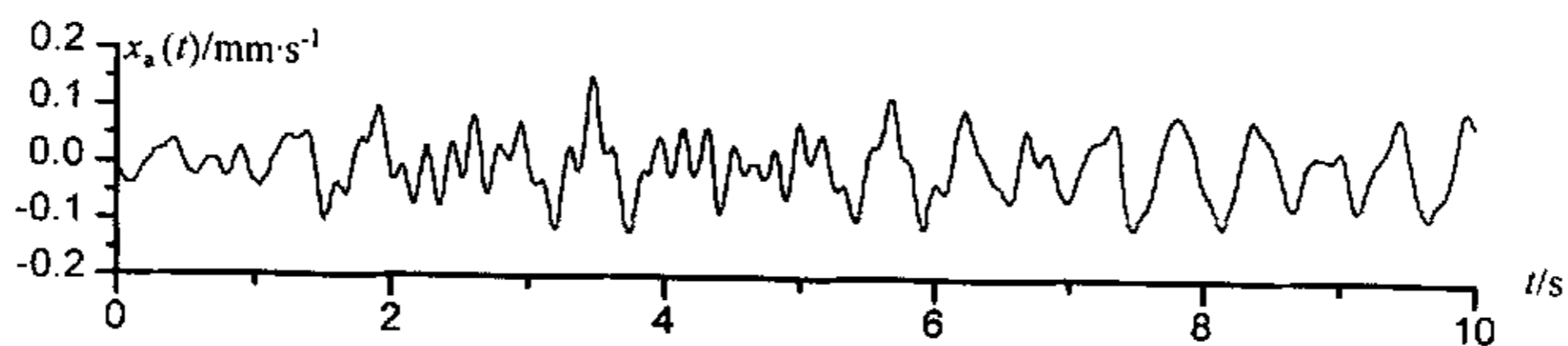


图 4-20 实验 3 测点 7、8 的互功率密度谱和相干函数

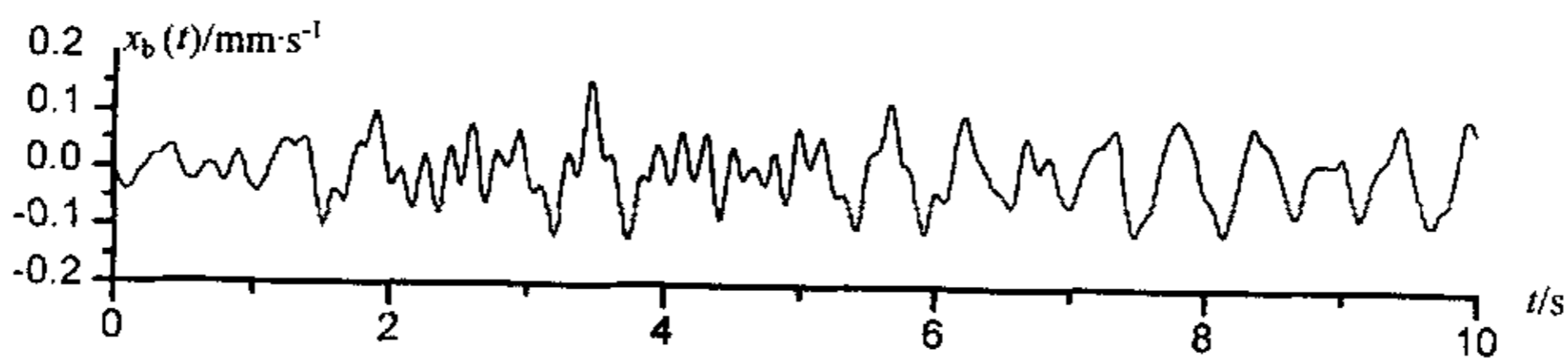
该实验中的两根明显谱线为1.40Hz和1.90Hz，测点7和8在两个频率点上都为同相。1.40Hz为垂直一阶固有频率，1.90Hz可能为54m跨的局部一阶固有频率。

实验4:

实验4的时域波形见图4-21，自功率密度谱见图4-22，互功率密度谱和相干函数见图4-23。

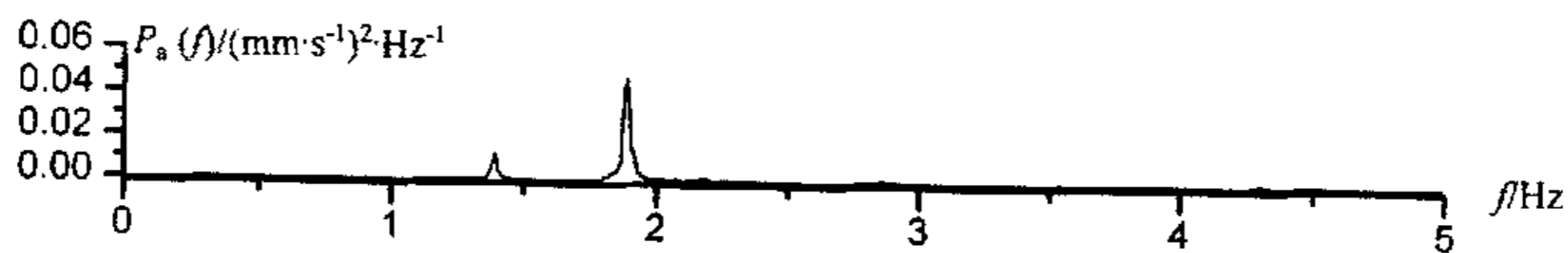


a. 测点 a

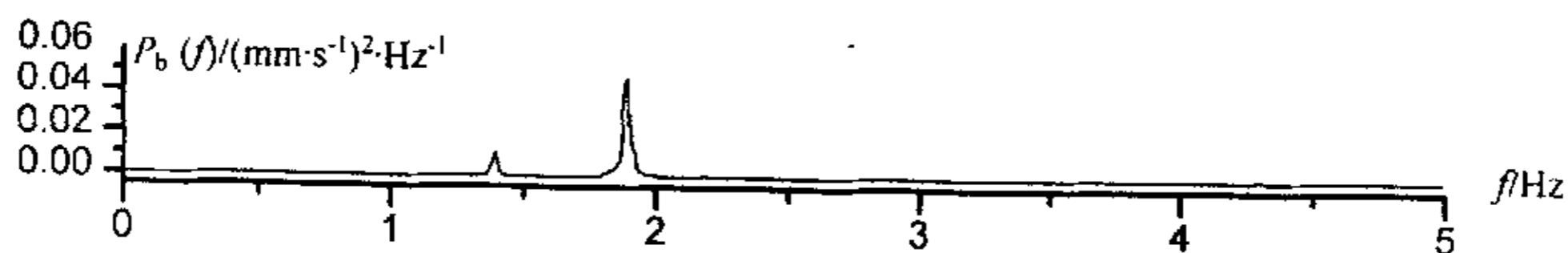


b. 测点 b

图 4-21 实验 4 测点的一段时域波形



a. 测点 a



b. 测点 b

图 4-22 实验 4 测点的自功率密度谱

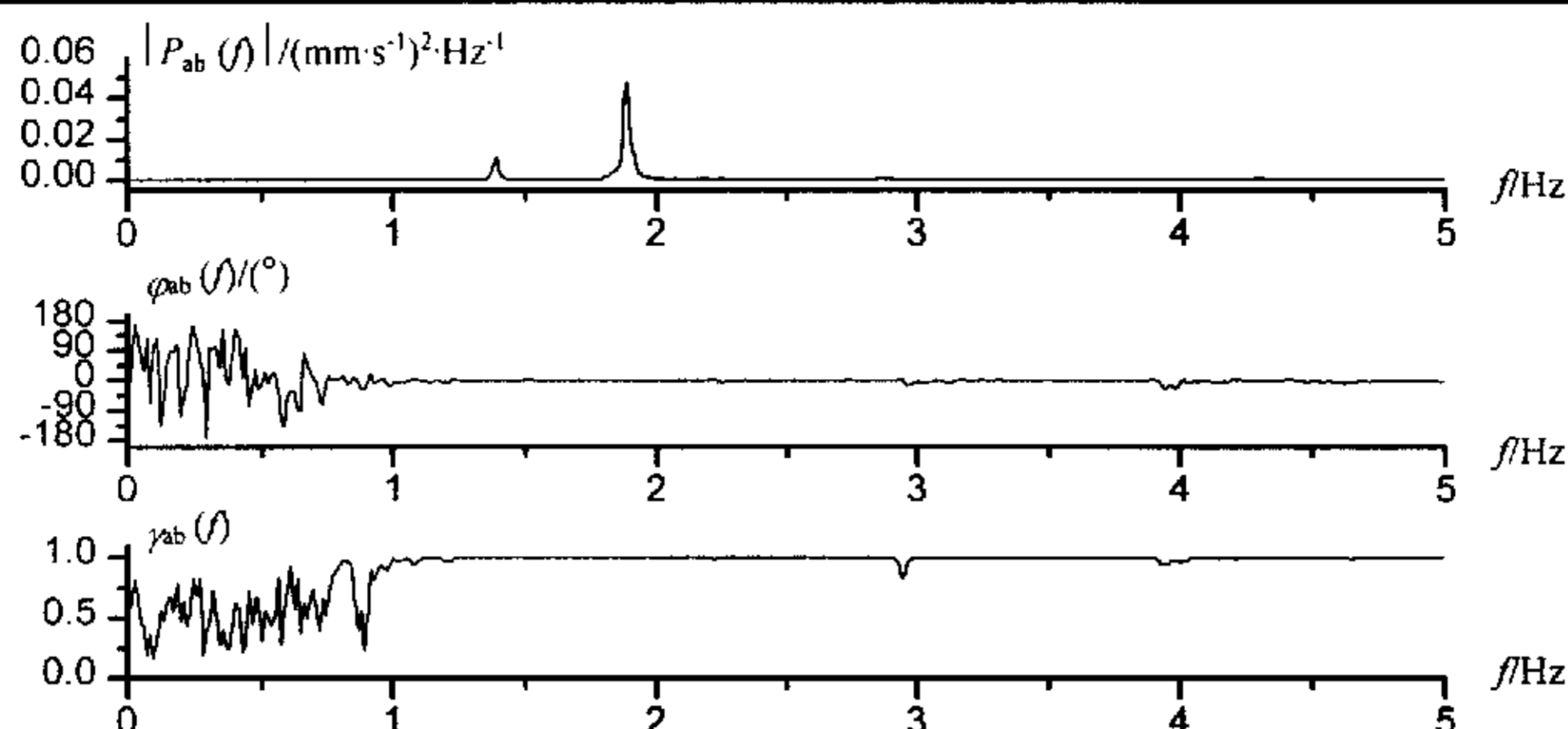


图 4-23 实验 4 测点 a、b 的互功率密度谱和相干函数

实验 4 中在宽广的频带上两个测点都为同相关系,说明绕 x 轴的扭转振型没有表现出来。

4.8 本章小结

大型结构一般表现为低固有频率和小阻尼特性,结构对随机激励的响应包含有结构的模态参数的信息,用脉动法测试结构的动态特性是一种经济、方便的方法。

结构在随机激励下的响应为低频、小振幅振动,利用高灵敏度的速度型 DP 传感器可以方便地检测到此信号,是一种有效的测试手段。

模拟信号与数字信号的功率密度谱有一定的区别,但在满足采样定理的条件下,它们满足一定的数学关系,因此可以用数字处理的方法揭示模拟信号的性质。

- 计算机只能处理有限长的数据序列,对数据切断的过程相当于在无限长的数据上加窗,时域加窗后,所得谱图是原频谱图和窗函数谱图的卷积,因而使原谱图产生畸变,使频率分辨力下降。矩形窗的主瓣最窄,但是旁瓣甚高,而且衰减很慢;Hamming 窗的主瓣宽度虽然是矩形窗的两倍,但旁瓣小,而且窗函数就 -30dB 宽度或 -40dB 宽度而言,Hamming 窗具有最窄的宽度,是一种性质比较优良的窗函数。

- 在识别结构的固有频率时,应使和各固有频率相对应的谱峰峰值(或功率谱峰值)的相互影响足够小,在采用旁瓣足够小的时窗,例如 Hamming 窗后,应保证窗函数的主瓣宽度小于相邻的两个固有频率间隔,亦即

$$T \geq \frac{4}{\min|f_{0,j} - f_{0,j-1}|}。$$

●加窗后原功率谱图通过窗函数卷积而变得更为平滑。作者通过仿真提出,在采用Hamming窗后,用半功率带宽法求阻尼中时窗长度要满足 $T \geq (4 \sim 5)/\xi f_0$ 的条件。

●本文提出一种用拟合求阻尼比的方法。使用拟合方法可以对窗长的要求降低到 $T \geq (1.5 \sim 2)/\xi f_0$ 。利用拟合的方法可以提高阻尼比的估计精度,在同等精度要求下,可以缩短实验时间,具有重要的工程意义。

●利用自功率密度谱的幅值和互功率密度谱的相位信息可以确定大型结构的振型。结构的固有频率处具有较高的相干函数,利用相干函数可以进一步提高模态识别的可靠性。

●本文提出南昆铁路南盘江大桥的实验结果。南盘江铁路桥的水平横向前三阶模态固有频率分别为0.61Hz, 0.72Hz, 0.87Hz,垂直一阶模态固有频率为1.40Hz。

第5章 用信号恢复技术测试桥梁的动挠度

当有列车通过时，在列车移动荷载作用下，铁路桥梁在垂直方向将产生动态形变，称为动挠度。桥梁动挠度过大，桥上线路高低平顺性变差，列车振动加剧，甚至导致列车出轨。因此，世界各国对于桥梁允许的挠度变形都有严格的规定^[86-87]。桥梁动挠度是反映桥梁质量、评估桥梁现行状态的一项十分重要的综合性指标。

桥梁的动挠度是低频暂态信号，目前的动挠度测试主要应用相对的测量方法。

早期，人们把千分表固定在相对地面静止不动的支架上。千分表的顶杆顶住被测梁体。这种测量方法只适用于净空高度不大的旱桥。它能反映振动位移量较小的缓变振动信号，能给出振动位移的最大值，但无法记录振动全过程。对于频率较高的振动，这种机械式仪表不能反映。

随着电测技术的发展，人们用应变式位移计取代千分表反映梁体相对支架的振动。这种方法将相对振动信号变换为电信号以便记录与处理。此方法需要从桥梁测点上拉一根钢丝将位移计固定在河床上，实验任务繁重，并仍然存在高频响应问题，一般只能反映十几赫兹以内的振动。测点的振动需要经过一定的机械系统传递到测试仪表，传递系统的特性会给测试结果带来误差。

应用摄像法测试桥梁动挠度近年得到了发展^[88]。该方法用摄象机拍摄粘在梁体上随梁体一起运动的靶标。经过图像采集，对图象数据作分析处理，从而获得动挠度信号。一台摄象机只能对一点进行测试，设备复杂，成本很高，如果进行多点测试，使用单位在经济、运输和调试方面都难以承受。摄像法的每台仪器一般需要独立的数据采集系统，如果进行多点监测，无法分析不同测点间的相位关系。

相对测量方法的共同的缺点是需要一个固定不动的参考点，某些环境下，此参考点的选取是非常困难的，如横越峡谷江河的高架桥，位移计根本无法安装，摄像仪只能安装在两岸的山坡上，对测点有很大的距离和倾角，测试精度受到极大影响，从测量原理上讲，是违背了阿贝原则^[89]。另外，过桥列车是强烈的震源，安装点的也将产生振动，这也使测试结果产生误差。

惯性式传感器比相对式传感器在使用上有很大的优点。惯性传感器直接

安装在被测梁体上，随梁体一起振动，反映梁体相对于惯性空间的振动，不需要在现场找到静止不动的安装点，使用方便。

但是，桥梁的动挠度是暂态信号，其主要成分集中在低频段，频率成分低至从直流开始。图5-1是单机车头通过跨度32m简支梁跨中动挠度的时域波形和频谱。

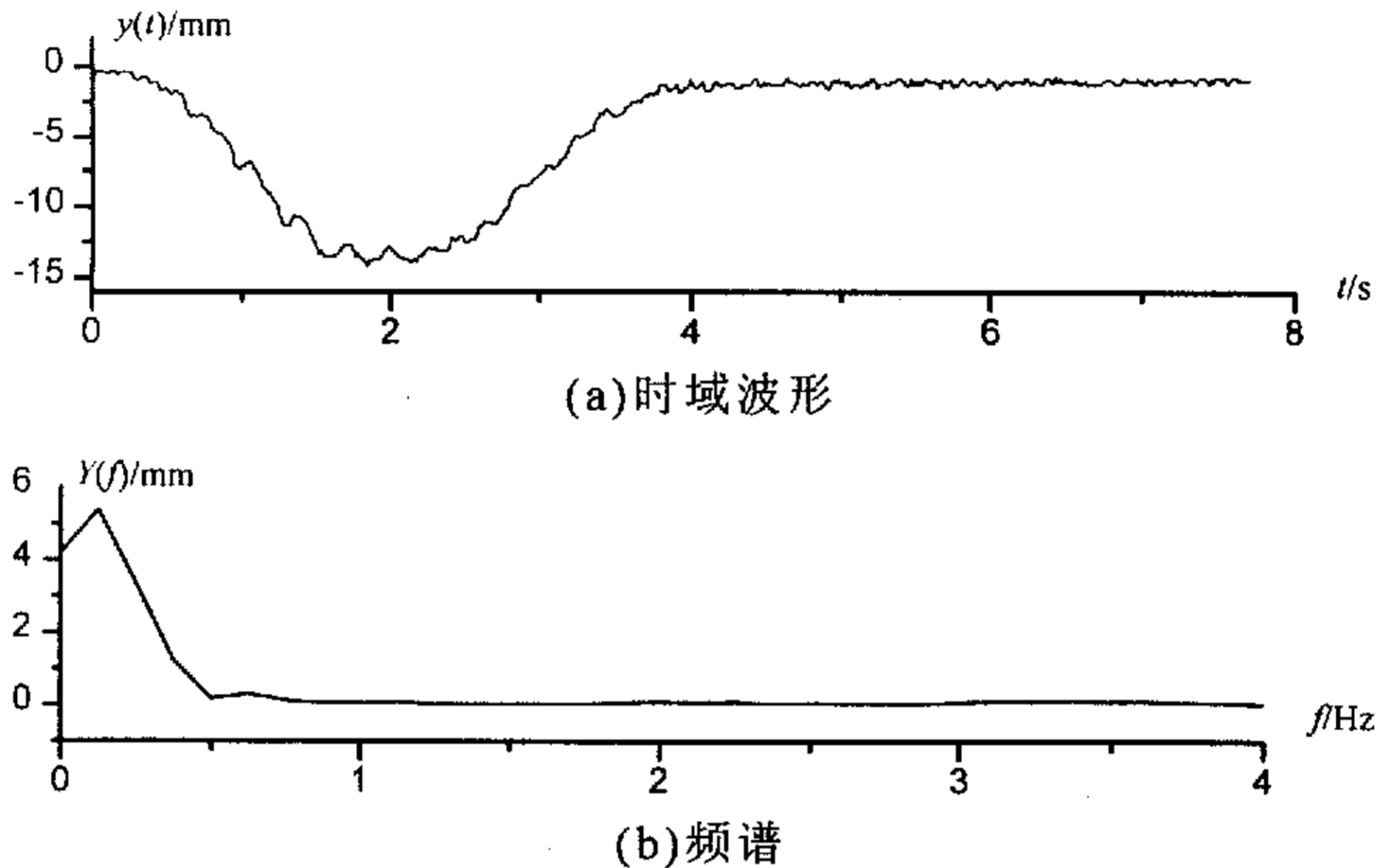


图5-1 单机车头通过跨度32m简支梁跨中动挠度

传感器都有其不失真测试频段，当被测信号的频率成分超出不失真频段时，测试信号将产生失真。对于二阶高通类型的传感器，若测试对相位失真要求不严格，则当频率高于传感器固有频率的1.2倍时，就可以保证幅值误差在5%以下。然而，如果测试对幅值和相位都有严格的要求，比如对半正弦信号的测试，为了保证峰值的测量精度不低于5%，则要求传感器的固有周期至少25倍于半正弦信号的持续时间^[90]。这就是说，对于持续时间1s的半正弦信号，要求二阶高通型传感器的固有频率要低于0.04Hz。实际的动挠度信号的持续时间都在数秒钟以上，有时要达到100s。

想用降低传感器固有频率的做法实现对动挠度信号的测量是不现实的。这是因为用模拟电路进一步校正地震检波器的动态特性存在困难：一方面要求传感器在更低频段的幅频特性保持平坦，需要对更低频段的信号具有高倍的放大作用，从而带来严重的低频漂移。另一方面，需要采用较大的电阻和电容元件，大电容的稳定性较差，调试中的参数匹配也比较困难。

惯性式传感器用于低频测试时，受传感器频率特性的影响，信号将产生

失真,这是惯性传感器在动挠度测试方面的困难。仅仅依靠DP传感器本身无法真实地获得动挠度信号。但如果传感器的频率特性已知,有可能运用信号恢复的方法反演出动挠度信号。这样做的结果相当于进一步扩展了DP传感器的低频响应范围。

本章我们将讨论用DP型位移传感器测试桥梁动挠度信号的信号恢复的有关问题。

5.1 时域方法：反卷积运算

传感器一般为模拟系统,在时域,系统输出 $y(t)$ 、系统脉冲响应函数 $h(t)$,以及系统输入 $x(t)$ 之间满足如下的卷积关系:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (5-1)$$

时域恢复处理就是依照卷积方程(5-1),由输出 $y(t)$ 和系统脉冲响应函数 $h(t)$ 求解系统输入 $x(t)$,恢复过程也称为卷积反演。

随着计算机技术和数字信号处理技术的发展,可以将其离散化后,采用数字信号处理技术对桥梁动挠度进行处理,以期得到真实的动挠度信号。考虑一个线性移不变系统,具有冲击响应 $h(n)$,其对于输入信号 $x(n)$ 的响应 $y(n)$ 可以由卷积方程表示:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k) \cdot h(n - k) \quad (5-2)$$

由于计算机的容量是有限的,需要对实际的问题作一定的简化处理。本章仅限于讨论离散系统中有限长序列的卷积反演问题。假定有限时长的输入序列 $x(n)$ 、输出序列 $y(n)$,以及系统脉冲响应序列 $h(n)$ 的序列长度分别为 N_x 、 N_y 及 N_h ,且, $N_y = N_x + N_h - 1$ 。此时有:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=0}^{N_x-1} x(k) h(n - k) \quad (5-3)$$

已知 $y(n)$ 和 $h(n)$, $n=0,1,\dots,N_x-1$,可唯一地确定 $x(n)$ 。以矩阵形式表达:

$$\begin{bmatrix} h(0) & 0 & \cdots & 0 \\ h(1) & h(0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h(N_x-1) & h(N_x-1) & \cdots & h(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N_x-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(N_x-1) \end{bmatrix} \quad (5-4)$$

时域恢复实质即求解线性方程组(5-4)，解为：

$$\begin{cases} x(0) = y(0) / h(0) \\ x(k) = \{y(k) - \sum_{i=0}^{k-1} h(k-i)x(i)\} / h(0) \end{cases} \quad (5-5)$$

其中， $k=1, 2, \dots, N_x-1$

无论系统是否含零点,反卷积运算都可以得到唯一确定的解。

图5-2是位移计测试的单机车头通过32m简支梁的动挠度信号。位移计是相对测量方法，具有低通性质，基本上反映了动挠度信号。DP传感器的输出信号由5-3给出。图5-4给出反卷积运算的信号恢复结果。

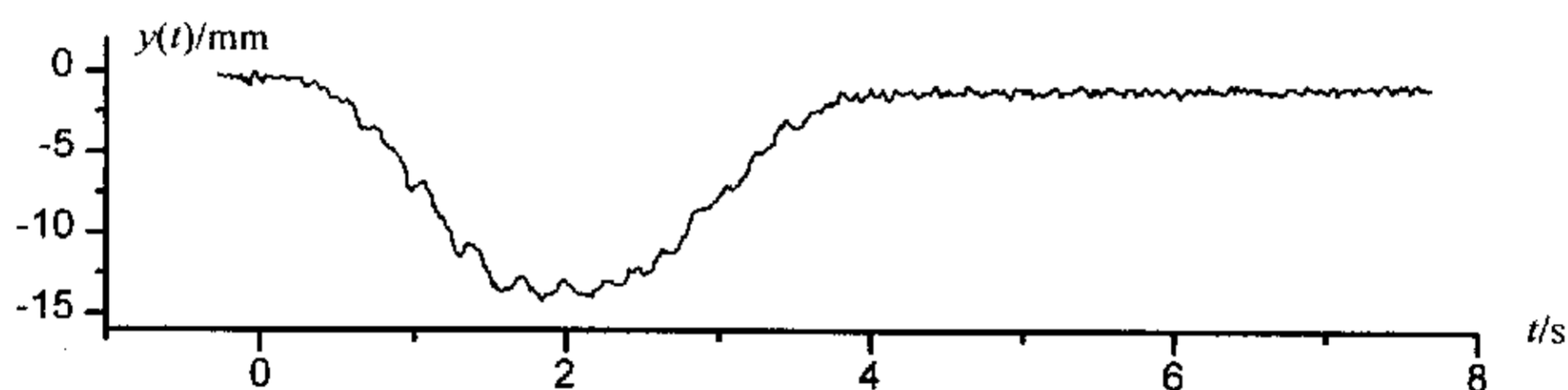


图 5-2 位移计测试的动挠度信号

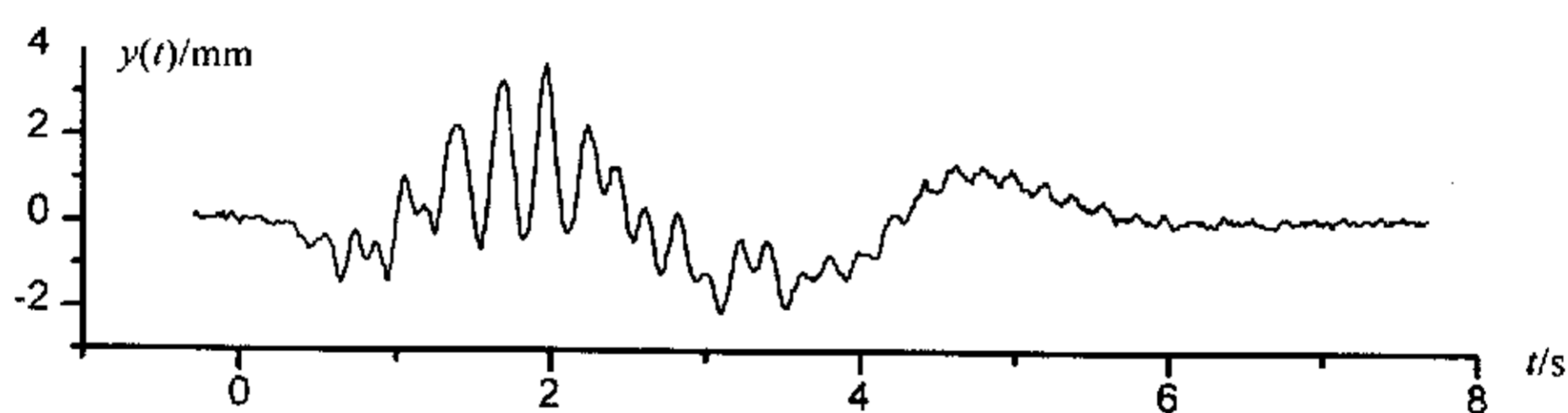


图 5-3 DP 传感器输出的动挠度信号

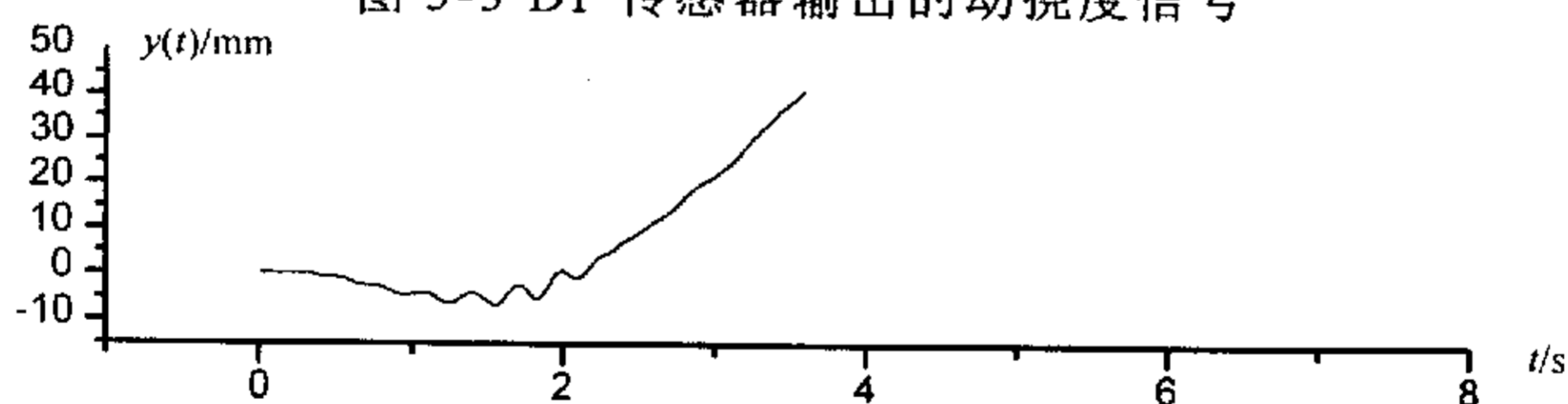


图 5-4 反卷积运算恢复的动挠度信号

可以看到，直接反卷积运算的结果与实际的动挠度信号具有很大的差异，可以说基本不能反映实际的动挠度信号。这是因为利用式(5-5)的求解过程实际上是一种回代过程。当 $y(n)$ 存在误差，或存在计算误差时，求解

过程将是十分严重的误差积累过程。

5.2 频域方法：DFT方法

我们知道，若序列 $y(n)$ 是 $x(n)$ 和 $h(n)$ 的圆卷积，即

$$y(n)=x(n)\otimes h(n) \quad (5-6)$$

而 $Y(k)$, $X(k)$, $H(k)$ 分别是 $y(n)$, $x(n)$, $h(n)$ 的离散傅里叶变换，

$$Y(k)=\text{DFT}[y(n)]$$

$$X(k)=\text{DFT}[x(n)]$$

$$H(k)=\text{DFT}[h(n)]$$

则 $Y(k)$, $X(k)$, $H(k)$ 满足下面的关系：

$$Y(k)=X(k)H(k) \quad (5-7)$$

由于DFT存在快速算法，因此线卷积的计算问题 $y(n)=x(n)*h(n)$ ，在把 $x(n)$ 和 $h(n)$ 补足够长的零之后，可以转化为圆卷积问题。这样，就可以利用FFT实现卷积的快速计算。

5.2.1 稳态信号恢复：

在实际的振动测量中，有时候可以认为振动信号是周期性的，比如，平稳运行的水力发电机组的振动。此时，通过对信号的整周期同步采样，可以很简单地实现对信号的恢复处理。对于线性测试系统，在稳态激励下系统输出呈稳态，测试系统频率响应函数 $H(j\omega)$ 与系统输入 $X(j\omega)$ 、输出 $Y(j\omega)$ 之间满足关系：

$$Y(j\omega)=X(j\omega) \cdot H(j\omega) \quad (5-8)$$

如果不考虑含零点的系统，即 $H(j\omega) \neq 0$ ，信号恢复处理表达为：

$$X(j\omega)=Y(j\omega)/H(j\omega) \quad (5-9)$$

经过富里叶逆变换，就可以获得经过重建的反映时域输入的信号 $x(t)$ 。

稳态信号恢复的步骤如下：

(1) 整周期采样。考虑周期信号 $y_p(t)$ 以 T 为周期，而且它是频域限带信号，最高频率分量为 f_h 。对 $y_p(t)$ 作整周期同步采样，一个周期 T 内的采样点

为 N ， N 满足采样定理，即有： $N/T > 2f_h$ ，得到样本 $y(n)$ ， $n=0,1,\dots,N-1$ ；

(2) 对 $y(n)$ 作 FFT，得到序列 $Y(k)$

$$Y(k) = \text{FFT}[y(n)] \quad k=0,1,\dots,N-1$$

(3) 对 $Y(k)$ 作以下补偿处理，得到序列 $X(k)$

$$X(k) = \frac{Y(k)}{H(j\frac{2\pi k}{T})} \quad k=0,1,\dots,N-1 \quad (5-10)$$

这里， $H(j\frac{2\pi k}{T})$ ， $k=0,1,\dots,N-1$ ，是测量装置的频率响应函数。

(4) 对序列 $X(k)$ 作离散富里叶逆变换：

$$x(n) = \text{IDFT}[X(k)], \quad n=0,1,\dots,N-1$$

这种补偿办法实际上相当于在测量装置的输出之后，级联了一个频率响应函数为 $1/H(j\omega)$ 的补偿网络，从而获得频率响应函数恒为 1 的、具有理想传输特性的测量系统。

水力发电机组的转速一般约为六十几转/分，机组振动信号中由涡旋引起的振动，频率低至 $0.3 \sim 0.5\text{Hz}$ 左右。选用固有频率为 0.5Hz 的 DP 型地震式低频振动传感器监测机组振动， 0.5Hz 附近的频率成分，幅值存在一定的衰减，相位的失真尤其严重。相角信息对于故障诊断是十分重要的。应用上述的恢复处理方法，对传感器已畸变的输出作校正，就有可能获得振动信号准确的振幅与相位。

5.2.2 时限信号恢复

DFT 方法是稳态处理方法，要把此方法用于暂态信号的恢复，首先应解决理论上的困难。在输入信号是有限时长的情况下，可以通过“周期化”的方法将暂态信号当成稳态信号进行处理。

周期化方法 1：

有限时长的输入信号，通过一个稳定的测量系统，可以认为测量系统经过足够长的、有限的时间后就能恢复到零位。在测量系统复原以后，若再重复上一次的激励，则系统也将重复上一次的输出，并经同样的时间间隔后再一次复原。这样，我们就可以以足够的精确度把这种暂态过程看作是

周期过程来处理。经过人为的“周期化”处理，可以把系统对有限时长信号的响应过程看作周期性信号的一个周期。图5-5示意给出上述周期化处理过程。

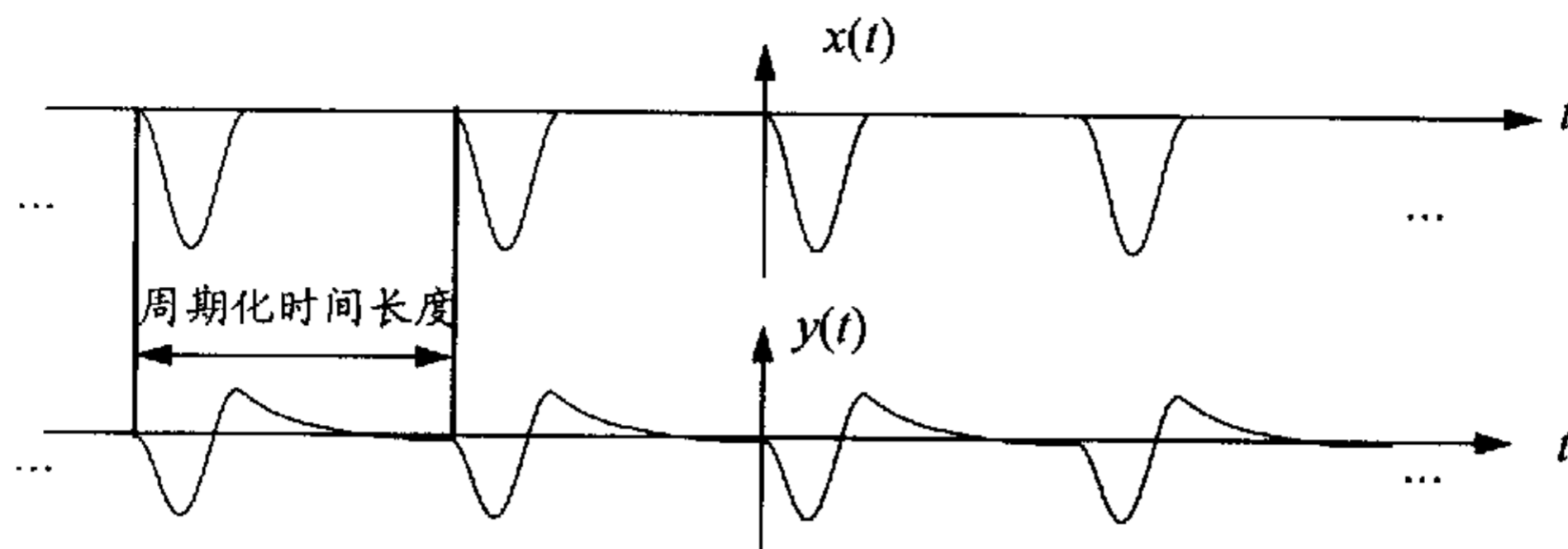


图5-5 时限信号的周期化处理过程

此外，如果输入信号没有发生尖锐变化，可以近似认为输入信号是频域限带的。在保证采样频率足够高的条件下，可以认为没有混叠。这样，有限时长的瞬态输入信号就类似于限带的周期信号，仍然可以用前面讨论的恢复方法进行频率特性修正。

以上的讨论中，实际上隐含了两个近似步骤：

- (1) 对无限延续的传感器响应作时域截断；
- (2) 对无限带宽的输入频谱作频域截断，忽略信号过高的频率分量。

在实际工程测量中，这两个近似步骤都不会带来可以觉察的误差。

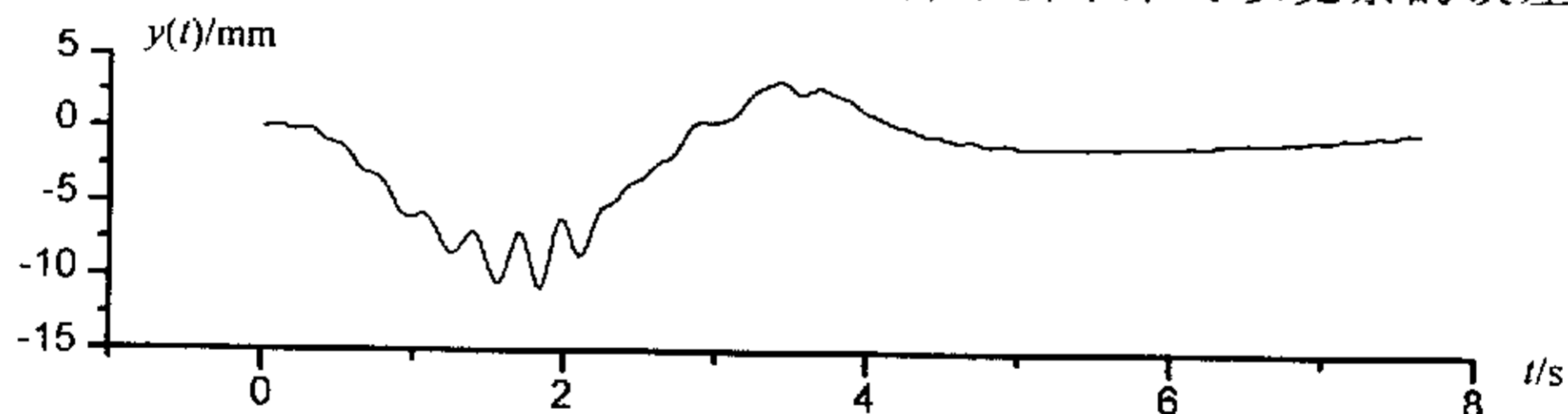


图 5-6 利用周期化方法 1 的桥梁动挠度的 DFT 恢复结果

对于图5-3所示的DP传感器的输出信号，在进行了周期化后，利用DFT方法的动挠度信号恢复结果如图5-6所示。该方法的结果与位移计的测试结果已经有了一定的可比性，但在动挠度信号结束后，该方法的结果仍有一定的鼓包，这是受噪声影响的表现。

周期化方法2:

方法1中把信号的输入开始到系统的复原的时间作为一个周期。实际上,可以采用更短的时间,即激励信号的持续时间作为周期来进行周期化。

设 $x(t) = \begin{cases} x(t) & 0 \leq t < T \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$, 系统 $h(t)$ 对 $x(t)$ 的响应为 $y(t)$

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (5-11)$$

将 $x(t)$ 以 T 为周期进行周期化, 得到信号 $x_p(t)$

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t - kT) \quad (5-12)$$

$x_p(t)$ 是以 T 为周期的稳态信号, $h(t)$ 对 $x_p(t)$ 的响应 $y_p(t)$ 也是以 T 为周期的稳态信号。

$$y_p(t) = x_p(t) * h(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t - kT) * h(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y(t - kT) \quad (5-13)$$

可见, $y_p(t)$ 是将 $y(t)$ 进行一系列的时延, 然后叠加的结果。如图5-7所示。

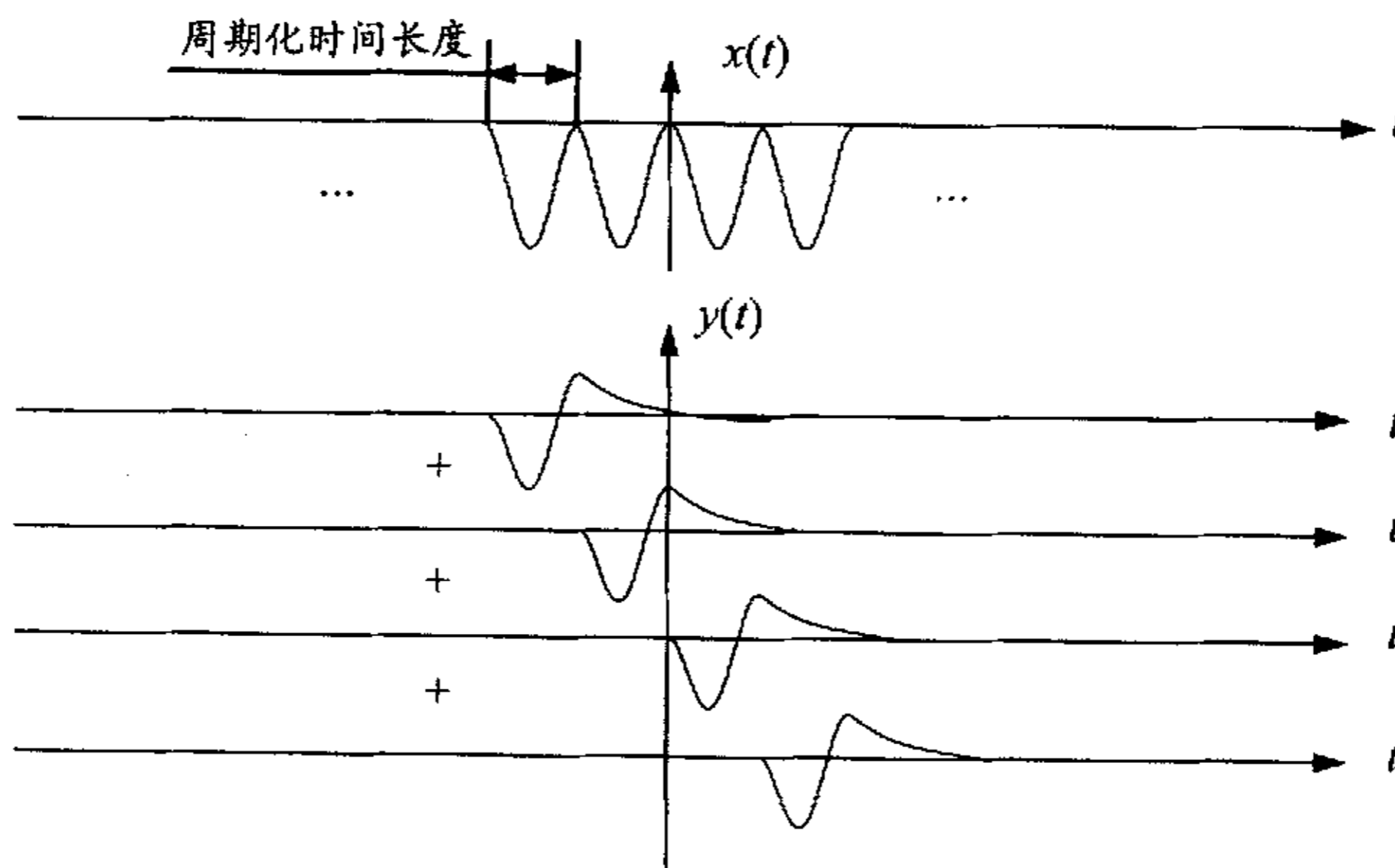


图 5-7 时限信号的周期化方法 2

将暂态信号进行这样的周期化后, 就可以利用DFT的方法进行信号恢复。此方法周期化过程中采用的周期 T 比方法1中的要短, 因此决定波形形状的第一根谱线的频率就要高一些, 这对抑制噪声是有利的, 因为恢复过程中处在分母位置上的 $H(1)$ 的数值变大了, 噪声被放大的倍数减小了。图

5-8给出了按照此方法进行周期化后用DFT方法恢复后的动挠度结果。DP传感器的输出信号仍然采用图5-2的数据。

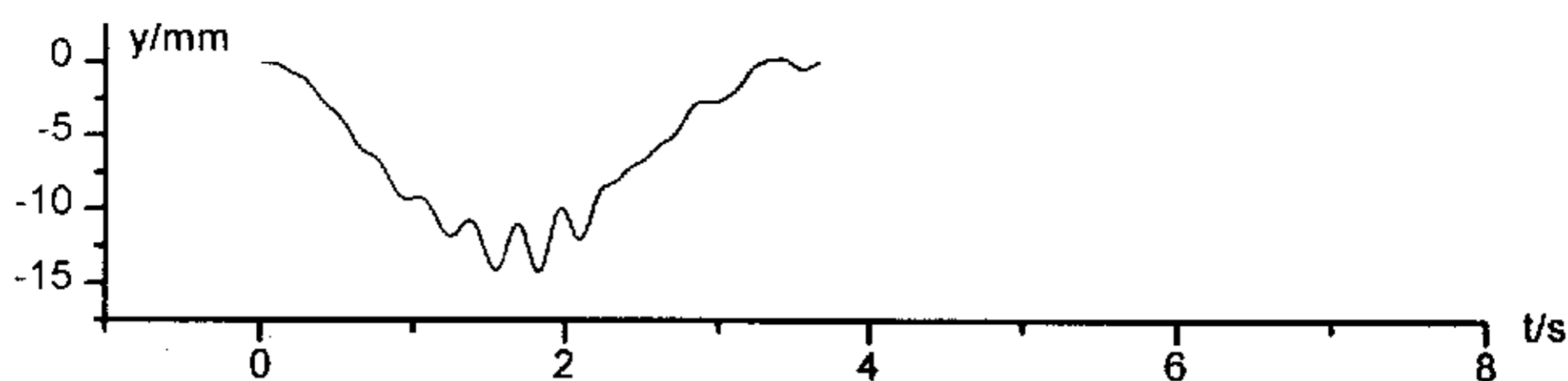


图 5-8 利用周期化方法 2 的桥梁动挠度的 DFT 恢复结果

5.2.3 系统零点的处理

在DFT方法中,由于牵扯到除法运算,因此要求系统的频率特性中不含零点。如果系统含有零点,比如 $H(k_i)=0$,不考虑噪声影响,系统的输出 $Y(k_i)$ 也应该为零,此时DFT的恢复过程成为 $\frac{0}{0}$ 的不定型。对于DP型地震式低频振动传感器,系统的零点在直流。应用DFT方法作恢复处理,在直流将出现结果不定的困难。

在实际应用中,可以用以下的方法对零点进行处理。

$$\begin{cases} X_1(k) = \frac{Y(k)}{H(k)} & k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1; \\ X_1(0) = 0 \end{cases} \quad (5-14)$$

$$x_1(n) = \text{IFFT}\{X_1(k)\}$$

若已知某时域点的值,如 $x(i)=c$, $i \in [0, N-1]$ 。令 $\Delta = x_1(i) - c$, 则有:

$$x(n) = x_1(n) - \Delta, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5-15)$$

5.3 时域方法和频域方法的统一性

从上面的分析看到,信号恢复在时域和频域似乎有矛盾的结果:从时域看,无论系统是否有零点,恢复过程总是有唯一的结果;而在频域,如果系统存在零点,则会出现奇异现象。事实上,对于同一个问题,不论从哪个角度考虑,都应该有相同的结论。以下的分析可以说明,信号恢复在时域和频域是完全等价的。

我们知道，系统的频率特性描述的是系统在稳态激励作用下的响应特性，因此我们在利用系统的频率特性进行信号恢复的时候必须在稳态的前提下进行，这也是我们必须首先将暂态信号进行周期化的原因。在时域进行信号恢复就不需要稳态的前提，这种前提的差异造成这两种信号恢复方法的差异。为了讨论这两种方法的关系，我们必须首先将这两种方法置于同一个前提下。

我们首先给出圆卷积算子的定义。

定义5-1 (圆卷积算子) 圆卷积算子 $T_{\otimes}: C^N \rightarrow C^N$ 是这样定义的：对每个 $x \in C^N$, $x=[x(n)]^T$, $n=0, 1, 2, \dots, N-1$, 它在值域中的像 $y=T_{\otimes}x=[y(n)]^T$, $n=0, 1, 2, \dots, N-1$ 由下式决定

$$y(n)=x(n)\otimes h(n) \quad (5-16)$$

其中， $h(n)$ 为长度为 N 的序列， \otimes 为圆卷积符号。 T_{\otimes} 的矩阵形式为：

$$T_{\otimes} = \begin{bmatrix} h(0) & h(N-1) & \cdots & h(2) & h(1) \\ h(1) & h(0) & \cdots & h(3) & h(2) \\ h(2) & h(1) & \cdots & h(4) & h(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h(N-1) & h(N-2) & \cdots & h(1) & h(0) \end{bmatrix}_{N \times N} \quad (5-17)$$

一个圆卷积算子对应一个序列 $h(n)$ 。

下面的定理给出了暂态响应和稳态响应的关系。

定理5-1 设一线性移不变系统的冲击响应为 $h(n)$, $n=0, 1, 2, \dots$, 周期信号 $x_p(n)$ 的周期为 N , $x_p(n+N)=x_p(n)$, $h(n)$ 对 $x_p(n)$ 的稳态响应为 $y_p(n)$ 。取 $x_p(n)$ 的一个周期 $x(n)$ $n=0, 1, 2 \cdots N-1$ 组成矢量 $x=[x(n)]^T$, 则矢量 $y=T_{\otimes}x$ 中元素构成 $y_p(n)$ 的一个周期。 T_{\otimes} 对应的序列 $h(n)$ 为：

$$h(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(n+k \cdot N) \quad n=0, 1, 2 \cdots N-1. \quad (5-18)$$

证明：

$$\begin{aligned} y_p(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_p(k) \cdot h(n-k) \\ &= \sum_{i=-\infty}^0 \sum_{k=n-N+1}^n x_p(k+i \cdot N) \cdot h(n-k-i \cdot N) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=n-N+1}^n \sum_{i=-\infty}^0 x_p(k+i \cdot N) \cdot h(n-k-i \cdot N) \\
 &= \sum_{k=n-N+1}^n \left(x_p(k) \cdot \sum_{i=-\infty}^0 h(n-k-i \cdot N) \right) \\
 &= \sum_{k=n-N+1}^n \left(x_p(k) \cdot \sum_{i=0}^{+\infty} h(n+i \cdot N-k) \right)
 \end{aligned}$$

$$\text{令 } \tilde{h}(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} h(n+k \cdot N)$$

$$\text{则 } y_p(n) = \sum_{k=n-N+1}^n x_p(k) \cdot \tilde{h}(n-k)$$

即

$$y(n) = x(n) \otimes \tilde{h}(n)$$

命题得证。

在这里，我们对定理5-1作一点说明。一个线性系统的冲击响应 $h(n)$ 可以是任意长度的，包括有限长度和无限长度。对于任意的线性系统，系统对激励的响应是冲击响应和激励信号的线卷积。线性系统在周期为 N 的周期信号的激励下的稳态响应也是周期为 N 的周期信号，稳态响应的一个周期是激励信号的一个周期与某个信号 $\tilde{h}(n)$ 的圆卷积。但圆卷积要求两个信号的长度是相等的，因此与激励信号的一个周期作圆卷积的并不是冲击响应 $h(n)$ ，而是 $h(n)$ 经过式(5-18)的变换后得到的长度为 N 的信号 $\tilde{h}(n)$ 。 $\tilde{h}(n)$ 与 $h(n)$ 有密切的关系， $\tilde{h}(n)$ 的DFT即是 $h(n)$ 的Z变换在单位圆上的 N 点均匀抽样。

定理5-2 矩阵 T_{\otimes} 与一对角阵相似，即

$$WT_{\otimes}W^{-1} = \Delta = \begin{bmatrix} H(0) & & & \\ & H(1) & & 0 \\ & & H(2) & \\ & 0 & & \ddots \\ & & & & H(N-1) \end{bmatrix} \quad (5-19)$$

其中， $H(k) = \text{DFT}[\tilde{h}(n)]$ ， $w = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w^{1 \times 1} & w^{1 \times 2} & \cdots & w^{1 \times (N-1)} \\ 1 & w^{2 \times 1} & w^{2 \times 2} & \cdots & w^{2 \times (N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{(N-1) \times 1} & w^{(N-1) \times 2} & \cdots & w^{(N-1) \times (N-1)} \end{bmatrix}$$

$$W^{-1} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w^{-1 \times 1} & w^{-1 \times 2} & \cdots & w^{-1 \times (N-1)} \\ 1 & w^{-2 \times 1} & w^{-2 \times 2} & \cdots & w^{-2 \times (N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{-(N-1) \times 1} & w^{-(N-1) \times 2} & \cdots & w^{-(N-1) \times (N-1)} \end{bmatrix}$$

证明：列矢量左乘 W 矩阵，就是对组成该列矢量的序列作DFT。组成 T_{\otimes} 的各列矢量间是循环位移关系，所以有

$$WT_{\otimes} = \begin{bmatrix} H(0) & H(0) & \cdots & H(0) \\ H(1) & H(1)w^1 & \cdots & H(1)w^{N-1} \\ H(2) & H(2)w^2 & \cdots & H(2)w^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ H(N-1) & H(N-1)w^{N-1} & \cdots & H(N-1)w^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}_{N \times N}$$

设 $\Delta = WT_{\otimes}W^{-1} = [\alpha_{mn}]_{N \times N}$ $m, n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ，则

$$\alpha_{mn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(m) w^{mk} w^{-kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(m) w^{k(m-n)} = \begin{cases} H(m) & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

所以， Δ 是以 $H(k)$ 为对角元的对角阵，命题得证。

由上面两个定理可以得到这样的结论： T_{\otimes} 的逆算子 T_{\otimes}^{-1} 存在的充要条件是 $H(k) = \text{DFT}[h(n)] \neq 0, k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ 。这个结论指出了在稳态情况下时域和频域信号恢复的统一性。系统频率特性没有零点时，可以完全恢复输入信号；当系统频率特性存在零点时，矩阵 T_{\otimes} 也是奇异的， T_{\otimes}^{-1} 不存在，此时只能恢复原信号的部分信息，系统零点所对应的信息已完全丢失，是不可恢复的；零点附近的信息则严重地被衰减，极易受到噪声的干扰，恢复过程表现为病态。

在稳态信号恢复中，时域和频域具有相同的结论。在利用周期化的方法将暂态当成稳态信号进行处理的时候，时域方法和频域方法表现出差别，这是因为两种方法利用了不同的信息。在信号没来之前，系统处于零状态，

这种零状态造成了时域恢复方法中方程组系数矩阵的下三角性质，所以时域信号恢复可以得到唯一确定的结果。但是时域方法并没有充分利用所有的信息，比如信号的时限特征。DFT的方法也没有充分利用所有的信息，在进行周期化的时候，信号的部分信息被丢失了，这种信息的丢失造成DFT方法的不适定性。

时域中的反卷积方法和频域中的DFT方法由于利用的信息不同而表现出差异，而这两种方法在对信号恢复而言都不太理想：时域中的反卷积方法存在严重的误差积累；DFT方法中存在不适定现象，并且在低频段由于小数值出现在分母的位置上而出现病态。但由此我们可以得到一个启示，如果能够充分地利用信息，有可能得到更好的恢复结果。事实上病态问题正是由于信息的缺乏造成的，在下一章中本文将详细地讨论病态问题的起因及解决办法。

5.4 本章小结

桥梁动挠度信号是时限低频信号，具有直流成分，惯性的测量方法必然存在失真，必须采用信号恢复的方法才有可能得到真实的信号。

- 不管系统是否有零点，时域中的反卷积的信号恢复方法可以得到唯一确定的结果，但会出现严重的误差积累现象。

- 暂态信号在经过周期化处理后可以当作稳态信号来处理。一般周期化时间长度取传感器的复原时间，而本文提出的周期化方法2将周期化时间长度缩短到输入信号的持续时间，在抑制噪声方面有一定的优势。

- 频域中DFT的信号恢复方法在零点处出现不适定的现象，在零点附近由于小数值作分母而出现病态现象。

- 在稳态信号恢复中，时域方法和频域方法是完全等价的。对于暂态信号，时域方法和频域方法的差异是由于利用信息的不同而造成的。由此给我们带来的启示是充分地利用信息是解决病态问题的途径。

第6章 基于Hilbert空间理论的信号恢复算法研究

信号恢复(Signal Recovery)在工程中有着广泛的应用。例如,在电子显微学、x射线晶体学和天文学等领域,往往只记录了衍射图或干涉图的幅度和强度,而要求我们根据幅度或强度恢复原信号,这就是所谓的“相位补偿问题”。在地磁场的研究中,检验地球岩芯能使我们获得磁场的方向曲线,但得不到强度值,因此希望相位或方向曲线获得磁场的强度或幅度,这是所谓的“幅度补偿问题”。在图象处理中,由于焦距不准而引起图象严重模糊,为了清楚这种模糊,人们发现,由于镜头的对称性,散焦只影响图象的幅度而不影响其相位值,利用其相位函数恢复原图象,从而得到清晰的图象。另外,在语音处理、地震勘探、通讯等领域中,信号恢复都有广泛的应用。

在许多文献中,信号恢复也被称为信号重构(Signal Reconstruction)。采用这样的名词是为了强调利用已知的部分信号值来重构整个信号。但是,从部分已知数据重构信号,并不是说无条件地从部分已知的信息恢复未知的信息,因为信息是不能够无中生有的。因此信号能够被重构的前提条件是在给定的条件中已包含了信号的全部信息。也就是说,信号的全部信息只是以不同的方式表现出来。如果在给定的条件和数据中并不能完全表达所需要的信号,那么没有任何方法可以使信息无中生有。因此信号恢复和信号重构实际上是同一个概念。可以把信号恢复(或信号重构)定义为由已知条件求得真实信号的过程。

信号恢复有三个问题需要解决:

- 1.在满足什么样的条件下,可以完全地确定所需要的信号,这是解的唯一性问题。
- 2.已知条件对信号确定程度,这是解的病态程度问题。
- 3.合适的信号恢复的算法,这是解的最优性问题。

信号恢复(或信号重构)是信号处理中的重要问题,有大量文献,也有专门的著作,例如我国著名学者李衍达和常迥的“信号重构理论及其应用”^[91]。但多数文献一般只提到第一和第三个问题,第二个问题却很少有人讨论,但通过研究我们发现,在满足唯一性的条件下,问

题的病态程度是决定解的可靠性的重要因素。

从上一章的分析可以看到, 利用DP传感器的信号恢复桥梁动挠度的主要问题在于恢复过程中表现出严重的病态, 这种病态在时域反卷积中表现为误差的积累, 在频域则表现为零点的不适定以及零点附近小数值作分母的问题。在这一章中, 本文将详细研究信号恢复中的病态问题的起因及Hilbert空间中的信号恢复算法。

6.1 病态问题的机理

病态是一个数学概念。在线性代数中一般用条件数^[92]的概念来衡量矩阵的病态程度。条件数的计算要应用到矩阵的行列式的值和逆矩阵的行列式的值, 计算量非常巨大, 在实际问题中很难应用。工程中的病态问题一般都出现在逆问题中, 许多工程中的病态问题, 可以借助下面的概念来理解, 我们不妨叫它映射的广义条件数。

定义6-1(广义条件数): 设有可逆映射 $T: X \rightarrow Y$, X, Y 为度量空间。 x_1, x_2 为 X 中的任意两个不同的元素。则广义条件数定义为:

$$\text{cond}(T) = \sup \frac{d(x_1, x_2)}{d(Tx_1, Tx_2)} \quad (6-1)$$

$d(\cdot, \cdot)$ 表示求度量, \sup 表示上确界。

$\text{cond}(T)$ 反映了逆问题, 即由像求原像的过程的病态程度。 $\text{cond}(T)$ 越大, 病态程度就越高。我们可以定性地描述广义条件数的概念。映射 T 定义域中的两个元素, 如果它们之间的距离比较远, 而经过映射 T 的作用后, 它们的像之间的距离却比较近, 那么 $\text{cond}(T)$ 就比较高。也就是说, 对于逆问题由像求原像的过程, 如果对于像的观测存在微小的误差, 就有可能使求得的原像有较大的差异, 从而问题表现为病态。在实际的工程问题中, 当定义域中的元素间的距离超过误差所允许的范围, 而值域中的像之间的距离仍然小于观测噪声的时候, 逆问题就成为病态问题。

病态问题的极限是这样的, 对值域中的一个像在值域中有不同的原像与之对应, 此时映射 T 的逆映射是不存在的, 即对定义域中不同的元素, 经过映射 T 的作用后的像可以相同, 在线性代数中这种现象叫奇异。

病态问题是由于信息的缺乏造成的。在 $\text{cond}(T)$ 比较高的情况下，两个差别很大的元素，经过 T 的作用后的却变得相似，就是说映射 T 掩盖了两个元素的差别，或者说，映射 T 部分丢失了区别两个不同元素的信息。这种信息的丢失造成问题的病态。

工程问题的解决一般可以归纳为两个过程：

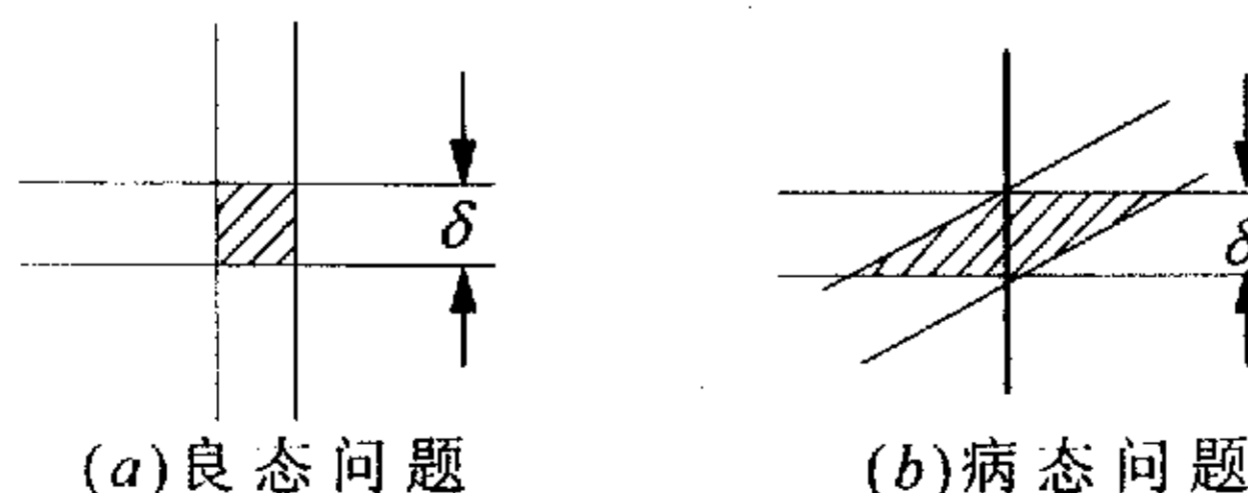
1. 将工程问题转化成数学问题，这个过程包括对问题的描述、建模、简化等。
2. 由数学问题得到问题的解。这个过程最常见的是解线性方程组，或者是一个迭代过程。

人们设计出了许多措施来使解算过程具有数值稳定性，例如 Gauss-Jordan 法通过选主元的方法来避免小主元作分母，奇异值分解 (SVD) 方法将矩阵分解成正交阵的形式^[93-94]，等等。但这些方法属于解决问题的第二个过程，它们能够起作用的前提是数学问题本身是良态的，它们只能解决由解算过程本身带来的数值的不稳定性。在工程中第一个过程才是决定问题性质的关键。因为病态是问题本身的性质，而与解算过程没有关系，如果问题本身是严重病态的，即使解算过程是完全精确的，也不能得到可靠的结果。严格地说，没有任何方法可以解决病态问题。问题的病态是由于信息的缺乏而造成的，因此解决病态问题的本质在于提供足够的信息，将病态问题转化为良态问题。

我们可以用一个最简单的例子来理解病态问题。



图 6-1 两条不平行的直线有一个交点



(a) 良态问题 (b) 病态问题
图 6-2 两条直线的夹角对误差带的影响

所有的二元一次线性方程组都可以归结成为两条直线的交点问题。当两条直线不平行时，交点是唯一的，如图6-1所示。这两条直线的夹角反映了问题的病态程度。在实际的测量中总有一定的观测噪声。对于同样的观测噪声，当两条直线的夹角比较大的时候，问题是良态的，特别是两条直线正交的时候，如图6-2(a)所示，解具有最小的误差带。当两条直线的夹角很小时，解的误差带就很大，问题就成为病态的，如图6-2(b)所示。当两条直线的夹角越来越小达到完全重合的时候，问题就成为奇异问题，具有多解。

平面上一个点需要在两个方向上加以限定。当两条直线的夹角很小接近平行时，实际只在一个方向上提供了限定，而在与这个方向垂直的方向上的限定却很弱，也就是说，在这个方向上的信息不够，于是造成了病态问题。

解决病态问题的唯一的方法是补充信息，将病态问题转化成良态问题。补充信息有两种实现方法：一种方法就是降低噪声水平，如果能将噪声降到足够低，那么解的误差就可以被限制在要求的范围之内。这种方法可以通过提高观测仪器的精度来实现，但工程中更广泛应用的是对同一观测对象进行反复测量，通过平均的方法来降低噪声。在桥梁动挠度信号恢复中这种做法是无法实现，因为动挠度信号是暂态信号，无法实现反复观测。另外的方法是提供适当的约束条件，比如在图6-2(b)中如果在与两条直线近乎正交的方向上提供约束，那么误差带将大大缩小，病态问题转化成良态问题。

我们在得到一个被噪声污染的信号之后，如果没有新的信息，则没有任何办法使其信噪比得到提高。比如，如果我们有这样的信息，实际的信号在某特定的频率范围之内，就可以用合适的频率滤波器将此频率范围之外的成分滤掉，从而使信号的信噪比提高了。再比如，如果我们有信号的频率和相位的信息，就可以实现对信号的锁定放大。锁定放大器相当于实现了一个非常窄带的带通滤波器，品质因数可以高达 10^8 ，可以对 μV 量级的信号实现放大，这是常规滤波器无法做到的，原因就是锁定放大利用了信号的频率和相位的信息，这种信息是靠参考信号提供的^[95]。

利用型DP传感器的信号恢复桥梁的动挠度，由于传感器的低频特性不足，造成信号的低频信息丢失，信号在低频段的信噪比极差，因此使信号恢复过程表现为严重病态。解决这个问题的本质在于提供足

够的低频信息,使问题转化成良态问题,才能得到稳定可靠的解。

许多研究工作围绕 $H(k)$ 有零点的卷积反演问题展开。成都电子科技大学的舒勤博士提出了利用罗必塔法则确定零点处反演结果的处理方法^[96-97],零点处通过求导获得反演结果。广义离散富里叶变换^[98]引入频域参数 α ,使得非零序列的广义富氏变换恒不为零,从而避开 $\frac{0}{0}$ 型的不定问题。还有其他的求解反卷积的方法^[99-102]。但这些方法因为没有利用更多的信息,从而效果都不理想。

文献^[103]提到的频域最小平方反卷积技术利用了动挠度信号的时限特征,可以比较好地恢复出持续时间较短的动挠度信号。该方法的问题在于误差函数中对低频分量的权重非常小,对直流分量的权重为0,所以对低频信号的约束很弱,对直流信号完全没有约束,因此结果仍然是不确定的,需要利用初始条件确定信号的零线。

Gerchberg-Papoulis算法^[104-108]是信号重构中的比较实用的算法。它由R.W.Gerchberg和A.Papoulis分别独立提出,反复利用傅里叶变换与反变换并加入已知条件进行迭代直至收敛。文献[90]利用该算法,比较充分地利用了桥梁动挠度信号计算结果提供的低频信息,从而得到比一般方法要好的动挠度信号恢复结果。该方法仍有不尽人意的地方:一方面它对信息的利用仍不够充分,它应用的是动挠度信号幅值的比例范围,是一种比较模糊的约束;另一方面它不具有最优性质,在噪声存在的情况下,迭代过程将出现震荡现象。

本章讨论的基于Hilbert空间理论的信号恢复算法,充分利用了有关动挠度信号的时限和静位移计算提供的先验信息,对低频信息起到强烈的约束作用,并利用投影的方法得到最优解。

6.2 Hilbert空间中的最佳逼近算法

Hilbert空间理论起源于Hilbert关于积分方程的研究。Hilbert空间是一种特殊的赋范空间。Hilbert空间中定义了内积的概念,诱导出相应的范数和度量,重要的是,由内积定义了正交的概念,从而使许多问题的描述非常明晰,简洁和漂亮。Hilbert空间有关的概念的可以参考附录。

逼近论是研究用较为简单的函数去逼近另一类函数的问题,例如用

多项式去逼近定义在某区间上的连续函数。在微积分中已出现过这种情况：若函数有一个泰勒级数，我们可以考虑用该级数的部分和去逼近这个函数。要想知道逼近的程度，就必须对相应的余项作出估计。

一般来讲，我们希望建立一个切实可行的判定逼近好坏的准则。给定两个函数集合 X 和 Y ，并考虑用 Y 中的函数去逼近 X 中的函数。我们要研究的是最佳逼近的存在性与唯一性问题，以及按照拟定的判定准则去构造最佳逼近元的问题。逼近问题的自然背景如下所述。

设 $X=(X, \|\cdot\|)$ 是一个赋范空间， Y 是 X 的一个子空间。任意给定 $x \in X$ ，若存在一个 $y_0 \in Y$ ，使得 $\|x - y_0\| = \inf_{y \in Y} \|x - y\|$ ，则称 y_0 为 x 在 Y 上的一个最佳逼近。

我们看到，最佳逼近 y_0 是 Y 中到 x 有最短距离的元素。这样的元素可能存在，也可能不存在，而且如果存在，最佳逼近也可能不止一个，这就出现了最佳逼近的存在性问题。最佳逼近的存在性问题的严格论述要用到严格凸性的概念，我们在这里只给出最佳逼近存在性的结论，详细的证明请参考文献^[110-111]。

定理6-1（最佳逼近） 在严格凸赋范空间 X 中， $x \in X$ 在给定的子空间 $Y \subset X$ 中至多有一个最佳逼近。

定理6-2 H 是一个希尔伯特空间，对每个给定的 $x \in H$ 和每个闭子空间 $Y \subset H$ ，则 x 在 Y 中有唯一的最佳逼近。

从定理6-2可以看到，在Hilbert空间中，元素在闭子空间中的最佳逼近存在并且唯一，此最佳逼近就是元素在此闭子空间上的投影。在实际工程问题中，如果问题的求解可以转化成此类问题，就可以用比较统一的方法得到唯一确定的解。有限维Hilbert空间中最佳逼近的求解过程可以通过下面的统一步骤完成。

若 Y 是有限维的，不妨设 $\dim Y = N$ ，我们能够用 Y 的基 $\{y_1, y_2, \dots, y_N\}$ 唯一地表示 y

$$y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_N y_N \quad (6-2)$$

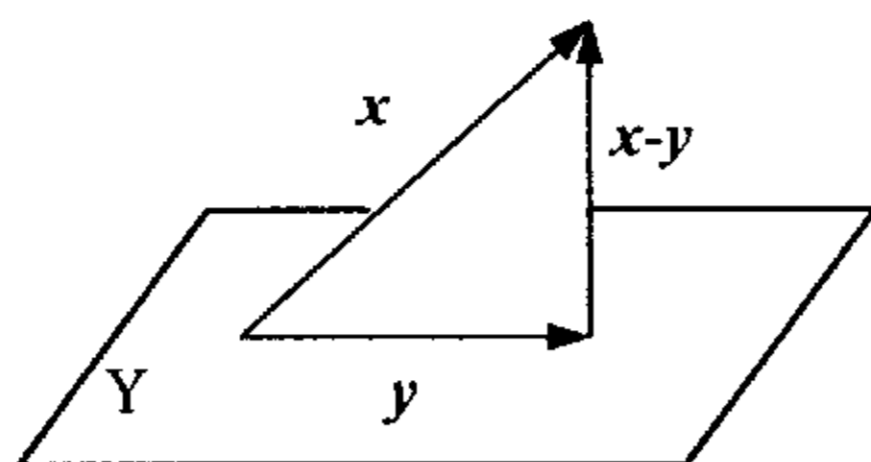


图 6-3 Hilbert 空间中元素在子空间上的投影

x 在 Y 上的投影满足 $x-y \perp Y$, 如图 6-3 所示, 得到 N 个条件

$$\langle x-y, y_i \rangle = \langle x - \sum \alpha_k y_k, y_i \rangle = 0 \quad (6-3)$$

即

$$\sum \langle y_k, y_i \rangle \alpha_k = \langle x, y_i \rangle \quad (6-4)$$

其中 $i=1, 2, \dots, N$ 。这是含有 n 个未知数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ 的含有 N 个线性方程的非齐次方程组。

$$\begin{bmatrix} \langle y_1, y_1 \rangle & \langle y_2, y_1 \rangle & \cdots & \langle y_N, y_1 \rangle \\ \langle y_1, y_2 \rangle & \langle y_2, y_2 \rangle & \cdots & \langle y_N, y_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle y_1, y_N \rangle & \langle y_2, y_N \rangle & \cdots & \langle y_N, y_N \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle x, y_1 \rangle \\ \langle x, y_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle x, y_N \rangle \end{bmatrix} \quad (6-5)$$

解方程组就可以得到 α_i 的值, 代入式 (6-2) 就得到 x 在 Y 中的最佳逼近 y 。在实际的工程中, 有些先验知识可以表达成子空间的形式。就是说, 观测值可以认为是某 Hilbert 空间中的一个元素, 此观测值通常受到噪声的影响, 因而具有随机性。如果我们具有先验知识, 则我们可以确定真实值应该被约束在某个子空间中, 那么, 该元素在子空间中的投影就是最佳逼近, 该最佳逼近满足约束条件, 并且与观测值具有最短距离。

6.3 Hilbert 空间中的信号恢复技术

定义 6-2 (线卷积算子) 线卷积算子 T_* : $C^{N_x} \rightarrow Y \subset C^N$, $N=N_x+N_h-1$ 是这样定义的: 对每个 $x \in C^{N_x}$, $x=[x(n)]^T$, $n=0, 1, 2, \dots, N_x-1$, 它在值域中的像 $y=T_*x=[y(n)]^T$, $n=0, 1, 2, \dots, N-1$ 由下式决定

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{k=0}^{N_x-1} x(k) \cdot h(n-k) \quad (6-6)$$

其中, $h(n)$ 为长度为 N_h 的序列, $*$ 为线卷积符号。 T_* 的矩阵形式为:

$$T_h = \begin{bmatrix} h(0) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h(1) & h(0) & 0 & \cdots & 0 \\ h(2) & h(1) & h(0) & \cdots & 0 \\ \vdots & h(2) & h(1) & \ddots & 0 \\ h(N_h-1) & \vdots & h(2) & \ddots & h(0) \\ 0 & h(N_h-1) & \vdots & \ddots & h(1) \\ 0 & 0 & h(N_h-1) & \vdots & h(2) \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & h(N_h-1) \end{bmatrix}_{N \times N_h} \quad (6-7)$$

由定义看到，一个线卷积算子由一个序列 $h(n)$ 和定义域的维数 N_x 决定。

有了线卷积算子 T_h 的定义之后，把它作用于长度为 N_x 的序列所对应的 N_x 维列矢量，得到的像就是该序列经过对应 T_h 的 $h(n)$ 的响应。

6.3.1 线卷积算子的可逆性

定理6-3 T_h 逆算子 T_h^{-1} 存在的充要条件为 $h(n)$, $n=0, 1, 2, \cdots, N_h-1$ 不全为零。

证明：

(1) 假定 $h(n)$, $n=0, 1, 2, \cdots, N_h-1$ 不全为零，不失一般性，设 $h(n)=0$, $n=0, 1, \cdots, M-1$, $h(M) \neq 0$, 则

$$T_h = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h(M) & \vdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & h(M) & \vdots & \ddots & 0 \\ h(N_h-1) & \vdots & h(M) & \ddots & 0 \\ 0 & h(N_h-1) & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & h(N_h-1) & \vdots & h(M) \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & h(N_h-1) \end{bmatrix}_{N \times N_h} \quad (6-8)$$

可以看出 T_h 是列满秩矩阵，则有 $T_h x = 0 \Rightarrow x = 0$ ，即 T_h 逆算子存在。

(2) 若 $h(n)=0$, $n=0, 1, 2, \cdots, N_h-1$ ，则 T_h 为0算子， T_h^{-1} 不存在；即

若 T^{-1} 存在, 则 $h(n)$, $n=0, 1, 2, \dots, N_h-1$ 不全为零。

一个实际的系统总是能够满足 $h(n)$ 不全为零的条件, 这就说明了反卷积解的唯一性问题。

6.3.2 算法描述

考虑线卷积算子 $T: C^{N_x} \rightarrow Y \subset C^N$, $N=N_x+N_h-1$, 对于 C^{N_x} 中的任一元素 x 的像 y , 有:

$$y = T \cdot x \quad (6-9)$$

在某些情况下, 由于具有一定的先验知识, 矢量 x 被约束在 C^{N_x} 的某个闭子空间 X 内, $X \subset C^{N_x}$, 我们把这个空间称为约束子空间。设 $\dim X = N_c$ 。将 X 作为线卷积算子的定义域, 考虑 $h(n)$, $n=0, 1, 2, \dots, N_h-1$ 不全为零的情况, 由于线卷积算子是可逆的, 所以其值域 Y 的维数 $\dim Y = N_c$ 。

存在观测噪声的情况下:

$$y_\varepsilon = y + \varepsilon = T \cdot x + \varepsilon \quad (6-10)$$

由于噪声是随机的, 所以一般来说 y_ε 将不再属于 T 的值域 Y 。 y_ε 具有 N 个分量, $y_\varepsilon \in C^N$, 而 Y 是 C^N 中的一个闭子空间, 那么 y_ε 在 Y 上的投影 \hat{y} 为 y 的最佳逼近, 即:

$$\|y_\varepsilon - \hat{y}\| = \min_{y \in Y} \|y_\varepsilon - y\| \quad (6-11)$$

如果 C^N 上的内积的定义为

$$\langle x, y \rangle = \sum x(n)y(n) \quad (6-12)$$

则最佳逼近就是最小二乘意义的, 而按照此内积的定义, 误差函数的具体形式成为

$$\|y_\varepsilon - y\| = \|y_\varepsilon - T \cdot x\| = \sqrt{\sum [y_\varepsilon(n) - h(n) * x(n)]^2} \quad (6-13)$$

此误差函数具有明确的物理意义, 它的平方就是观测信号与估计信号之间残差的能量。

设 e_1, e_2, \dots, e_{N_c} 为约束子空间 X 的一组基, 由于 T^* 为可逆算子, 所以, 这组基经过 T^* 作用后也构成值域中的一组基, 即

$$\begin{aligned} e_1^* &= T \cdot e_1, \\ e_2^* &= T \cdot e_2, \\ &\dots \end{aligned} \quad (6-14)$$

$$e_{N_c-1}^Y = T \cdot e_{N_c}$$

为 T 值域 Y 的一组基。

在这里需要说明的是, T 的可逆性是非常重要的。如果 T 不是可逆的, 则 $e_1^Y, e_2^Y, \dots, e_{N_c}^Y$ 有可能是相关的, 不能构成值域的基。

设 y_ε 在 Y 上的最佳逼近为 \hat{y} , \hat{y} 可以由这组基唯一地表达:

$$\hat{y} = \alpha_1 e_1^Y + \alpha_2 e_2^Y + \dots + \alpha_{N_c} e_{N_c}^Y \quad (6-15)$$

按照上一节介绍的步骤, 系数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{N_c}$ 由以下线性非齐次方程组确定:

$$\begin{bmatrix} \langle e_1^Y, e_1^Y \rangle & \langle e_1^Y, e_2^Y \rangle & \dots & \langle e_1^Y, e_{N_c}^Y \rangle \\ \langle e_2^Y, e_1^Y \rangle & \langle e_2^Y, e_2^Y \rangle & \dots & \langle e_2^Y, e_{N_c}^Y \rangle \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \langle e_{N_c}^Y, e_1^Y \rangle & \langle e_{N_c}^Y, e_2^Y \rangle & \dots & \langle e_{N_c}^Y, e_{N_c}^Y \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{N_c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle e_1^Y, y_\varepsilon \rangle \\ \langle e_2^Y, y_\varepsilon \rangle \\ \vdots \\ \langle e_{N_c}^Y, y_\varepsilon \rangle \end{bmatrix} \quad (6-16)$$

解算这个线性方程组就可以得到系数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{N_c}$ 的值, 代入式 (6-15) 就得到 y_ε 在 Y 上的最佳逼近为 \hat{y} , 而相应的反卷积的结果为

$$\begin{aligned} \hat{x} &= T^{-1} \hat{y} \\ &= T^{-1} (\alpha_1 e_1^Y + \alpha_2 e_2^Y + \dots + \alpha_{N_c} e_{N_c}^Y) \\ &= \alpha_1 T^{-1} e_1^Y + \alpha_2 T^{-1} e_2^Y + \dots + \alpha_{N_c} T^{-1} e_{N_c}^Y \\ &= \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_{N_c} e_{N_c} \end{aligned} \quad (6-17)$$

到此为止, 我们得到了 Hilbert 空间中的最小平方反卷积算法。该算法得到的结果 \hat{x} 具有这样的特点: 首先, 它在约束子空间中, 满足约束条件, 其次, 它的像与观测矢量具有最短距离。

然而, 如何在实际工程中应用该算法呢? 观测矢量是不言而喻的, 就是传感器的输出信号组成的矢量, 内积的定义也十分明确, 关键是如何确定约束子空间。约束子空间需要依靠先验知识来进行确定。下面, 我们将讨论利用不同约束条件的反卷积技术。

6.4 利用时限约束的最小平方反卷技术

在上一章中, 我们讨论了用直接反卷积和 DFT 的信号恢复方法, 结果表明, 直接反卷积会引起较大的误差积累, 而 DFT 方法的结果也不理想。实际上, 在稳态处理中, 这两种方法是等效的。在列车过桥之后的一段时间内, 虽然传感器仍然有响应, 但桥梁的动挠度可以认为是零, 上面两种方法都没有利用这一条件, 因而结果不理想。可以想

象, 如果充分利用这一条件, 可以得到较好的结果。

设桥梁动挠度的持续长度为 N_x , 那么所有满足这一约束条件的信号可以用空间 C^{N_x} 来表达。取约束子空间 $X=C^{N_x}$, 对于一个实的系统, 如果选取 C^{N_x} 的一组基为

$$\begin{aligned} e_1 &= [1, 0, 0, \dots, 0]^T \\ e_2 &= [0, 1, 0, \dots, 0]^T \\ &\dots \\ e_{N_x} &= [0, 0, 0, \dots, 1]^T \end{aligned}$$

那么, 值域 Y 的基为

$$\begin{aligned} e_1^Y &= [h_0, h_1, h_2, \dots, h_{N_x-1}, 0, 0, 0, \dots, 0]^T \\ e_2^Y &= [0, h_0, h_1, h_2, \dots, h_{N_x-1}, 0, 0, \dots, 0]^T \\ &\dots \\ e_{N_x}^Y &= [0, 0, 0, \dots, 0, h_0, h_1, h_2, \dots, h_{N_x-1}]^T \end{aligned}$$

可以知道

$$\begin{aligned} \langle e_i^Y, e_j^Y \rangle &= \langle e_j^Y, e_i^Y \rangle = r_h(i-j), \\ \langle e_i^Y, y_e \rangle &= r_{yh}(i) \end{aligned}$$

则方程组(6-16)变为:

$$\begin{bmatrix} r_h(0) & r_h(1) & \dots & r_h(N_x-1) \\ r_h(1) & r_h(0) & \dots & r_h(N_x-2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ r_h(N_x-1) & r_h(N_x-2) & \dots & r_h(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{N_x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{yh}(0) \\ r_{yh}(1) \\ \vdots \\ r_{yh}(N_x-1) \end{bmatrix} \quad (6-18)$$

这是典型的Toeplitz方程组, $r_h(n), r_{yh}(n) \ n=0, 1, 2, N_x-1$ 可以利用FFT进行快速计算。如果采用一般的高斯消去法, 运算量与 N_x^3 成正比。但Toeplitz方程组方程组具有循环对称的性质, 采用Levinson-Durbin解法^[112], 运算量可降低到与 N_x^2 成正比。根据式(6-17), 反卷积的结果为

$$\hat{x} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{N_x}]^T \quad (6-19)$$

我们发现, 式(6-18)与维纳滤波^[113]具有完全相同的形式, 这是完全可以理解的: 在维纳滤波器的设计当中, 必须首先确定滤波器的长度, 这就相当于这里的时限约束。在式(6-12)的形式的内积的定义下, 时限约束的最小平反卷积技术中的残差与维纳滤波中的残差是完全相同的。如果采取其他的内积的定义, 时限约束的信号恢复技术将与维纳滤波有所不同。因此维纳滤波中的滤波器设计可以看作是时限约束的

最小平方反卷技术中的一个特殊情况。

实验：

1993年9月,用DP传感器测试单机车头过沂河大桥梁体的动挠度信号。该桥单跨度32m, 机车车速67.4km/h, 图6-4为现场使用位移计获取的结果, 基本上反映了真实的挠度变形。图6-5为DP传感器的输出信号。

由于低频(0.5Hz以下)信号幅值衰减, 相位畸变, DP传感器的输出信号不能真实反映挠度变形。利用时限约束的最小平方反卷积技术对此信号进行处理后的结果如图6-6所示。

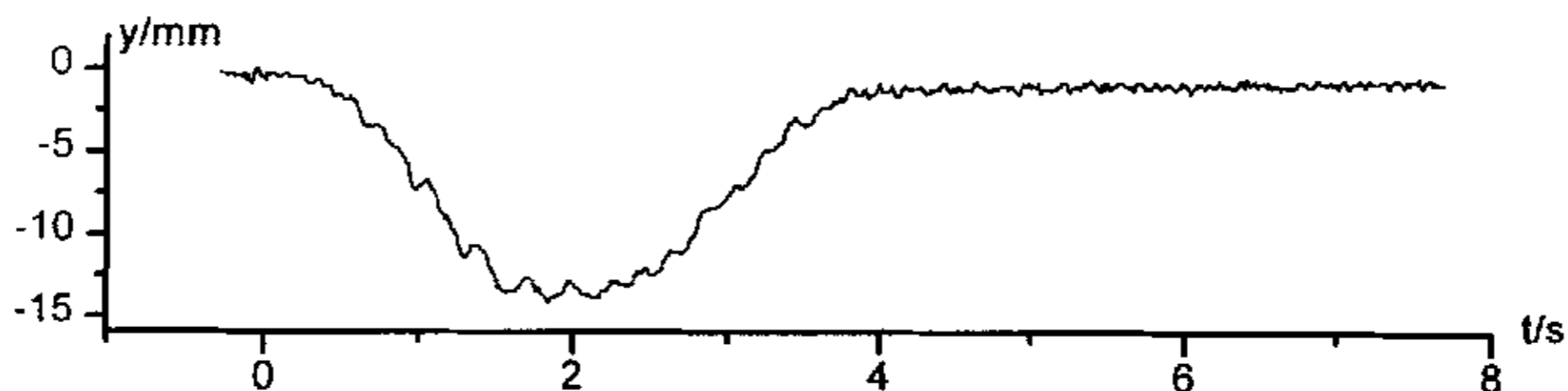


图 6-4 位移计的输出信号

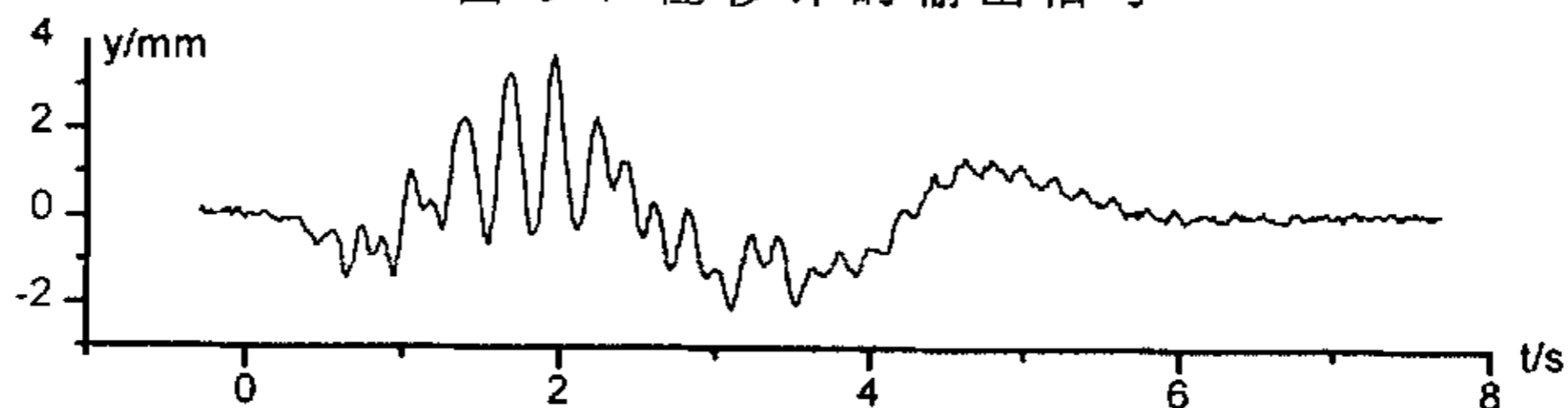


图 6-5 DP 传感器的输出信号

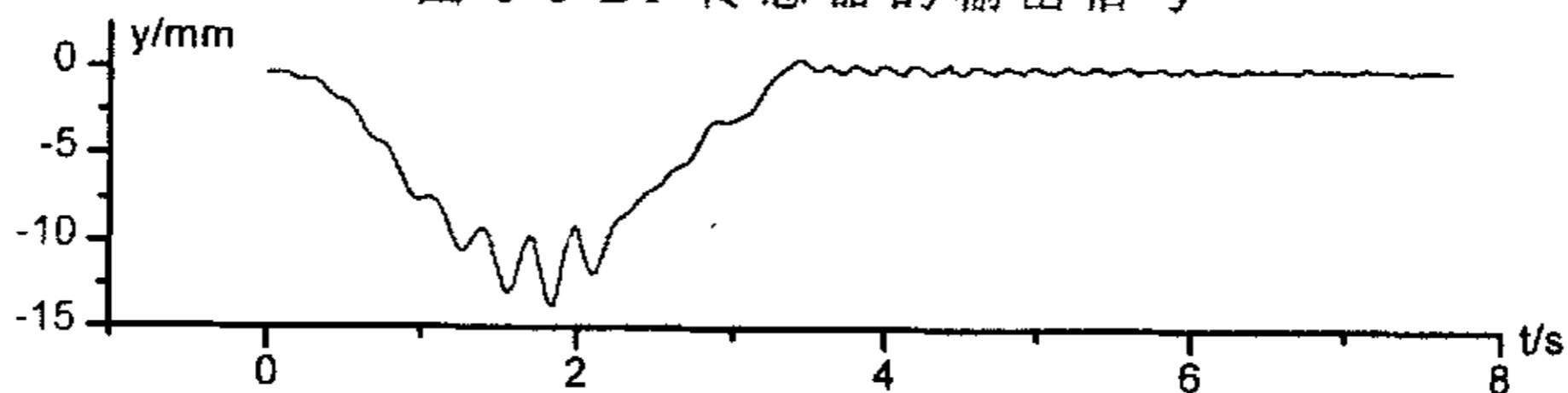


图 6-6 时限约束的最小平方反演的结果

利用时限约束的反卷积结果与位移计的测试结果仍然存在一定的差异。应该说明的是, 位移计的测试结果是存在误差的。例如DP传感器的测试结果表明, 桥梁动挠度信号中有明显的振动位移成分, 频率约为3Hz, 而位移计的测试结果中振动位移信号却没有明显地得到反映。

6.5 综合桥梁变形信息的信号恢复算法

时限约束是一种比较弱约束,只能用于持续时间不长的动挠度信号恢复。在列车的车厢比较多的情况下,动挠度信号的持续时间很长,只利用时限约束难以得到理想的结果。实际上,我们还可以获得桥梁和列车的其他有关信息,如果将这些信息运用到信号恢复过程中,可以期望得到更加理想的结果。

当列车以一定速度通过桥梁时,在列车移动荷载的作用下,桥梁梁体发生动态形变,即动挠度。桥梁的动挠度与其跨度相比是比较小的,因此,桥梁可以认为是线性系统,符合叠加原理。一般说来,车和桥都是动力学系统,例如客车的动力学模型一般由图6-7表示。列车过桥时桥梁跨中的动挠度响应一般包括两部分。一部分是由于移动荷载产生的静力效应,也称为桥梁的静位移;另一部分是由于荷载的速度效应和列车、轮轨以及桥梁组成的系统相互作用引起的振动。

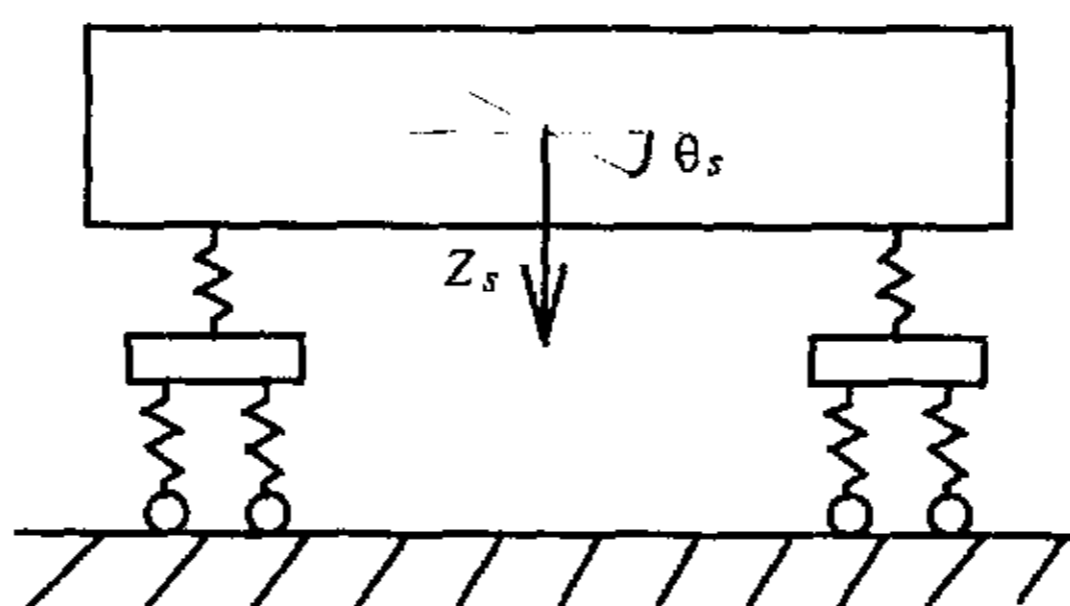


图6-7 客车动力学模型

桥梁振动受列车、线路以及桥梁动力性能和参数的影响,有很多参数误差较大,有些因素还受相互相位关系的影响,表现为一定的随机性。所以,用列车与桥梁相互作用动力模型计算得出的桥梁振动位移难以给出很高的精度。但大多数的铁路桥梁的垂直固有频率在1Hz以上,列车的垂直固有频率也在1Hz左右,所以动力引起的桥梁的振动,DP传感器可以比较容易地检测到。

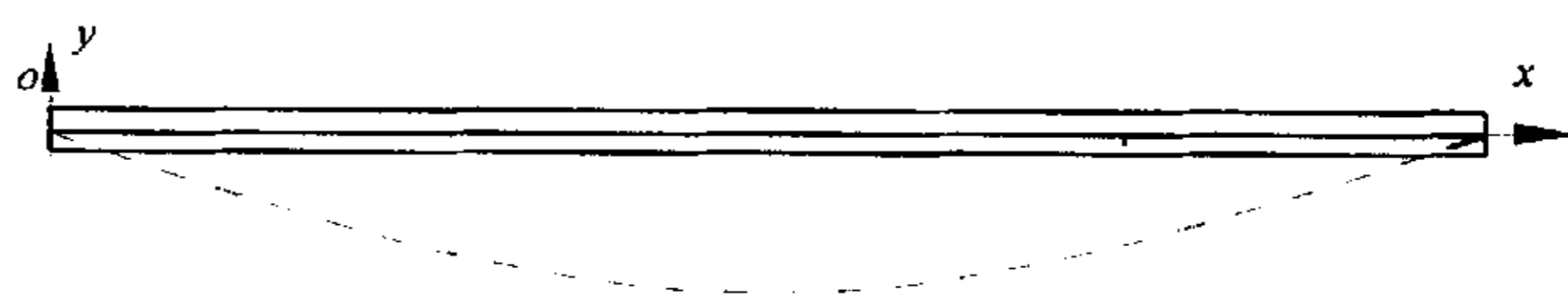
DP传感器用于动挠度测试的主要困难在于传感器的低频特性不够,造成低频信息丢失。信号在低频段完全淹没在噪声里,因此一般的信号恢复方法也难以得到理想的结果。桥梁的动挠度信号中的低频成分由静位移决定,而静位移可以以较高的精度加以计算,因此,如果把静位移的计算结果作为约束条件,可以对低频信号产生强烈的约束作

用，从而得到较为理想的桥梁动挠度的恢复结果。

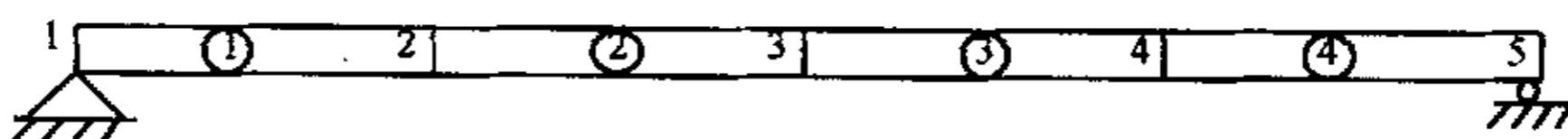
6.5.1 桥梁静位移的计算

仅由移动荷载静力效应产生的桥梁位移，一般采用解析法和有限单元法求解，相应的桥梁模型如图6-8所示。对于简单结构桥梁，采用解析法就可以获得比较好的计算结果。现对解析法^[116-117]简述如下：

假定如图6-8所示的梁具有对称平面，且在梁的弯曲中，梁的轴线始终保持在这一对称平面内。取梁未变形时的轴线方向为 x 轴，取对称平面内与 x 轴垂直方向为 y 轴。梁的挠曲线随时间变化为 $y(x, t)$ ，梁的挠曲方程可表示为式(6-20)：



(a). 桥梁连续模型



(b). 桥梁有限元模型

图6-8 桥梁模型

(a) 连续模型 (b) 有限元模型

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \sum_{i=1}^n P_i \delta_i \quad (6-20)$$

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & x = x_i; \\ 0 & x \neq x_i \end{cases}$$

式中， P_i 为第 i 个作用力， x_i 为 P_i 的作用位置；

E ：弹性模量， I ：惯性矩， EI 表示截面刚度。

边界条件为：

1. 支点处位移为0：即 $y|_{x=0} = y|_{x=l} = 0$

2. 铰支点弯矩为0，即 $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x=l} = 0$

通过方程(6-20)及相应的边界条件即可得出桥梁位移。

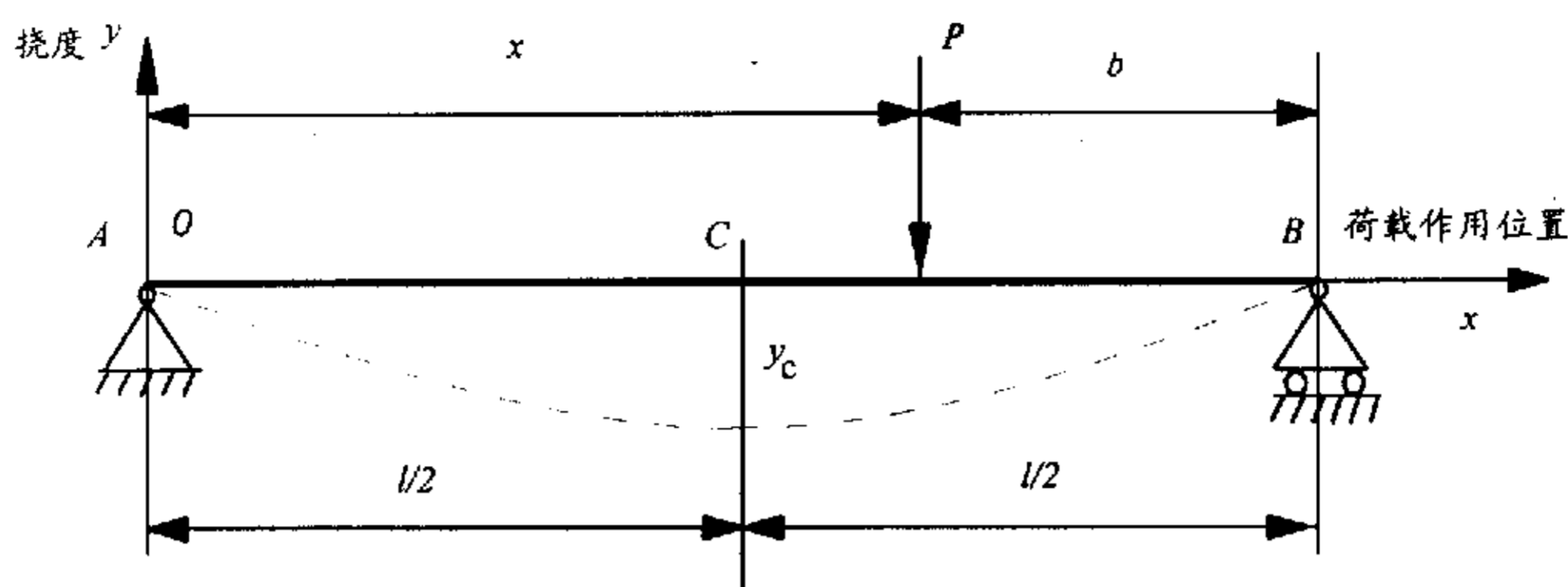


图6-9 单个移动荷载匀速通过简支梁

单个移动荷载匀速通过桥梁时，桥梁某点的挠度曲线可以通过计算得到。例如对于简支梁，在若一个移动的集中荷载 P 的作用下，如图6-9所示，跨中的挠度与 P 的作用位置满足如下关系：

- (1). 当 $x < l/2$ 时，跨中截面位于 AC 段，此时，跨中挠度为：

$$y_c = \frac{-P(l-x)}{48EI} [3l^2 - 4(l-x)^2] \quad (6-21)$$

- (2). 当 $x > l/2$ 时，跨中截面位于 CB 段，此时，跨中挠度为：

$$y_c = \frac{-P(l-x)}{48EI} [3l^2 - 4(l-x)^2] - \frac{P}{6EI} \left(\frac{l}{2} - x\right)^3$$

- (3). 当 $x = l/2$ 时，即 P 作用于跨中，此时，跨中截面挠度最大，有：

$$y_c = \frac{-Pl^3}{48EI}$$

跨中截面挠度与集中荷载 P 作用位置的关系曲线如图6-10所示。跨中动挠度时间曲线与之形状相同，只是横坐标轴应除以集中荷载 P 的移动速度。

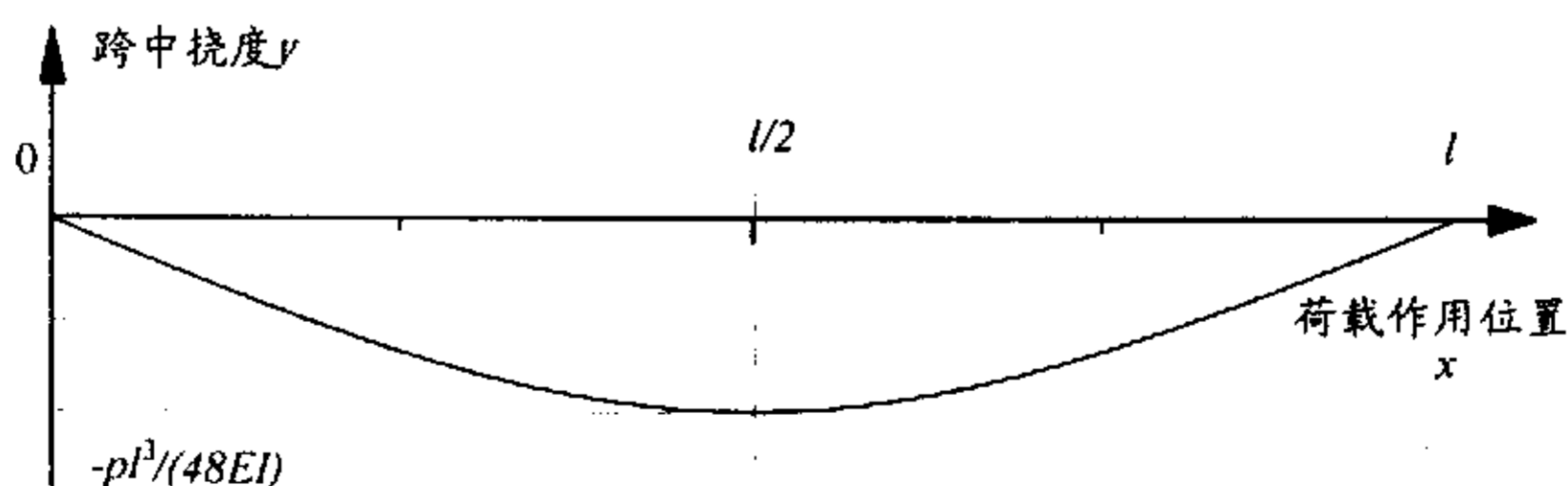


图6-10 单个移动荷载匀速通过简支梁时跨中截面挠度曲线

列车通过桥梁,等效于一串移动的荷载列作用于桥梁。每根轮轴对应于一个集中荷载,荷载力大小即轮轴的轴重,荷载列的间距取决于机车或车厢轮轴的间距。图6-11给出的是东风11型机车加挂客车车厢的荷载列。图中未注单位为米。

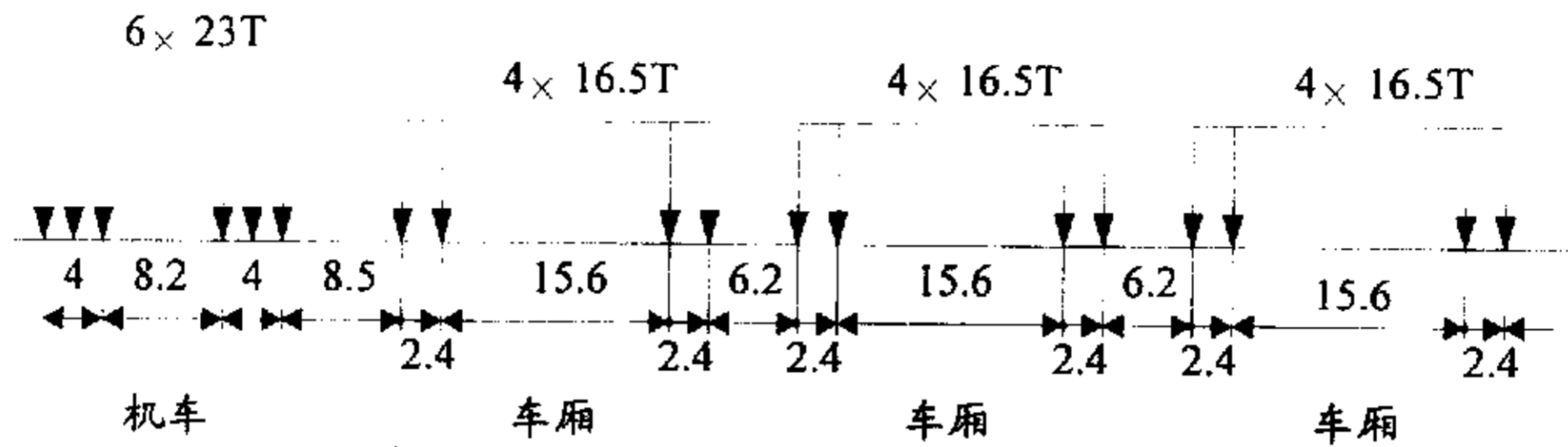


图 6-11 列车编组荷载图

图6-12给出64m简支梁桥静位移的计算结果,车速140km/h。列车编组为东风11型机车加挂6节车厢,尾部另加挂一台东风11型机车。

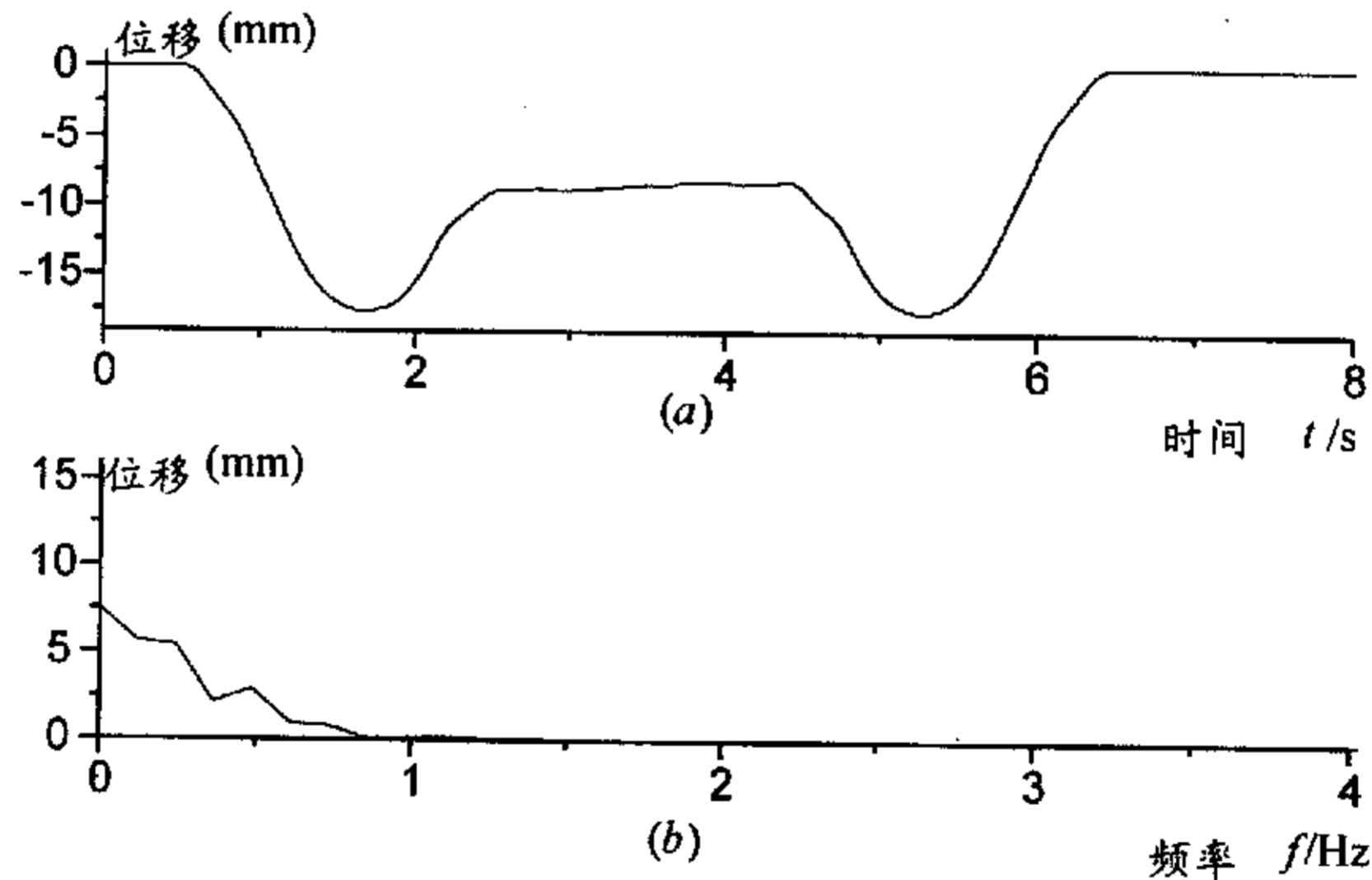


图 6-12 64m 简支梁静位移理论计算结果

6.5.2 动挠度信号的时基分解

桥梁动挠度静位移的计算需要知道列车编组及每根车轴的重量,还需要知道桥梁长度和截面刚度。列车的编组和桥梁的长度非常容易得到,而车轴的重量和桥梁的截面刚度的获得却不是十分方便。我们可以利用列车编组和桥梁长度这些容易得到的信息构造约束子空间。

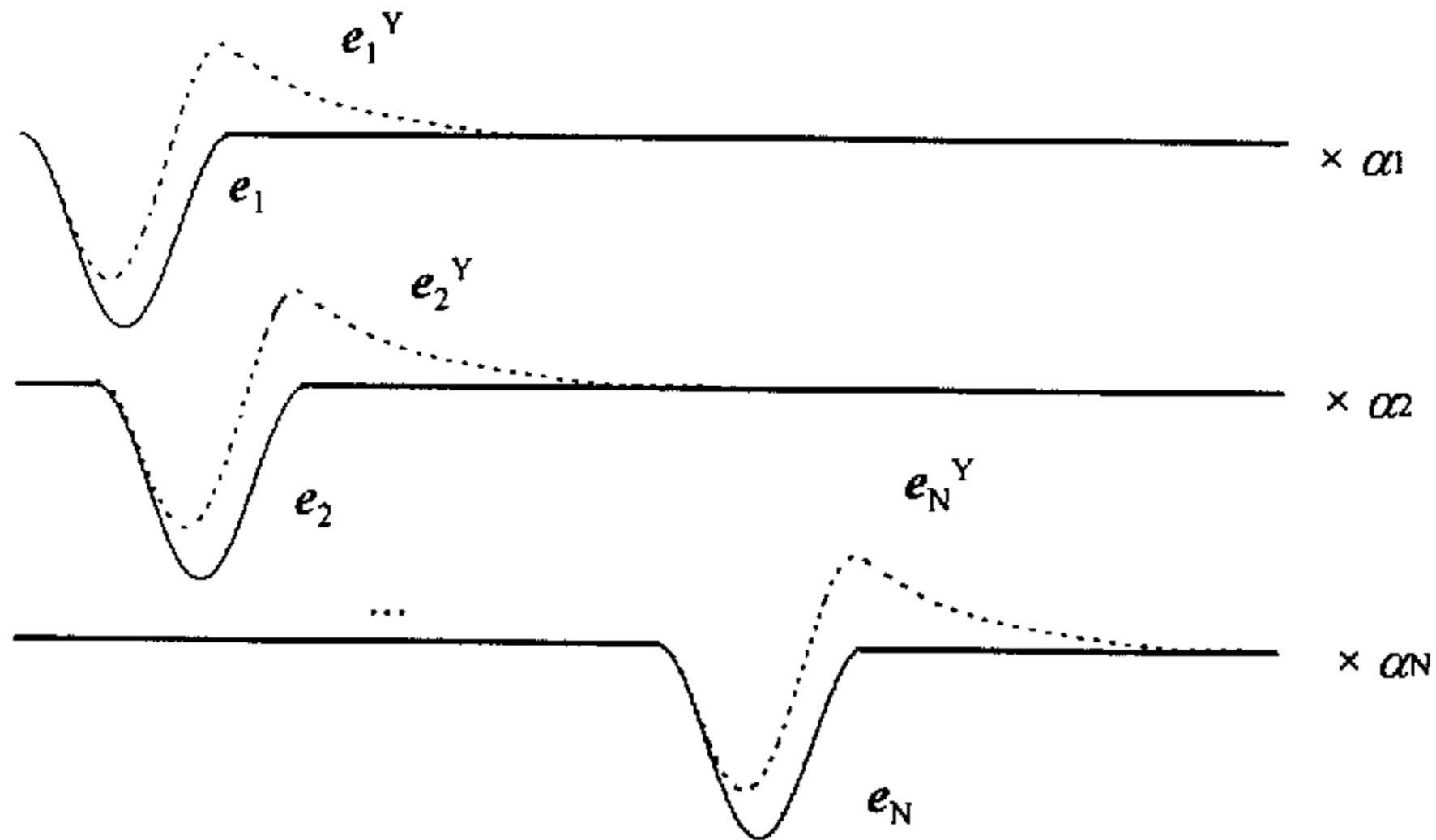


图 6-13 以单节车厢为单元的基的形式(实线为定义域,虚线为值域)

列车的每根车轴经过桥梁时,都相当于作用在桥梁上的一个移动的集中力,桥梁的静位移是这些集中力作用下叠加的结果。一节车厢的各个车轴的重量可以认为是相等的,因此每节车厢经过桥梁时桥梁的变形的形状可以计算出来。以每节车厢引起的桥梁的静位移作为一个矢量,以这些矢量作为基张成一个矢量空间,桥梁的静位移必然在此空间中,这就是我们的约束子空间,如图6-13所示。线卷积算子作用在这组基上形成其值域上的一组基,传感器的输出信号也应该落在这组基张成的矢量空间中。观测矢量向这个空间的投影可以作为最佳估计。

在实际的应用中,发现这种方法和时限约束的最小平反卷技术相比并没有太多的优越性,这在理论上也是可以理解的,因为这种方法支只能在一辆车厢过桥的时间内起到约束作用,而车厢和车厢之间的关系并没有起到约束作用,因此不能提供更多的低频信息。

在某些情况下,车厢之间重量的相对关系是知道的。例如客车的重量可以认为是相等的。如果将车厢等重的信息充分利用起来,就可以提供充分的低频信息。对于1机车+8客车车厢+1机车的编组,可以用图6-14所示的三个基来表示。列车前部和尾部的机车用单独的基 e_1 和 e_3 进行表示,而列车中部的客车的重量是相等的,可以合并用一个基 e_2 表示,这三个基张成的约束子空间对低频信号具有强烈的约束作用。

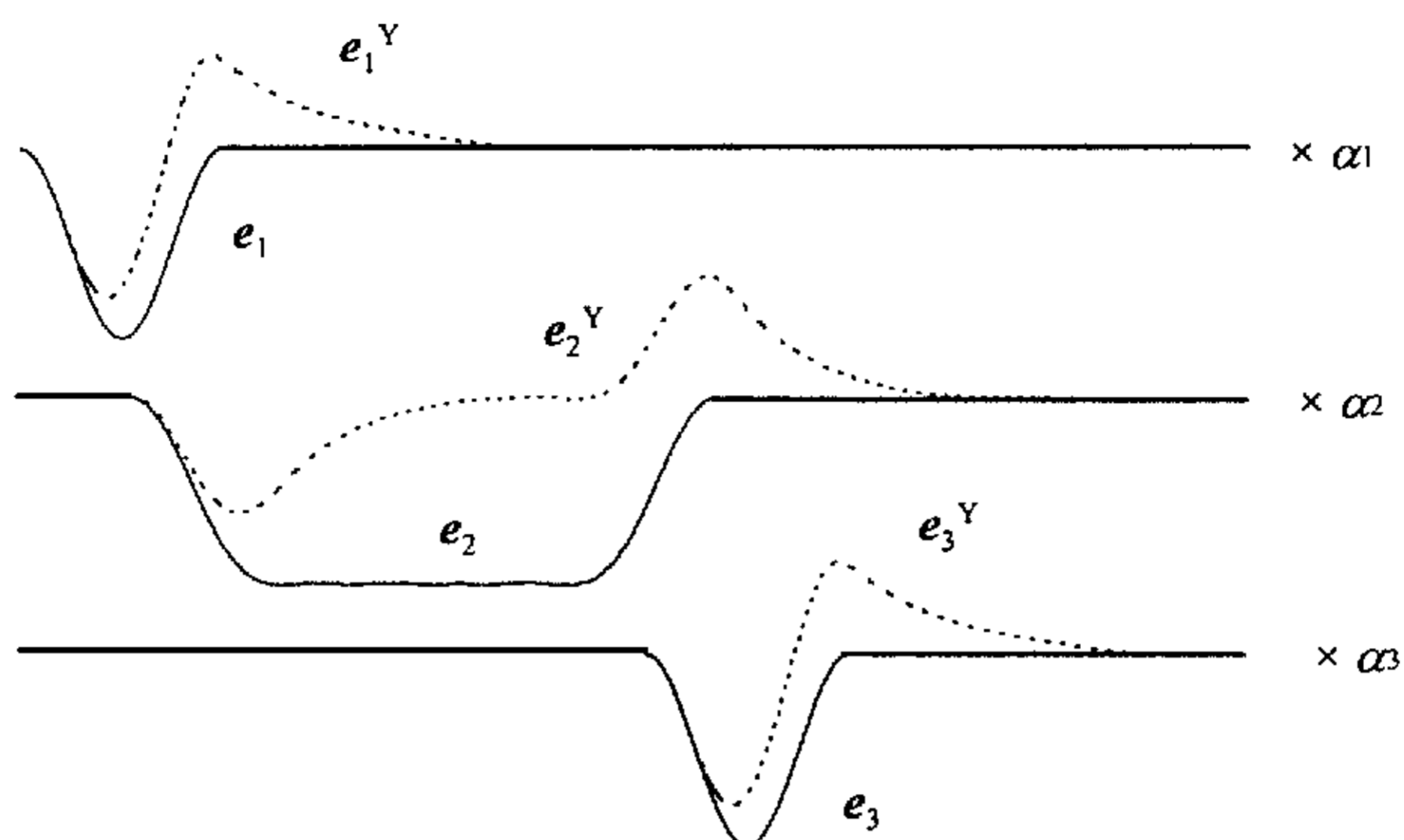


图 6-14 车厢等重约束的基的形式(实线为定义域，虚线为值域)

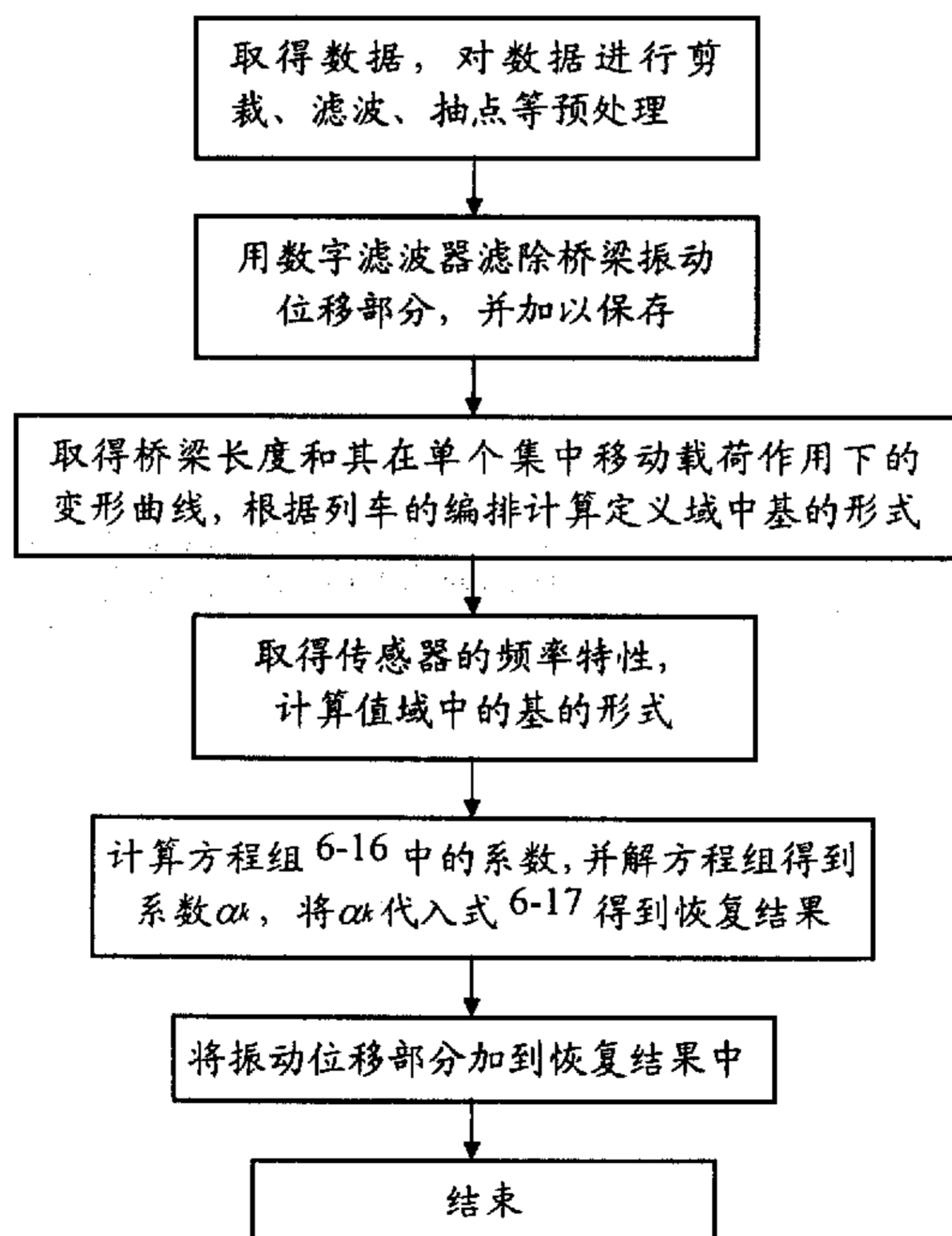


图 6-15 信号恢复的流程图

实际的传感器的输出信号中同时包含静位移和振动位移的信息,因此,在信号恢复之前需要做一定的处理工作,信号恢复的具体步骤如图6-15所示。

6.5.3 实验

实验中的列车编组为东风11型机车加挂8节客车车厢,尾部另加挂一台东风11型机车。应用DP传感器测量该列车编组过桥时梁体跨中动挠度,DP传感器的输出信号如图6-16所示。利用车厢等重的约束条件对静位移进行恢复,得到的结果如图6-17所示,将振动位移加到静位移上,得到恢复后的桥梁动挠度信号,如图6-18。实验中同时用摄像法对桥梁的动挠度进行了测试,测试结果如图6-19所示。

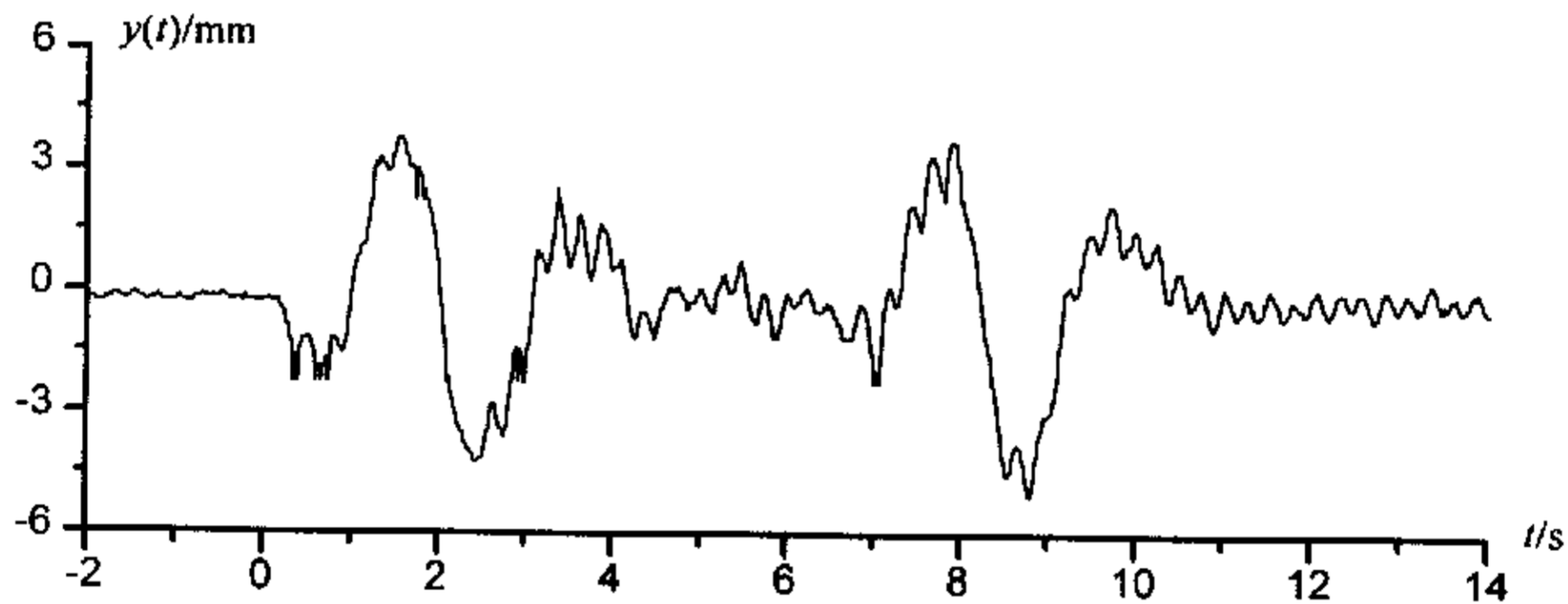


图 6-16 DP 传感器的输出信号

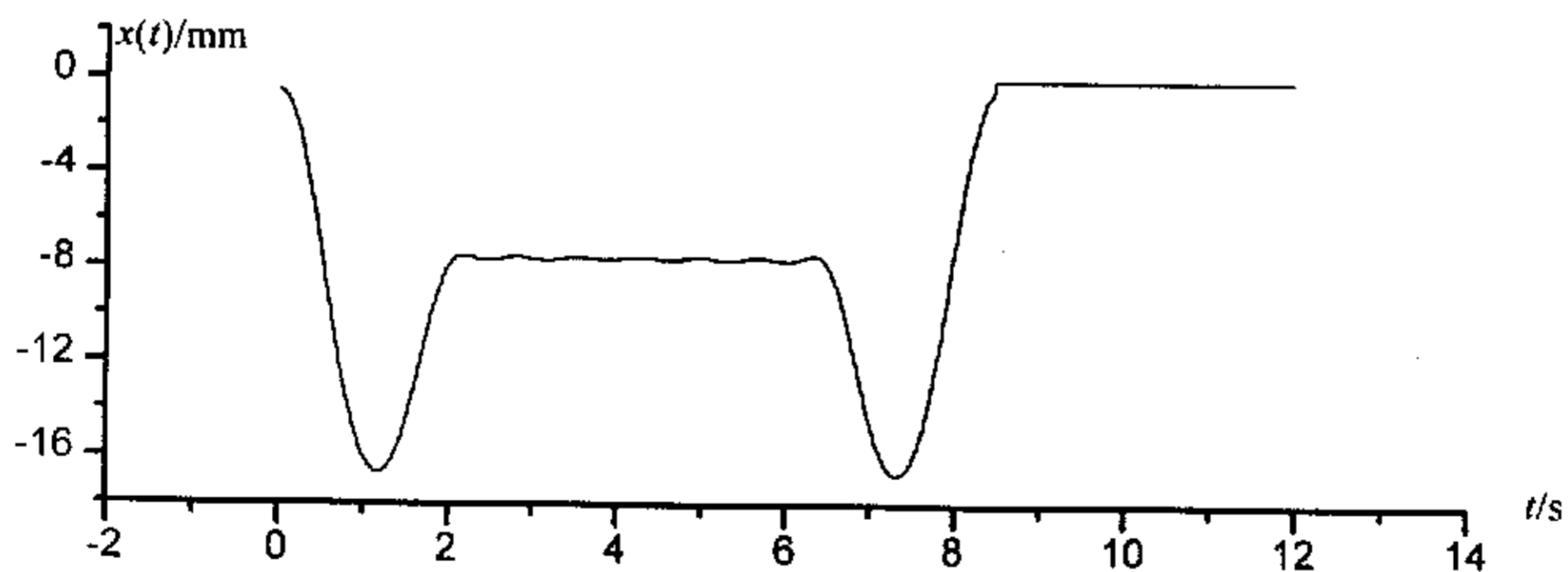


图 6-17 利用车厢等重约束静位移的恢复结果

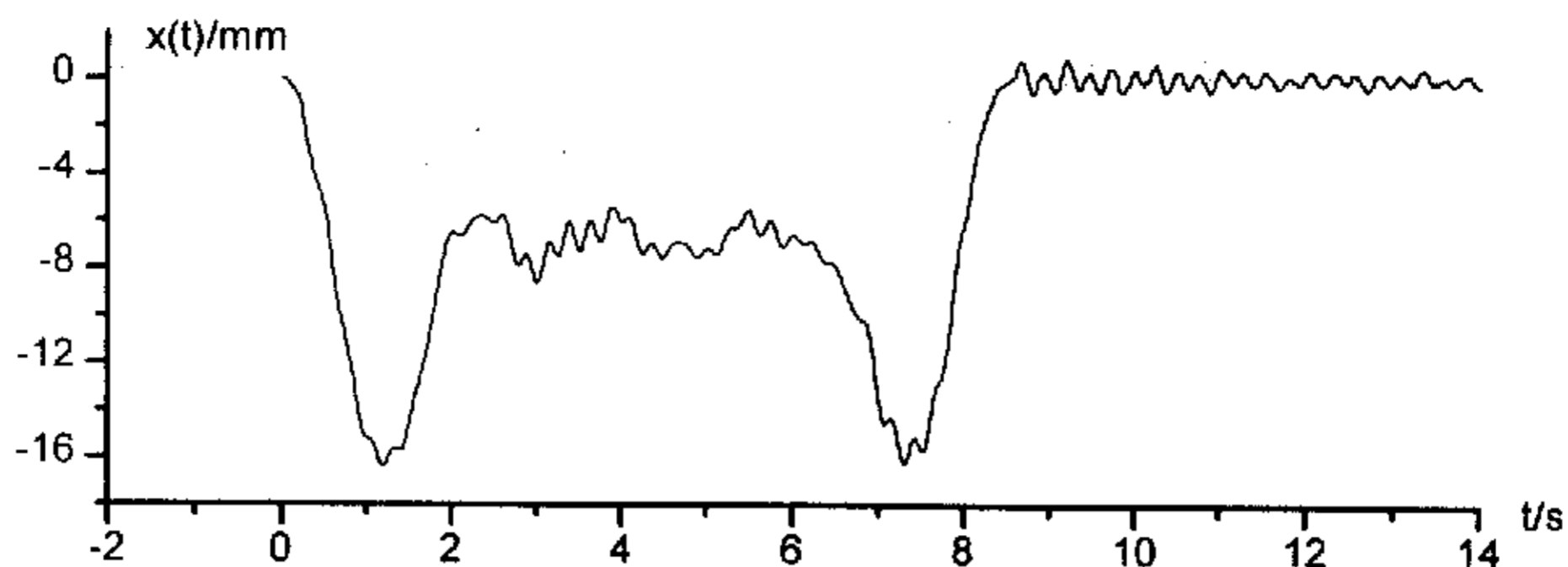


图 6-18 加上振动位移后的动挠度恢复结果



图 6-19 摄像法测试石滩 64m 简支梁动挠度

6.6 本章小结

●病态问题是由于信息的缺乏造成的，解决病态问题的有效的方法是补充相应的信息，使病态问题转化成为良态问题。对于利用DP传感器的输出信号恢复桥梁的动挠度问题，解决问题的关键在于补充低频信息。

●Hilbert空间是完备的内积空间。由内积的定义可以诱导出Hilbert空间上的范数和度量，并且引入了正交性的概念。Hilbert空间的良好的性质保证了任意矢量在闭子空间的最佳逼近的唯一存在性。

●工程中的某些先验知识可以表达成约束子空间的形式，观测矢量向该子空间的投影与观测矢量具有最短距离，为观测矢量在约束子空间上的最佳逼近。

●信号经过线性系统可以用线卷积算子进行表达，线卷积算子具有可逆性，保证了信号恢复的可行性。

●动挠度恢复中可以利用的先验信息有时限信息和静位移的理论计算结果。利用动挠度信号的时限特征作为约束可以对持续时间不长的动挠度信号有较好的恢复结果。桥梁的静位移计算具有更强的约束效果，特别是车厢等重的约束条件对低频信号具有强烈的约束作用，可以得到比较理想的动挠度恢复结果。

第7章 全文总结

7.1 本文主要结论:

●磁电检波器是高通类型的传感器,受其机械固有频率的限制,它在低频振动测试方面的应用受到限制。采用串联校正网络可以有效地降低其固有频率。DP型传感器成功地采用串联校正网络进行低频扩展,成为工程中实用、可靠的绝对式低频振动传感器。本文利用28Hz的拾振器研制出固有频率0.5Hz的DP传感器(DPS-0.5-0.1),固有频率降低到原来的1/56。

●受噪声的影响,进一步降低磁电检波器的固有频率存在困难,要想得到更低固有频率的DP传感器,需要采用机械固有频率低的检波器。固有频率低的磁电检波器的可靠性和量程存在问题,而采用并联电容的方法可以在有效提高检波器的机械稳定性和可靠性的同时,并不影响检波器的低频信号的强度,利用此特点,结合并联电容和串联校正的方法,可以研制出具有极低固有频率和较高可靠性的地震式特殊低频传感器。

●旋转轴的绝对振动可以用复合原理的传感器来测量。由于绝对振动传感器的频率特性的影响,直接复合的方法会带来比较大的复合误差。采用DP传感器可以有效地消除相位误差,并且避免给信号带来不希望的相移。利用DP传感器与涡流传感器相复合,可以实现旋转轴绝对振动的不接触测量。

●传感器的幅、相频率特性是对测试信号进行校正的基础。本文设计了DP传感器的计算机标定系统,能够实现对传感器动态特性的标定。此外,磁电检波器是具有可逆特性的传感器。通过对其施加电流激励而得到的复阻抗特性,可以估计其固有频率、阻尼比和灵敏度等参数,而不需要使用振动台,因此可以实现对传感器参数的在线检测。

●大型结构一般具有低固有频率和小阻尼的特点。在大地脉动、风等随机激励作用下,结构的响应一般具有低频和小振幅的特点,要求传感器具有良好的低频特性和较高的灵敏度。实践证明DP型传感器是结构动态特性的有效测试手段。

●利用功率谱估计可以估计结构的固有频率、阻尼比和振型等模态参数。在功率谱估计中需要对数据加窗，窗函数的平滑作用使真实谱中的尖峰变矮变胖。为了防止估计中模态的丢失，功率谱估计对窗函数长度具有一定的要求。特别是在阻尼比的估计中，对窗长度的要求更加苛刻。

●在小阻尼条件下，半功率带宽法是常用的阻尼比估计方法，但该方法只利用了三点的信息，因而估计精度受到影响。利用二阶系统的幅度平方函数去拟合功率谱估计，由于比较充分地利用了信息，可以得到精度更高的估计结果。

●铁路桥梁的动挠度是时限信号，有丰富的低频成分，而且含有直流分量，用惯性的传感器对它进行测量必然带来失真，只有通过信号恢复的手段才能得到真实的动挠度信号。

●对于周期稳态信号，经过整周期采样，并通过频域数字校正，可以获得直接用传感器无法得到的信息。有限时长信号在进行了周期化后，可以采用频域的DFT方法进行信号恢复。本文提出的以输入信号时长为周期化时长的方法可以降低对传感器频响特性的要求。

●由于检波器的输出信号微弱以及电路器件的噪声，DP型传感器在很低的频段信噪比差，造成用DP传感器的输出信号恢复动挠度信号的病态，这种病态在时域反卷积中表现为误差的积累，在频域的DFT方法中表现为直流的不适定和低频段小数值作分母。

●信号恢复中时域和频域的差异是由于利用不同的信息造成的。在稳态信号恢复中，时域和频域是完全统一的。

●病态问题是由于信息的缺乏造成的，解决病态问题的本质在于提供足够的信息。

●在桥梁动挠度信号恢复中有许多先验知识可以利用，比如时限信息以及根据桥梁的形式、列车编组、及车轴重量等信息进行桥梁静位移计算的结果。这些知识中含有丰富的低频信息，可以对信号恢复起到强烈的约束作用。

●Hilbert空间中的元素在子空间上的投影是该元素在子空间上的最佳逼近，它与该元素有最短距离。本文利用Hilbert空间中的最佳逼近理论推导出最小平方反卷技术，该技术充分地利用有关桥梁动挠度的先验

信息，成功地反演出桥梁的动挠度信号。

- 利用DP传感器和信号恢复技术，本文为铁路桥梁动挠度信号的测量提供了经济方便的惯性测量手段。

7.2 本文的主要创新点：

- 本文在讨论磁电传感器的低频特性校正方法的基础上，成功地将并联电容的方法与串联校正的方法相结合，首次研制出同时具有极低固有频率和较高机械稳定性的地震式特殊低频传感器。

- 本文讨论了用DP型传感器测试大型结构动态特性的有关问题。文中讨论了用功率谱估计的方法识别大型结构固有频率、阻尼比、和振型的方法，明确提出对具有密集模态和小阻尼比的大型结构在数据处理中的时窗长度要求，并首次提出了阻尼比估计的拟合方法，该方法比半功率带宽法有明显的优势。

- 本文讨论了有限时长暂态信号恢复的稳态方法。首次提出了以输入信号的持续时间作为周期的周期化方法，比较显著地缩短了周期化时间长度，降低了对传感器的频响特性的要求。

- 本文首次将Hilbert空间的最佳逼近理论用于铁路桥梁动挠度恢复中，并导出了Hilbert空间中的信号恢复技术。

- 本文首次将动挠度信号时限信息、桥梁的静位移计算信息、列车的编组信息综合地运用到动挠度信号恢复中，对低频信号起到强烈的约束作用，成功地从DP传感器的测试信号反卷出动挠度信号，为铁路桥梁的动挠度测试提供了惯性方法。

7.3 今后工作的展望

- 通过优化补偿电路参数，进一步降低DP传感器的固有频率，以满足更高的工程测试要求，也有利于信号恢复。

- 研制振动测试系统，该系统除了具有一般的数据采集及信号分析功能外，还应将传感器标定、结构模态参数识别、信号恢复等功能加以集成，并具有良好的人机界面，便于工程使用。

参考文献

1. 严普强, 黄长艺. 机械工程测试技术基础. 北京: 机械工业出版社. 1985
2. 刘广玉, 陈明, 吴志鹤, 等. 新型传感器技术及应用. 北京: 北京航空航天大学出版社. 1995
3. Y. Takamatsu, K. Tomomita, J. Takagi, et al. Fiber-optic Position Sensor. *Sensors and Actuators*, 1990, A21-A23: 435~437
4. Gerhard Grosch, Hybrid Fiber-optic/Micromechanical Frequency Encoding Displacement Sensor. *Sensors and Actuators*, 1990, A21-A23: 1128~1131
5. J. Marty, A. Malki, C. Renouf, et al. Fibre-optic accelerometer using silicon micromachining techniques. *Sensors and Actuators*, 1995, A 46-47: 470~473
6. Yuan Libo, Pan Jian, Yang Tao, et al. Analysis of the compensation mechanism of a fiber-optic displacement sensor. *Sensors and Actuators*, 1993, A36: 177~182
7. 何铁春, 周世勤. 惯性导航加速度计. 北京: 国防工业出版社, 1983. 1~2
8. 邓正隆. 惯性导航原理. 哈尔滨工业大学出版社, 1994.
9. 李国豪. 桥梁结构稳定与振动. 北京: 中国铁道出版社. 1992
10. 林元培. 斜拉桥. 北京: 人民交通出版社. 1994. 266~267
11. 傅志寰, 华茂昆. 提高旅客列车速度, 适应铁路两个转变. *中国铁路*, 1997(4): 6~8
12. 邓蓉, 张锻. 中小跨度钢板梁桥在提速中的振动性能研究. *中国铁路*, 1997(1): 30~34
13. 张相庭. 高层建筑抗风抗震设计计算. 上海: 同济大学出版社. 1997
14. 王肇民. 高耸结构振动控制. 上海: 同济大学出版社. 1997
15. 马志良, 罗德涛. 近海移动式平台. 北京: 海洋出版社. 1993
16. 贺五洲, 戴遗山, 谢楠, 等. 船舶上浪预报中甲板上浪的统计分析. *中国造船*, 1996年8月(第3期): 1~12
17. 盛振邦, 黄祥鹿. 船舶横浪倾覆实验及数值模拟. *中国造船*, 1996年8月(第3期): 13~22
18. 陆其鹄. 区域地震观测仪器概述. 北京: 地震出版社. 1984. 1~3
19. [英] N.A. 安斯提. 地震勘探仪器, 信号特征和仪器的技术要求. 北京: 科学出版社. 1976. 60~63
20. 李方泽, 刘馥清, 王正. 工程振动测试与分析. 北京: 高等教育出版社. 1992.
Wang Ping, Duan Shangshu, Zhao Xinmin, et al. Research on the dynamic test method for force-balance accelerometers(FBAs) with electric stimulation, Part 1, Errors analysis of current-source type FBAs.
21. K.H.-L.Chau, S.R.Lwis, Y. Zhao, et al. An integrated force-balanced capacitive accelerometer for low-g applications. *Sensors and Actuators*, 1996, A 54: 472~476

22. R.P. van Kampen, R.F. Wolffenbuttel. Modeling the mechanical behavior of bulk-micromachined silicon accelerometers. *Sensors and Actuators*, 1998, A 64: 137~150
23. Yoshinori Matsumoto, Moritaka Iwakiri, Hidekazu Tanaka, et al. A capacitive accelerometer using SDB-SOI structure. *Sensors and Actuators*, 1996, A 53: 267~272
24. Christofer Hierold, Andreas Hildebrandt, Ulrich Naher, et al. A pure CMOS surface-micromachined integrated accelerometer. *Sensors and Actuators*, 1996, A 57: 111~116
25. Janusz Bryzek. Impact of MEMS technology on society. *Sensors and Actuators*, 1996, A 56: 1~9
26. Howard K. Rockstad, T. K. Tang, J. K. Reynolds, et al. A miniature, high-sensitivity, electron tunneling accelerometer. *Sensors and Actuators*, 1996, A 53: 227~231
27. Paul M Zavracky, Bob McClelland, Keith Warner, et al. Design and process considerations for a tunneling tip accelerometer. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 1996, 6: 352~358
28. Chingwen Yeh, Najafi K. Micromachined tunneling accelerometer with a low-voltage CMOS interface circuit. In: 1997 International Conference on Solid-State Sensors and Actuators, vol.2. New York, NY, USA: IEEE. 1213-1216
29. [美]安艺敬一, P.G.理查兹. 定量地震学(第一卷). 北京: 地震出版社. 1986
30. 周汉安, 杨立志, 严普强, 等. 高稳定速度传感器(特殊低频)(“七·五”攻关项目75-53-03-21/02)研制总结: 清华大学精仪系, 1990
31. 夏恩山, 王继军. 提高DK-1型中长周期地震仪垂直向拾震器稳定性的技术措施. *地震地磁观测与研究*, 1990, 1(1): 28~30
32. 沈梦培. 电子放大地震仪. 北京: 地震出版社. 1982. 124~127
33. 周宣箐, 周汉安. 伺服式超低频振动传感器的研究. 见: 《振动、测试与诊断》杂志成立十周年学术论文集. 武汉: 庆祝全国高校机械工程测试技术研究会, 1990. 390~395
34. 891型测振仪使用说明书. 国家地震局工程力学研究所. 1992
35. Schenck公司. *Vibrosensors*, 产品介绍. 1990
36. 杨立志. 智能化测量方法与低频绝对振动测量: [博士学位论文]. 北京: 清华大学精密仪器与机械学系. 1992
37. 日本共和电业株式会社产品说明书, 1991
38. Lizhi Yang, Puchiang Yan, Hanan Zhou. A Seismic super low frequency vibration velocity transducer. In: Proc. ICPR, Hefei: 1991, 1798-1800
39. G.N.Solopchenko. Inverse problems in measurement. *Measurement*, 1987, 5(1): 10~19
40. 姚若河. 一个时域离散反卷积的后向迭代算法. *信号处理*, 1989, 5(1): 49~55

41. 胡聿贤, 朱镜清. 频域中的结构振动输入反演. 地震工程与工程振动, 1981, 1(1): 41~55
42. 王广福. 地震观测系统的标定与检查. 北京: 地震出版社. 1986
43. 程乾生. 信号数字处理的数学原理. 北京: 石油工业出版社. 1985. 385~387
44. 舒勤, 张有正. 最小平方卷积反演的一种快速算法. 电子学报, 1991, 19(4): 113~115
45. H.L.Taylor, S.C.Banks, J.F.McCoy. Deconvolution with l_1 norm. Geophys. 1979, 44(1): 39~52
46. J.Bee Bednar, Rao Yarlagadda, Terry L.Watt. L_1 Deconvolution and its Application to Seismic Signal Processing. In: ICASSP, Tampa: 1985, 453~456
47. Rao Yarlagadda, J.Bee Bednar, Terry L.Watt, Fast Algorithms for L_p Deconvolution. IEEE Transactions on Acoustis, Speech, and Signal Processing. 1985, ASSP-33(1): 174~182.
48. 朱文武. 线性退化二值图象的最大熵复原法. 电子科学学刊, 1989, 11(5): 509~517
49. 黄煦涛. 图片处理和数字滤波, 徐元培, 译. 北京: 科学出版社
50. 刘政凯, 瞿建雄. 图象恢复与重建. 合肥: 中国科学技术大学出版社. 1989
51. 朱扬明, 庄天戈, 韦钰. 用逼近定理解决有限角图象重建问题. 电子学报, 1994, 22(1): 26~31
52. A.Bennia, Sedi.M.Riad. An optimization technique for iterative frequency-domain deconvolution. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 1990, IM-39(2): 358~362
53. A.Bennia, N.S.Nahman. Deconvolution of Causal Pulse and Transient data. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 1990, IM-39(6): 933~939
54. R.Schafer, R.Mersereau, M.Richards. Constrained Iterative Restoration Algorithms. In: Proc.IEEE, 1981, Vol.69, No.5: P432~450.
55. P.B.Crilly. Enhancing the deconvolution of noisy chromatographic data by Jansson's method. J.Chemometrics, 1990, 4(1): 51-59.
56. G.Thomas, R.prost. Iterative constrained deconvolution. Signal processing, 1991, 23(1): 89-98
57. R.Prost, R.Goutte. Discrete constrained iterative deconvolution algorithms with optimized rate of convergence. Signal Processing, 1984, 7(3): 209-230
58. R.B.Whitted, P.B.Crilly. A digital signal processing architecture for iterative deconvolution restoration algorithms. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 1992, 41(1): 147~151
59. Paul Benjamin Crilly. A Quantitative Evaluation of Various Iterative Deconvolution Algorithms. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement. 1991, 40(3): 558~562.

60. Chengqi Xu, Idriss Aissaoui, Serge Jacquey. Algebraic analysis of the Van Citter iterative method of deconvolution with a general relaxation factor. J. Opt. Soc. Am. A, November 1994, 11(11): 2804~2808
61. ISO7919/1-1986(E), Mechanical Vibration of Non-reciprocating Machines-Measurements on Rotating Shafts and Evaluation-Part 1: General Guidelines.
62. 严可国, 魏克严, 李植. 大型旋转机械监测保护故障诊断系统. 美国本特利·内华达公司北京办事处. 1994
63. 美国本特利内华达公司. 3300监测保护系统1990-91产品样本. 35周年版
64. 张正松, 傅尚新, 冯冠平, 等. 旋转机械振动监测及故障诊断. 北京:机械工业出版社. 1991
65. 题组. 国家“八五”攻关85-720-07课题, 大型旋转机械状态监测、分析及故障诊断技术研究, 85-720-07-06 机组状态监测用传感器系列的研制, 高稳定速度传感器及轴绝对振动传感器研制, 技术文件(第二分册). 1995
66. 周兆英, 杨进. 动力学参数的频域估计. 清华大学学报, 1987, 27(5): 57~66
67. 史维祥, 尤昌德. 系统辨识基础. 上海: 上海科技出版社. 1988
68. Leehter Yao, Willian A. Sethares, Nonlinear Parameter Estimation via the Genetic Algorithm. IEEE Transactions on Signal Processing, April 1994, 42(4): 927~935
69. van den Bos, P. Eykhoff, Model building and parameter estimation as means for intelligent measurement. Measurement, Jan-Mar 1988, 6(1): 25~32
70. 谭浩强. C程序设计. 北京:清华大学出版社. 1991
71. 尹彦芝. C语言常用算法与子程序. 北京: 清华大学出版社. 1991
72. 李与占. 系统调用大全. 北京: 中国科学院希望高级电脑技术公司. 1991
73. 沈美明, 温冬婵. IBM—PC 汇编语言程序设计. 北京: 清华大学出版社. 1991
74. Steven Armbrust, Ted Forgeron. DOS/BIOS 使用详解(舒志勇, 刘东源, 译). 北京:电子工业出版社. 1989
75. Pandey, M.Biswas, M. M. Samman. Damage detection from changes in curvature mode shapes. Journal of Sound and Vibration, 1991, 145(2): 321-332
76. Juan R. Casas. Full-scale dynamic testing of the alamillo cable-stayed bridge in sevilla (Spain). Earthquake engineering and structural dynamics, 1995, 24: 35-51
77. 庄表中, 王行新. 随机振动概论. 北京:地震出版社. 1982
78. 杨学志, 严普强, 张锻, 等. DP传感器研究及桥梁自振特性测试. 振动、测试与诊断, 1997.6, 17(2): 51~56
79. 郑君里, 杨为理, 应启珩. 信号与系统(上、下册). 北京: 高等教育出版社. 1981
80. Welch. The Use of Fast Fourier Transform for the Estimation of Power Spectra. IEEE Trans. Audio Electroacoust., June 1970, AU-15: 70-73

81. [美]A.V. 奥本海姆, R. W. 谢弗. 数字信号处理, 董士嘉, 杨耀增, 译. 北京: 科学出版社. 1986
82. 宗孔德, 胡广书. 数字信号处理. 北京: 清华大学出版社. 1988
83. [美] S. M. 凯依. 现代谱估计, 黄建国, 武延祥, 杨世兴译. 北京: 科学出版社. 1994
84. 应怀樵, 沈松, 刘进明. “ZOOMBDFT”法高精度求系统阻尼比的探讨. 振动、测试与诊断, 1997.6, 17(2): 42~46
85. 胡明. 八渡南盘江大桥设计特色. 桥梁建设, 1997(2): 26~29
86. 中华人民共和国铁道部. 铁路桥梁检定规范. 北京: 人民铁道出版社. 1978
87. 《铁路桥梁检定结构试验手册》编写组. 铁路桥梁检定结构试验手册. 北京: 中国铁道出版社. 1981
88. 吴章江, 李湘敏. 计算机图象处理在铁路上的应用. 中国铁道科学, 1993, 14(1): 36~41
89. 花国梁. 精密测量技术. 北京: 中国计量出版社. 1990.
90. 谢毅. 低频绝对振动测量与时限信号恢复: [博士学位论文]. 北京: 清华大学精密仪器与机械学系. 1995
91. 李衍达, 常迥. 信号重构理论及应用. 北京: 清华大学出版社. 1991
92. 李庆扬, 王能超, 易大义. 数值分析. 武汉: 华中理工大学出版社. 1982
93. [美]W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, et al. C 语言数值算法程序大全, 傅祖芸, 赵梅娜, 丁岩, 等译. 北京: 电子工业出版社. 1995
94. BARRY, J.SULLIVAN. On the Use of Singular Value Decomposition and Decimation in Discrete-Time Band-Limited Signal Extrapolation. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Dec 1984, ASSP-32(6): 1201~1212.
95. 曾庆勇. 微弱信号检测. 杭州: 浙江大学出版社. 1994
96. 舒勤, 张有正. $X[k]$ 有零点的卷积反演的DFT算法. 电子学报, May 1990, 18(3): 83-89
97. 舒勤, 张有正. 再论 $X[k]$ 有零点的卷积反演的DFT算法. 电子学报, Dec 1992, 20(12): 79-81
98. 阎鸣生, 茅于海. 利用广义离散Fourier变换计算线性卷积与卷积反演. 电子学报, March 1988, 16(2): 91-95
99. 刘明亮, 孙继. 用Z变换求解离散反卷积. 电子测量与仪器学报, 1993.6, 7(2): 27-31
100. 孔凡年. 时域卷积反演的新方法. 电子学报, July 1985, 13(4): 8-13
101. 程乾生. S阶偶项信号和最小平方偶项卷积反演方法. 电子学报, July 1987, 15(4): 34~40
102. 孔凡年. 广义逆滤波. 中国科学, A辑, 1986年10月(第10期): 1065~1072
103. 谢毅, 严普强, 杨倩, 等. 用地震式低频振动传感器测量桥梁动挠度. 清华大学学报, 1994, 34(5): 48~56

104. GERCHBERG. Super-resolution through energy reduction. *Optica Acta*, 1974; 21(9): 709~720
105. JORGEL.C.SANZ, THOMASS.HUANG. On the Gerchberg-Papoulis Algorithm. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Dec 1983, CAS-30(12): 907~908.
106. Jones. The Discrete Gerchberg Algorithm. *IEEE Transaction on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, June 1986, ASSP-34(3): 624~626
107. JORGEL.C.SANZ, THOMASS.HUANG. Iterative Time-Limited Signal Restoration. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, June 1983, ASSP-31(3): 643~649
108. Jorge L. C. Sanz, Thomas S. Huang. Some Aspects of Band-Limited Signal Extrapolation: Models, Discrete Approximations, and Noise. *IEEE Transaction on Acoustics, Speech and Signal Processing*, December 1983, ASSP-31(6): 1492~1501
109. Xie Yi, Yan Puchiang, Zhang Hai-yun. Vibration Measurement of Railway Bridge with Seismic Low-Frequency Transducer Based on Signal Reconstruction Technique. In: *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering v2719*, Bellingham, WA, USA: Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers, 1996. 201-208.
110. [加拿大]欧文·克雷斯齐格. 泛函分析导论及应用, 蒋正新, 吕善伟, 张式淇, 译. 北京: 北京航空学院出版社. 1987
111. 张恭庆, 林源渠. 泛函分析讲义(上册). 北京: 北京大学出版社. 1995
112. [美] P.E. 布莱赫特. 数字信号处理的快速算法, 肖先赐译. 北京: 科学出版社. 1992: 260~267
113. 周耀华, 汪凯仁. 数字信号处理. 上海: 复旦大学出版社. 1992: 210~212
114. Carmen Sanchez-Avila. An Adaptive Regularized Method for Deconvolution of Signals With Edges by Convex Projections. *IEEE Transaction on Signal Processing*, July 1994, 42(7): 1849~1851
115. Dharanipragada. Aquadratically Convergent Algorithm for Convex-Set Constrained Signal Recovery. *IEEE Transactions on Signal Processing*, Feb 1996, 44(2): 248~266
116. 苏翼林. 材料力学. 北京: 高等教育出版社. 1986.
117. 史述昭, 常连芳, 孙保立, 等. 结构力学. 北京: 水利水电出版社. 1987

在学期间发表的学术论文

1. 杨学志, 严普强. 最小平方反卷技术及其在桥梁动挠度测试中的应用. 第六届全国振动理论与应用学术会议, 中国武汉, 1997年4月, 434-437.
2. 杨学志, 严普强, 张锻, 等. DP传感器研究及桥梁自振特性测试. 振动、测试与诊断, 第17卷 第2期, 1997, 51~56
3. Xuezhi Yang, Puchiang Yan, Leshan Mao. Measurement of Absolute Vibration of Rotating Shaft, The 7th International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery (ISROMAC-7) Proceedings, Honolulu, Hawaii, Feb., 1998.
4. 杨学志、严普强、毛乐山, 一种新型的地震式特殊低频传感器。(待发表)。
5. Puchiang Yan, Xuezhi Yang, Leshan Mao, Measurement of Dynamic Characteristics of Structures with low frequency compensated seismic transducers.(To be published)

致 谢

本论文是在我的导师严普强教授的悉心指导下完成的。在攻读博士期间，我一直在严先生的精心指导和严格要求下成长。先生严谨的治学精神、扎实的科研作风和敏锐的学术思想给我留下了深刻的印象，也将对我今后的工作和研究产生深远的影响。先生不仅指导和激励我完成了艰巨的科研工作和论文，还培养了我务实的学风和独立工作的能力，这些将使我受益终生。同时，先生在生活上也给予了我许多关心与帮助，我向我的导师表示衷心的感谢。

铁道部科学研究院铁建所张煅、刘汉夫、邓蓉、周佳等同志为本论文提供了现场试验条件，他们在实际测试方面给予了许多帮助与指导。

实验室杨倩同志在传感器的研制和应用过程中提供了很好的合作，另外，在这里也同时向为本论文的完成提供巨大帮助的教研组的其他老师和同学一并表示感谢。

附 录

定义(度量空间, 度量) 所谓度量空间, 就是指对偶 (X, d) , 其中 X 是一个集合, d 是 X 上的一个度量(或 X 上的距离函数), 即 d 是定义在 $X \times X$ 上且对所有 $x, y, z \in X$ 满足以下四条公理的函数:

(M1) d 是实值的、有限和非负的。

(M2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(M3) $d(x, y) = d(y, x)$

(M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

定义(矢量空间) 所谓域 K 上的矢量空间(或线性空间) 是指一个非空集合 X , 怯其元素矢 x, y, \dots (称为矢量) 关于 X 和 K 定义了两种代数运算。这两种运算分别叫做矢量的加法和矢量与标量(即 K 中的元素) 的乘法。

矢量的加法是, 对于 X 中的每一对矢量 (x, y) , 存在 $u \in X$, 记作 $u = x + y$ 称为 x, y 之和, 适合

$$x + y = y + x;$$

$$x + (y + z) = (x + y) + z;$$

存在唯一的 $\theta \in X$, 对 $\forall x \in X$, $x + \theta = x$;

对 $\forall x \in X$, $\exists (-x) \in X$, 使得 $x + (-x) = \theta$ 。

矢量与标量的乘法是, 对 $\forall (\alpha, x) \in K \times X$, 存在 $u \in X$, 记作 $u = \alpha x$ 称为 α, x 之积, 适合

$$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x \quad (\forall \alpha, \beta \in K, \forall x \in X);$$

$$1x = x;$$

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x \quad (\forall \alpha, \beta \in K, \forall x \in X);$$

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y \quad (\forall \alpha \in K, \forall x, y \in X);$$

定义(子空间) 矢量空间 X 的子空间是满足下述条件的非空子集 Y : 对所有的 $y_1, y_2 \in Y$ 及所有的标量 $\alpha, \beta \in K$, 都有 $\alpha y_1 + \beta y_2 \in Y$ 。

定义(赋范空间, 巴拿赫空间) 所谓赋范空间 X , 就是在其上定义了范数的矢量空间 X 。而巴拿赫空间就是完备的赋范空间。这里所指的 X 上的范数, 是定义在 X 上的实值函数, 它在 $x \in X$ 的值记为 $\|x\|$, 并且具有如下性质

$$(N1) \quad \|x\| \geq 0$$

$$(N2) \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$(N3) \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

$$(N4) \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

其中, x, y 是 X 中的任意矢量, α 是任意标量。

X 上的范数在 X 上定义的度量为

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad (\forall x, y \in X)$$

并把它叫做有范数诱导出来的度量。

定义(内积空间, 希尔伯特空间) 所谓内积空间(或准希尔伯特空间)就是在其上定义了内积的矢量空间 X 。而希尔伯特空间就是完备的内积空间。这里所指的 X 上的内积, 是 $X \times X$ 到 X 的标量域 K 的一个映射; 也就是说, 针对 X 中的每一对矢量 x 和 y , 都有一个标量, 记之为 $\langle x, y \rangle$ 与之相对应。这个标量叫做 x 和 y 的内积, 并且对所有的矢量 $x, y, z \in X$ 和标量 α 都满足

$$(IP1) \quad \langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

$$(IP2) \quad \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$$

$$(IP3) \quad \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

$$(IP4) \quad \langle x, x \rangle \geq 0$$

$$\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

X 上的内积通过

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

和

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$$

分别在 X 上定义了范数和度量。

定义(正交性) 对于内积空间 X 上的元素 x 和 y , 若有

$$\langle x, y \rangle = 0$$

则称 x 正交于 y , 记之为 $x \perp y$

在矢量空间的情况下, 映射被称为算子。

定义(线性算子) 所谓线性算子 T , 是指满足下述性质的算子:

T 的定义域 $\mathcal{D}(T)$ 是一个矢量空间, T 的值域 $\mathcal{R}(T)$ 落在同一域上的矢量空间中。

对 $\forall x, y \in \mathcal{D}(T)$ 和标量 α , 有

$$T(x+y) = Tx + Ty, \quad T(\alpha x) = \alpha Tx$$

设 $\mathcal{D}(T) \subset X$, $\mathcal{R}(T) \subset Y$, 其中 X, Y 都是矢量空间。则 T 是一个从 $\mathcal{D}(T)$ 到 $\mathcal{R}(T)$ 上的算子, 写成:

$$T: \mathcal{D}(T) \rightarrow \mathcal{R}(T).$$

定理(逆算子) 设 X, Y 是两个矢量空间, $T: \mathcal{D}(T) \rightarrow Y$ 是一个线性算子, 且 $\mathcal{D}(T) \subset X$, $\mathcal{R}(T) \subset Y$ 。则

(a) 逆 $T^{-1}: \mathcal{R}(T) \rightarrow \mathcal{D}(T)$ 当且仅当有

$$Tx=0 \Rightarrow x=0$$

时才存在。

(b) 若 T^{-1} 存在, 则 T^{-1} 是线性算子。

(c) 若 $\dim \mathcal{D}(T) = n < \infty$ 且 T^{-1} 存在, 则 $\dim \mathcal{R}(T) = \dim \mathcal{D}(T)$ 。

定义(凸集) 对于矢量空间 X 的子集 M , 若 $y, z \in M$ 蕴含着集合

$$W = \{ v = \alpha y + (1-\alpha)z \mid 0 \leq \alpha \leq 1 \}$$

为 M 的一个子集, 则称 M 是凸的。

定义(严格凸性) 严格凸范数是指这样的一种范数: 对于一切范数等于1的 x, y , 都满足

$$\|x+y\| < 2 \quad (x \neq y)$$

一个赋范空间的范数若是严格凸的, 则又称之为严格凸赋范空间。

唯一性定理(最佳逼近) 在严格凸赋范空间 X 中, $x \in X$ 在给定的子空间 $Y \subset X$ 中至多有一个最佳逼近。

定理 希尔伯特空间是严格凸的。

定理 H 是一个希尔伯特空间, 对每个给定的 $x \in H$ 和每个闭子空间 $Y \subset H$, 则 x 在 Y 中有唯一的最佳逼近。

定义(线性算子) 所谓线性算子 T , 是指满足下述性质的算子:

T 的定义域 $\mathcal{D}(T)$ 是一个矢量空间, T 的值域 $\mathcal{R}(T)$ 落在同一域上的矢量空间中。

对 $\forall x, y \in \mathcal{D}(T)$ 和标量 α , 有

$$T(x+y) = Tx + Ty, \quad T(\alpha x) = \alpha Tx$$

设 $\mathcal{D}(T) \subset X$, $\mathcal{R}(T) \subset Y$, 其中 X, Y 都是矢量空间。则 T 是一个从 $\mathcal{D}(T)$ 到 $\mathcal{R}(T)$ 上的算子, 写成:

$$T: \mathcal{D}(T) \rightarrow \mathcal{R}(T).$$

定理(逆算子) 设 X, Y 是两个矢量空间, $T: \mathcal{D}(T) \rightarrow Y$ 是一个线性算子, 且 $\mathcal{D}(T) \subset X$, $\mathcal{R}(T) \subset Y$ 。则

(a) 逆 $T^{-1}: \mathcal{R}(T) \rightarrow \mathcal{D}(T)$ 当且仅当有

$$Tx=0 \Rightarrow x=0$$

时才存在。

(b) 若 T^{-1} 存在, 则 T^{-1} 是线性算子。

(c) 若 $\dim \mathcal{D}(T) = n < \infty$ 且 T^{-1} 存在, 则 $\dim \mathcal{R}(T) = \dim \mathcal{D}(T)$ 。

定义(凸集) 对于矢量空间 X 的子集 M , 若 $y, z \in M$ 蕴含着集合

$$W = \{ v = \alpha y + (1-\alpha)z \mid 0 \leq \alpha \leq 1 \}$$

为 M 的一个子集, 则称 M 是凸的。

定义(严格凸性) 严格凸范数是指这样的一种范数: 对于一切范数等于1的 x, y , 都满足

$$\|x+y\| < 2 \quad (x \neq y)$$

一个赋范空间的范数若是严格凸的, 则又称之为严格凸赋范空间。

唯一性定理(最佳逼近) 在严格凸赋范空间 X 中, $x \in X$ 在给定的子空间 $Y \subset X$ 中至多有一个最佳逼近。

定理 希尔伯特空间是严格凸的。

定理 H 是一个希尔伯特空间, 对每个给定的 $x \in H$ 和每个闭子空间 $Y \subset H$, 则 x 在 Y 中有唯一的最佳逼近。