

北京大学

硕士学位论文

含自旋轨道耦合系统中电子-声子相互作用对其输运性质的影响

姓名：李舟

申请学位级别：硕士

专业：理论物理

指导教师：马中水

20070501

摘 要

本文第一章主要介绍了自旋电子学中最近的热门话题-自旋霍尔效应在实验上和理论上的最新进展。在实验上,本征的和非本征的自旋霍尔效应分别被观测到。在理论上,针对本征自旋霍尔电导的存在与否曾经有过一番争论。在没有考虑杂质散射的情况下,本征自旋霍尔电导具有普适值 $e/8\pi$,在考虑了杂质散射引起的顶角修正后,理论计算的值刚好与 $e/8\pi$ 相消,造成为零的本征自旋霍尔电导。最近的一篇理论文章指出,顶角修正后的结果为零是因为在计算态密度时作了近似,用没有自旋轨道耦合的态密度代替了有自旋轨道耦合的态密度。因此本征的自旋霍尔电导是存在的,只是与模型有关。

本文第二章先回忆了Drude电导公式,然后推导了如何从Kubo公式出发,将Kubo公式的流-流关联函数计算与场论中的费曼图联系起来,最终在松原表象下直接做作图微扰展开的计算,再做解析延拓得到电导的过程。推导过程中证明并利用了谱表示定理。在这一章的最后还推导了如何从三维空间出发,严格得到二维平面中的电子与三维的LO声子相互作用的二次量子化的形式。

本文第三章给出了Rashba和Dresselhaus自旋轨道耦合并存时的动能的哈密顿量以及电子-电子和电声子相互作用的二次量子化形式,在仅考虑Rashba自旋轨道耦合和电声子相互作用时,研究了二维半导体中的极化子效应,发现电声子相互作用和极化子质量修正都能被Rashba自旋轨道耦合显著的提高。在领头阶水平上,极化子结合能的修正正比于自旋轨道耦合系数的平方。

本文第四章利用第二章建立好的Kubo公式的图形展开的技术,分别讨论了在有Rashba自旋轨道耦合和电声子相互作用的情况下,电导率和自旋霍尔电导率的单圈图以及高阶费曼图的结果。对电导率而言,在零温近似下,单圈图给出的电导率的实部是一个区间函数,只在某些频率范围内不为零,而虚部在频率接近与自旋轨道耦合系数有关的特征频率时具有对数发散。对自旋霍尔电导率而言,在零温近似下,单圈图给出的自旋霍尔电导率在零频下等于 $e/8\pi$,与前人的结果相同;本文还给出了非零频的结果,自旋霍尔电导率的实部将在在频率接近与自旋轨道耦合系数有关的特征频率时具有对数发散,虚部将是一个区间函数,只在某些频率范围内不为零。

关键词: 自旋电子学, 电声子相互作用, 自旋轨道耦合, 自旋霍尔效应, Kubo公式, 费曼图

The influence of electron-phonon interaction on the transport properties in the presence of SOI

Zhou Li(Theoretical Physics)

Directed by Professor Zhongshui Ma

The first chapter of this paper introduces the new experimental and theoretical results of the spin hall effect, which is now a hot topic in spintronics. Experimentally, intrinsic and extrinsic spin hall effect are both observed. Theoretically, there are disputes around whether intrinsic spin hall effect exists. In the case that no impurity scattering is taken into account, the intrinsic spin hall has the universal value $e/8\pi$. when vertex correction arising from impurity scattering is taken into account, the theoretical result is that the vertex correction will cancel with the universal value $e/8\pi$. In a recent paper, it has been shown that the result is zero in the presence of impurity vertex correction is because of the improper approximation of density of states. The density of states used before is the one without spin-orbit interaction.

The second chapter of this paper presents Drude formula and Kubo formula. Then make a deduction to show the links between current-current correlation and Feynman diagrams and how to use the diagrams to calculate the Matsubara Green functions and how to get the conductivity finally from analytical continuation. At the end of this chapter, a deduction is made to show how to get the second quantization expression of the interaction between two dimensional electrons and three dimensional LO phonons from a rigorously three dimensional model.

The third chapter of this paper shows the second quantization expression of electron-electron interaction and electron-phonon interaction in the presence of the Rashba and Dresselhaus spin-orbit interaction. Then we discusses the polaron problem in the presence of Rashba spin-orbit interaction.

The fourth chapter of this paper discusses the single loop and multiple loop results of the conductivity and spin hall conductivity when both spin-orbit interaction and electron-phonon interaction exist. For the conductivity, in the zero-temperature approximation, the single loop results shows that the real part is only nonzero in some range of the frequency and the imaginary part will have a log divergence when the frequency reaches the Fermi surface. For the spin hall conductivity, in the zero-temperature approximation, the single loop results shows that the value is $e/8\pi$ when the frequency

is zero; and for nonzero frequency, the real part will have a log divergence when the frequency reaches the Fermi surface and the imaginary part is only nonzero in some range of the frequency.

Key Words: spintronics, electron-phonon interaction, spin-orbit coupling, spin Hall effect, Kubo formula, Feynman diagram

插图

1.1 自旋霍尔效应 [3]	2
1.2 本征自旋霍尔效应实验结果 [8]	3
1.3 非本征自旋霍尔效应实验结果 [4]	4
1.4 自旋霍尔电导的顶角修正费曼图 [28]	7
3.1 极化子有效质量在 $k=0$ 处	29
3.2 极化子有效质量在能带底部	30
3.3 上Rashba带极化子有效质量修正	31
3.4 下Rashba带极化子有效质量修正	32
3.5 无自旋轨道耦合时极化子有效质量修正	33
4.1 无电声子相互作用的费曼圈图	36
4.2 电导随温度变化 (低频)	39
4.3 电导随温度变化 (高频)	40
4.4 电导随温度变化 (中间频)	41
4.5 电导随自旋轨道耦合系数变化	42
4.6 高阶费曼图	43
4.7 电导随频率变化 (有电声子相互作用时)	46
4.8 自旋霍尔电导随温度变化 (低频)	50
4.9 自旋霍尔电导随温度变化 (高频)	51
4.10 自旋霍尔电导随温度变化 (中间频)	52
4.11 自旋霍尔电导实部随自旋轨道耦合系数变化	53
4.12 自旋霍尔电导虚部随自旋轨道耦合系数变化	54

版权声明

任何收存和保管本论文各种版本的单位和个人，未经本论文作者和导师同意，不得将本论文转借他人，亦不得随意复制、抄录、拍照或以其他方式传播。否则，引起有碍作者著作权之问题，将可能承担法律责任。

北京大学学位论文原创性声明和使用授权说明

原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品或成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本声明的法律结果由本人承担。

论文作者签名：李舟 日期：2007年5月29日

学位论文使用授权说明

本人完全了解北京大学关于收集、保存、使用学位论文的规定，即：

按照学校要求提交学位论文的印刷本和电子版本；

学校有权保存学位论文的印刷本和电子版，并提供目录检索与阅览服务；

学校可以采用影印、缩印、数字化或其它复制手段保存论文；

在不以赢利为目的的前提下，学校可以公布论文的部分或全部内容。

（保密的论文在解密后应遵守此规定）

论文作者签名：李舟 导师签名：康中水
日期：2007年5月29日

第一章 引言

1.1 自旋电子学

自上一世纪九十年代Datta和Das提出自旋二极管和利用载流子自旋特性发展新一代量子器件以来，自旋电子学得到了迅速的发展。近年来随着激光、半导体、以及对光源频率检测等技术的发展和改善，半导体系统自旋效应的研究吸引了广泛的兴趣和研究。此外，鉴于其在应用方面，特别是对量子计算、新型量子元器件、和材料的新奇现象等领域中的应用，这使得对自旋相关的物理问题研究成为凝聚态和光学物理的重要研究课题之一。

在自旋电子学领域最具挑战性的实验和理论方面的问题集中在电子自旋寿命的优化，纳米结构中的自旋相干的探测，异质结构中自旋极化载流子的输运以及在充分快的时间尺度内对电子自旋和核自旋的操纵。最近的实验指出，借助固态中电子自旋和核自旋的强耦合，用电子自旋编码的量子信息的存储时间能够延长。另外，用于自旋注入，探测和操纵的光学技术也得到发展，使得精确的改变电子自旋和光子之间的耦合成为可能。能够预见，电子学，光子学和磁学的合并最终将导致新的多功能自旋器件的产生，如自旋场效应管（spin-FET），自旋发光二极管（spin-LED），自旋共振隧穿器件（spin-RTD），工作在极高频率的光学开关，以及在量子信息和量子计算中得到广泛应用的量子位，编码器，解码器，调制器。这些极具开创性的工作所取得的成功，不仅依赖于我们对半导体能带结构，晶体缺陷和维数在改变电子的动力学行为方面所扮演的角色的理解，更依赖于我们对固体中基本的自旋相互作用有了比以前更深的理解。如果我们能理解并控制好半导体、半导体异质结以及铁磁体中的自旋自由度，那么自旋电子学的优异表现将指日可待。那些最有趣的自旋电子学器件可能是我们现在无法想象的。

1.2 最新实验进展

1.2.1 自旋霍尔效应

通过自旋-轨道耦合操纵半导体中载流子的自旋是自旋电子学领域的最初动机 [4]。自旋-轨道耦合提供了一种在无外加磁场时，完全通过电场来产生和

操纵自旋的机制。最近这个领域的大部分兴趣围绕着如何通过电流来产生横向的自旋流，即自旋霍尔效应, 如图1.1所示。尽管三十年前就有人预言了这种效应 [6]，直到最近才有人在实验中观测到 [7] [8] [9]。接下来的工作集中在几个方面：（1）自旋霍尔电导的产生机制 [10] [11] [12]，主要有两种说法，一种是本征机制 [10] [8]，即由于自旋轨道耦合引起的能带劈裂产生的，一种是非本征机制 [4]，即由于杂质散射过程中与自旋有关的不对称产生的；（2）自旋流的本质 [13] [14]；（3）只用电场来产生和检测自旋霍尔电流的可能性 [15] [16]。

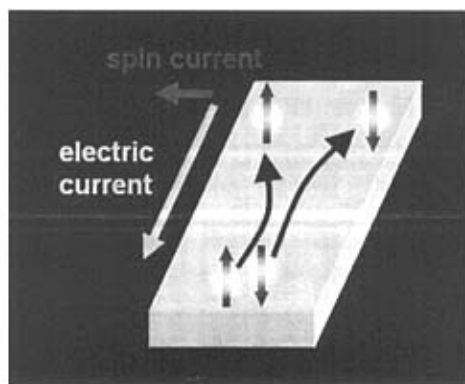


图 1.1 自旋霍尔效应 [3]

尽管自旋流本身难于观测，自旋霍尔效应由于能够在电流通道的边缘产生自旋积累而易于在实验中观测到。然而，通过分析自旋积累来确定自旋流是一项十分复杂的工作。首先，在具有自旋轨道耦合的情况下，自旋并不是一个守恒量；而且，边界条件的选取会对最后的计算结果产生很大的影响；另外，通道边缘的自旋极化也可以归究于边缘效应而不是来自于通道内的自旋流。

2005年2月，J.Wunderlich等人利用分子束外延技术，通过在(AI,Ga)As/GaAs异质结中制作发光二极管(LED)的方法，观测到了本征自旋霍尔效应。在实验上，自旋霍尔效应是难于捉摸的，因为在非磁性的系统中横向的自旋流并不造成电荷的积累，阻止了用简单的电测量的方法去观测它的可能性。由于光学选择定则，沿着指定方向传播的光的圆偏振度对应同样方向的参与复合发光的载流子的自旋极化度。据此原理J.Wunderlich等人设计出了新的p-n结发光二极管微器件，与 [10]中提出的精神不同的是，这个装置将电子和空穴参杂的系统耦合起来。并且由于二维空穴气中强的自旋轨

道耦合和能降低电流带来的自场效应的超薄设计，它将适用于产生和观察自旋霍尔效应。实验结果如图1.2所示，a)扫描电子显微镜对SHE LED器件的成像。上(LED1)下(LED2)n端用于测量在p通道两端的电致发光(EL)，p通道与自旋霍尔效应的驱动电流 I 平行。b)LED1测到的沿z方向的偏振，图中显示了电流 I 方向相反时偏振方向也相反，演示了自旋霍尔效应。c)在固定电流 I 的方向时，LED1和LED2测到的沿z方向的偏振。数据显示在p通道两侧的偏振方向相反，确认了信号是由自旋霍尔效应造成的。d)理论上本征自旋霍尔电导随准粒子寿命和空穴浓度的图。实验上的参数对应于理论上的强本征自旋霍尔效应区。

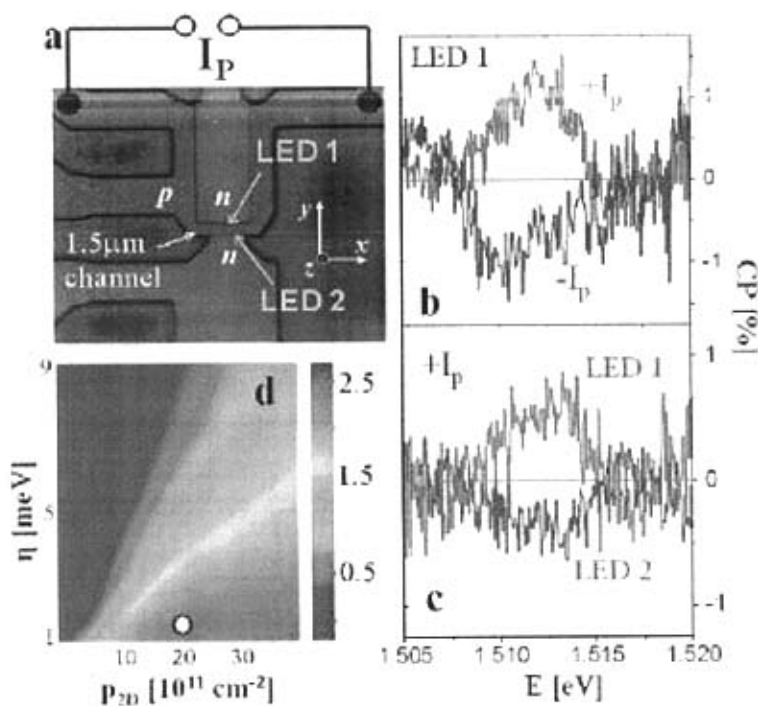


图 1.2 本征自旋霍尔效应实验结果 [8]

最近(2006年9月), 加州大学Santa Barbara分校的D.D.Awschalom小组利用Kerr rotation 显微技术对自旋极化进行成像 [4], 观测到了室温下的非本征自旋霍尔效应。他们所用材料是ZnSe, 温度可达295K。他们采用了低温下的分辨率达1微米的扫描克尔显微镜, 通过测量通道两端的克尔偏转角来演示自旋霍尔效应。他们测到的自旋电导率与理论上非本征自旋霍尔电导产生机制所预言的数值保持一致。主要实验结果如图1.3所示, a)测量自旋霍尔效应的几何示意图, 磁场平行于外方向, 电场大于零时, 自旋流小于零。(b) $x=0$, $y=48$ 微米和 $y=-48$ 微米处的克尔偏转角与磁场的关系。(c) 自旋积累与电场的关系, 电场过大时, 信号由于过热而衰减。(d) 偏转角, 弛豫时间和反射率的空间分布。

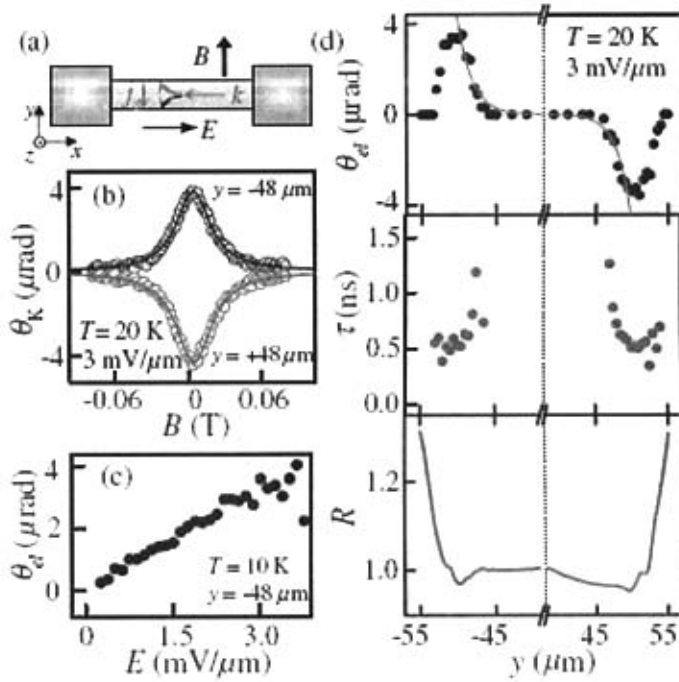


图 1.3 非本征自旋霍尔效应实验结果 [4]

1.3 最新理论进展

自旋霍尔效应既是一个崭新的课题 [10] [11] 或者是一个相当古老的课题 [6] 看你从哪个角度去看它。我们可以这样定义本征自旋霍尔效应 (ISHE)：非磁性系统（如 III-V 族的半导体）中，在无外加磁场的情况下，在垂直于外加电场方向，在单粒子能带结构近似下，完全由自旋-轨道耦合效应引起的自旋流，被称作本征的自旋霍尔效应。实验上观测到的本征的自旋霍尔效应 [8] 使这个研究课题又引起了人们的极大兴趣，因为围绕着自旋霍尔效应的存在问题在不同的理论模型下是有争议的 [17] [18] [19] [20] [21] [22] [23] [24] [25] [26] [27]。特别的，在被广泛研究的 Rashba 模型下，源自二维系统中的空间反演不对称，本征自旋霍尔电导 σ^{sH} 曾经被认为是一个大的普适常数 $e/8\pi$ ， e 是电子的电荷，然而接下来人们又发现，在 Born 近似下（忽略所有导致非本征自旋霍尔效应的与自旋相关的不对称散射），任意低浓度的杂质引入的顶角重整化精确的消去了 ISHE 的普适常数 $e/8\pi$ 。在其他模型中，如三维 Dresselhaus 模型或 Luttinger 价带空穴模型，ISHE 是有限的并依赖于模型的。由于到目前为止，Rashba 模型是处理二维半导体结构中自旋轨道耦合时被最广泛的研究过的模型，而杂质对于线性响应理论是否成立起着关键作用，因此 ISHE 在 Rashba 模型中精确的消失会使人们怀疑它是否是能够在所有的模型中都是有限值。

最近发表的一篇文章 [28] 指出以往认为二维 ISHE 在 Rashba 模型中由于顶角修正而消失的情形仅限于准经典的情形即能谱是没有被自旋轨道耦合修正过的抛物线的情形。

$$\varepsilon_0(p) = p^2/2m \quad (1.1)$$

在有自旋轨道耦合时，自旋流具有如下形式

$$j_i^\alpha = \sigma^{sH} e_{\alpha ij} E_j \quad (1.2)$$

$e_{\alpha ij}$ 是三阶反对称张量， $e_{xyz} = e_{zxy} = e_{yxz} = -e_{xzy} = -e_{zyx} = -e_{yzx} = 1$ ，其余为 0。我们以下将采用格林函数的方法来阐明能谱不是抛物线时有哪些不同。关于格林函数方法的详细介绍将在下章论述。

1.3.1 主要结果 [28]

考虑二维电子哈密顿量

$$H = p^2/2m^* + \alpha \hat{\mathbf{z}} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{p}) \quad (1.3)$$

α 是Rashba自旋轨道耦合强度, $\hat{\mathbf{z}}$ 是二维平面的法线方向。速度算符是

$$v_i(\mathbf{p}) = \frac{\partial H}{\partial p_i} = p_i/m^* + \alpha e_{zji} \sigma_j \quad (1.4)$$

自旋速度算符是

$$v_i^\mu(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \{v_i, \sigma_\mu\} = (p_i/m^*) \sigma_\mu + \alpha e_{z\mu i} \quad (1.5)$$

其中用到了 $\{\sigma_j, \sigma_\mu\} = 2\delta_{j\mu}$ 。在线性响应理论的框架下自旋霍尔电导可以通过算有两个矢量顶角 $\mathbf{j} = e\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{j}^z = \frac{1}{2}\mathbf{v}^z$ 的泡泡图1.4得到。

为了强调是如何得到相消的结果, 我们把自旋霍尔电导分成两部分

$$\sigma_{ij}^{sH}(\Omega) = \frac{e}{2\Omega} T \sum_{\omega} \sum_{\mathbf{p}} \text{tr}[v_i(\mathbf{p}) G(\mathbf{p}, \omega) (v_j^z(\mathbf{p}) + V_j^z(\omega, \Omega)) G(\mathbf{p}, \omega + \Omega)] \quad (1.6)$$

式(1.6)中第一部分对应图1.4中的单圈费曼图a), 记为 σ_0^{sH} , 由以下积分给出

$$\sigma_0^{sH} = \frac{e}{\Omega} T \sum_{\omega} \alpha A[\varepsilon_0] \quad (1.7)$$

其中

$$A[\varepsilon_0] = \frac{i}{4} \sum_{\mathbf{p}} \frac{p}{m} [G_{u+} G_d - G_{d+} G_u] \quad (1.8)$$

这里螺旋本征态的格林函数是

$$G_{u,d}(\mathbf{p}, \omega) = [i\tilde{\omega} - \xi_{u,d}(\mathbf{p})]^{-1} \quad (1.9)$$

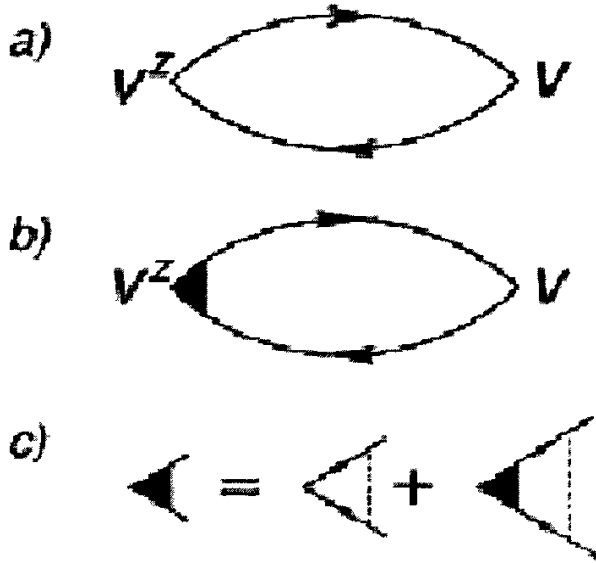


图 1.4 自旋霍尔电导的顶角修正费曼图 [28]

其中

$$\xi_{u,d} = \varepsilon_0(p) \mp \alpha p - \varepsilon_F \quad (1.10)$$

$$\tilde{\omega} = \omega + \text{sgn}\omega/2\tau \quad (1.11)$$

简单起见，我们省略了格林函数的一些参数，用下指标+来标记 $\omega + \Omega$ 。自能的虚部 $i/2\tau$ 来源于杂质， $\frac{1}{\tau} = 2\pi n_{imp} u^2 \nu_0$ ，其中 $V(p) = u = \text{const}$ 是杂质散射势的傅立叶变换， $\nu_0 = \frac{\nu_u + \nu_d}{2}$ 是费米面处的态密度平均值， n_{imp} 是杂质浓度。

在 ξ 近似的条件下，式(1.8)中对动量的积分可以被积掉，在抛物线能谱(1.1)的情形下，得到

$$\sigma_0^{sH} = \frac{e}{8\pi} \frac{4\Delta^2 \tau^2}{1 + 4\Delta^2 \tau^2} \quad (1.12)$$

其中 $2\Delta = 2\alpha p_F$ 是自旋轨道耦合在费米动量处造成的两个螺旋态之间的能隙大小。在完全无杂质的极限下， $\tau \rightarrow \infty$ ，上式给出与 α 无关的普适常数 $\frac{e}{8\pi}$ 。将图c)中的阶梯图求和的结果是得到重整化的顶角，直接的计算给出

$$\sigma_L^{sH} = \frac{e}{\Omega} T \sum_{\omega} A[\varepsilon_0] \frac{\alpha B[\varepsilon_0] - C[\varepsilon_0]}{2\pi\nu_0\tau - B[\varepsilon_0]} \quad (1.13)$$

其中

$$B[\varepsilon_0] = \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{p}} (G_{u+} + G_{d+}) (G_u + G_d) \quad (1.14)$$

$$C[\varepsilon_0] = \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{p}} \frac{p}{m} [G_{u+}G_u - G_{d+}G_d] \quad (1.15)$$

将裸顶角的结果和重整化过的顶角的结果加起来得到

$$\sigma_0^{sH} + \sigma_L^{sH} = \frac{e}{\Omega} T \sum_{\omega} A[\varepsilon_0] \frac{\alpha 2\pi\nu_0\tau - C[\varepsilon_0]}{2\pi\nu_0\tau - B[\varepsilon_0]} \quad (1.16)$$

当且仅当 $C[\varepsilon_0] = \alpha 2\pi\nu_0\tau$ 时精确的相消才会发生。在抛物线能谱(1.1)的情形下，确实是这样的。在 ξ 近似（一种把格林函数之前的因子都在费米面处取值的近似）的条件下，可以将总自旋霍尔电导表达成

$$\sigma_{ij}^{sH} = e_{zij} \frac{e}{8\pi} \left(\frac{p_u - p_d}{4\pi\alpha\nu_0} - 1 \right) \quad (1.17)$$

对抛物线能谱(1.1) $p_u - p_d = 4\pi\alpha\nu_0$ ，自旋霍尔电导确实为零。对线性能谱 $\varepsilon_0(p) = v_0 p$ ， $p_u - p_d = 4\pi\alpha\nu_0(v_0^2 - \alpha^2)/(v_0^2 + \alpha^2)$ ，这时自旋霍尔电导不为零。实际情况是抛物线能谱和线性能谱的相加，计算指出，自旋霍尔电导的领头阶贡献在小 α 时正比于 α 的平方。

第二章 线性响应的一般理论

为了研究含自旋轨道耦合系统中电子-声子相互作用对其输运性质的影响，我们先研究线性响应的一般理论。我们讲采用二次量子化的形式对Kubo公式进行微扰展开研究。论证电导率可以由计算松原表象下的流流关联函数再做解析延拓得到。我们还将对电声子相互作用的二次量子化过程给出详细推导。

2.1 Drude公式

为了解释金属中电子的导电问题，Paul Drude于1900年提出了电子导电的Drude公式。假设材料是由不动的正离子和无相互作用的密度为 n 的电子气组成，每一个电子的运动都受到来自电子与正离子碰撞的阻力，用弛豫时间 τ 来标度。我们得到电子的运动方程：

$$\frac{d}{dt} \langle v_x \rangle = \frac{e}{m} E_x - \frac{1}{\tau} \langle v_x \rangle \quad (2.1)$$

这个方程有解

$$\langle v_x \rangle = \frac{e\tau}{m} E_x \quad (2.2)$$

电流密度与速度有如下关系

$$j_x = ne \langle v_x \rangle = \frac{ne^2\tau}{m} E_x \quad (2.3)$$

由此可以得到直流电导率

$$\sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m} \quad (2.4)$$

以及交流电导率

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau} \quad (2.5)$$

2.2 Kubo公式

为了发展一套计算动力学系数或者说是对外加的各种扰动的响应系数的方法，Ryogo Kubo于1957年提出了Kubo公式 [5]，用来处理离非远离热平衡态的不可逆过程。在此之前，传统的计算非平衡态的物理量的方法是建立相应的分

子分布函数的动力学方程或输运方程。在相互作用的形式比较合适的情况下，动力学方程是容易建立的。Kubo公式则为我们提供了一种在线性响应理论的框架下计算包含任意相互作用的理论工具，大大拓宽了理论计算的广泛性。对电导而言，Kubo公式是

$$\sigma_{\mu\nu}(\omega) = \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \int_0^\beta \langle j_\mu(t-iu) j_\nu(0) \rangle du \quad (2.6)$$

其中 ω 是电磁波的频率，将上式作分部积分得到

$$\begin{aligned} \sigma_{\mu\nu}(\omega) &= \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \int_0^\beta \langle j_\mu(t-iu) j_\nu(0) \rangle du \\ &= \frac{1}{i\omega} \int_0^\infty d(e^{i\omega t}) \int_0^\beta \langle j_\mu(t-iu) j_\nu(0) \rangle du \\ &= -\frac{1}{i\omega} \int_0^\beta \langle j_\mu(-iu) j_\nu(0) \rangle - \frac{1}{i\omega} \int_0^\infty e^{i\omega t} dt \int_0^\beta \frac{\partial \langle j_\mu(t-iu) j_\nu(0) \rangle}{\partial t} du \\ &= -\frac{1}{i\omega} \int_0^\beta \langle j_\mu(-iu) j_\nu(0) \rangle - \frac{1}{\omega} \int_0^\infty e^{i\omega t} dt \int_0^\beta \frac{\partial \langle j_\mu(t-iu) j_\nu(0) \rangle}{\partial u} du \\ &= -\frac{1}{i\omega} \int_0^\beta \langle j_\mu(-iu) j_\nu(0) \rangle - \frac{1}{\omega} \int_0^\infty e^{i\omega t} dt [\langle j_\mu(t-i\beta) j_\nu(0) \rangle - \langle j_\mu(t) j_\nu(0) \rangle] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle j_\mu(t-i\beta) j_\nu(0) \rangle &= \text{Tr} \left[e^{\beta(\Omega + \sum_s \mu_s N_s - H)} j_\mu(t-i\beta) j_\nu(0) \right] \\ &= \text{Tr} \left[e^{\beta(\Omega + \sum_s \mu_s N_s - H)} e^{iHt} e^{\beta H} j_\mu(0) e^{-iHt} e^{-\beta H} j_\nu(0) \right] \\ &= \text{Tr} \left[e^{\beta\Omega} e^{\beta \sum_s \mu_s N_s - H} e^{\beta H} e^{iHt} j_\mu(0) e^{-iHt} e^{-\beta H} j_\nu(0) \right] \\ &= \text{Tr} \left[e^{\beta\Omega} e^{\beta \sum_s \mu_s N_s} e^{\frac{\beta^2}{2} \sum_s \mu_s [N_s, H]} e^{iHt} j_\mu(0) e^{-iHt} e^{-\beta H} j_\nu(0) \right] \\ &= \text{Tr} \left[e^{\beta\Omega} e^{\beta \sum_s \mu_s N_s} e^{\frac{\beta^2}{2} \sum_s \mu_s [N_s, H]} j_\mu(t) e^{-\beta H} j_\nu(0) \right] \end{aligned}$$

上式的推导过程中用到了Glauber公式

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{-\frac{1}{2}\hat{C}} = e^{\hat{B}} e^{\hat{A}} e^{\frac{1}{2}\hat{C}} \quad (2.7)$$

其中

$$\hat{C} = [\hat{A}, \hat{B}] \quad (2.8)$$

在粒子数算符与哈密顿量对易以及电流算符和粒子数算符对易的情况下，即

$$[N_s, H] = 0 \quad (2.9)$$

$$[j_\nu(0), N_s] = 0 \quad (2.10)$$

可以做进一步的简化

$$\begin{aligned} & Tr \left[e^{\beta\Omega} e^{\beta \sum_s \mu_s N_s} e^{\frac{\beta^2}{2} \sum_s \mu_s [N_s, H]} j_\mu(t) e^{-\beta H} j_\nu(0) \right] \\ &= Tr \left[e^{\beta\Omega} e^{-\beta H} j_\nu(0) e^{\beta \sum_s \mu_s N_s} e^{\frac{\beta^2}{2} \sum_s \mu_s [N_s, H]} j_\mu(t) \right] \\ &= Tr \left[e^{\beta\Omega} e^{\beta \sum_s \mu_s N_s - H} e^{-\frac{\beta^2}{2} \sum_s \mu_s [H, N_s]} e^{\frac{\beta^2}{2} \sum_s \mu_s [N_s, H]} j_\nu(0) j_\mu(t) \right] \\ &= Tr \left[e^{\beta\Omega} e^{\beta(\sum_s \mu_s N_s - H)} e^{\beta^2 \sum_s \mu_s [N_s, H]} j_\nu(0) j_\mu(t) \right] \\ &\approx Tr \left[e^{\beta\Omega} e^{\beta(\sum_s \mu_s N_s - H)} j_\nu(0) j_\mu(t) \right] \\ &= \langle j_\nu(0) j_\mu(t) \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle j_\mu(t - i\beta) j_\nu(0) \rangle &= Tr \left[e^{\beta(\Omega + \sum_s \mu_s N_s - H)} j_\mu(t - i\beta) j_\nu(0) \right] \\ &= \langle j_\nu(0) j_\mu(t) \rangle \end{aligned}$$

$$\sigma_{\mu\nu}(\omega) = -\frac{1}{i\omega} \int_0^\beta \langle j_\mu(-iu) j_\nu(0) \rangle - \frac{1}{\omega} \int_0^\infty e^{i\omega t} dt [\langle j_\nu(0) j_\mu(t) \rangle - \langle j_\mu(t) j_\nu(0) \rangle]$$

最后得到

$$\sigma_{\mu\nu}(\omega) = -\frac{1}{i\omega} \int_0^\beta \langle j_\mu(-iu) j_\nu(0) \rangle + \frac{1}{\omega} \int_0^\infty e^{i\omega t} dt \langle [j_\mu(t), j_\nu(0)] \rangle \quad (2.11)$$

2.3 谱分解定理

在公式(2.11)中的第二项可以通过谱分解定理与松原表象下的格林函数联系起来

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty e^{i\omega t} dt \langle [j_\mu(t), j_\nu(0)] \rangle \\ &= \int_0^\infty e^{i\omega t} dt \langle j_\mu(t) j_\nu(0) - j_\nu(0) j_\mu(t) \rangle \\ &= \sum_{nn'} \int_0^\infty e^{i\omega t} dt \langle n | j_\mu(t) | n' \rangle \langle n' | j_\nu(0) | n \rangle e^{-\beta E_n} - \sum_{nn'} \int_0^\infty e^{i\omega t} dt \langle n | j_\nu(0) | n' \rangle \langle n' | j_\mu(t) | n \rangle e^{-\beta E_n} \\ &= \sum_{nn'} \int_0^\infty e^{i\omega t} dt \langle n | e^{iHt} j_\mu(0) e^{-iHt} | n' \rangle \langle n' | j_\nu(0) | n \rangle e^{-\beta E_n} \\ &\quad - \sum_{nn'} \int_0^\infty e^{i\omega t} dt \langle n | j_\nu(0) | n' \rangle \langle n' | e^{iHt} j_\mu(0) e^{-iHt} | n \rangle e^{-\beta E_n} \\ &= \sum_{nn'} \int_0^\infty e^{i(\omega + E_n - E_{n'})t} dt \langle n | j_\mu(0) | n' \rangle \langle n' | j_\nu(0) | n \rangle e^{-\beta E_n} \\ &\quad - \sum_{nn'} \int_0^\infty e^{i(\omega + E_{n'} - E_n)t} dt \langle n | j_\nu(0) | n' \rangle \langle n' | j_\mu(0) | n \rangle e^{-\beta E_n} \\ &= \sum_{nn'} \langle n | j_\mu(0) | n' \rangle \langle n' | j_\nu(0) | n \rangle \frac{i}{\omega + E_n - E_{n'} + i\delta} e^{-\beta E_n} \\ &\quad - \sum_{nn'} \langle n | j_\nu(0) | n' \rangle \langle n' | j_\mu(0) | n \rangle \frac{i}{\omega + E_{n'} - E_n + i\delta} e^{-\beta E_n} \\ &= \sum_{nn'} \langle n | j_\mu(0) | n' \rangle \langle n' | j_\nu(0) | n \rangle \frac{i}{\omega + E_n - E_{n'} + i\delta} e^{-\beta E_n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{nn'} \langle n | j_\mu(0) | n' \rangle \langle n' | j_\nu(0) | n \rangle \frac{i}{\omega + E_n - E_{n'} + i\delta} e^{\beta(E_n - E_{n'})} e^{-\beta E_n} \\
& = \sum_{nn'} \langle n | j_\mu(0) | n' \rangle \langle n' | j_\nu(0) | n \rangle \frac{-i}{\omega + E_n - E_{n'} + i\delta} [e^{\beta(E_n - E_{n'})} - 1] e^{-\beta E_n}
\end{aligned}$$

定义松原表象下的流流关联格林函数 $M_{\mu\nu}$ 如下,

$$\begin{aligned}
M_{\mu\nu}(\omega_n) &= \int_0^\beta d\tau e^{\omega_n \tau} \langle T j_\mu(\tau) j_\nu(0) \rangle \\
&= \int_0^\beta d\tau e^{\omega_n \tau} \sum_{nn'} \langle n | j_\mu(\tau) | n' \rangle \langle n' | j_\nu(0) | n \rangle e^{-\beta E_n} \\
&= \int_0^\beta d\tau e^{\omega_n \tau} \sum_{nn'} \langle n | e^{H\tau} j_\mu(0) e^{-H\tau} | n' \rangle \langle n' | j_\nu(0) | n \rangle e^{-\beta E_n} \\
&= \int_0^\beta d\tau e^{\omega_n \tau} \sum_{nn'} e^{(E_n - E_{n'})\tau} \langle n | j_\mu(0) | n' \rangle \langle n' | j_\nu(0) | n \rangle e^{-\beta E_n} \\
&= \sum_{nn'} \int_0^\beta d\tau e^{(E_n - E_{n'} + \omega_n)\tau} \langle n | j_\mu(0) | n' \rangle \langle n' | j_\nu(0) | n \rangle e^{-\beta E_n} \\
&= \sum_{nn'} \frac{\langle n | j_\mu(0) | n' \rangle \langle n' | j_\nu(0) | n \rangle}{\omega_n + E_n - E_{n'}} [e^{(\omega_n + E_n - E_{n'})\beta} - 1] e^{-\beta E_n} \\
&= \sum_{nn'} \langle n | j_\mu(0) | n' \rangle \langle n' | j_\nu(0) | n \rangle \frac{[e^{\beta(E_n - E_{n'})} - 1]}{\omega_n + E_n - E_{n'}} e^{-\beta E_n}
\end{aligned}$$

比较以上两式可得,

$$\frac{1}{\omega} \int_0^\infty e^{i\omega t} dt \langle [j_\mu(t), j_\nu(0)] \rangle = \frac{M_{\mu\nu}(\omega_n \rightarrow \omega + i\delta)}{i\omega} \quad (2.12)$$

2.4 Kubo公式的计算

Kubo公式 [5]的第一部分可以写成,

$$\sigma_{\mu\nu}^0(\omega) = -\frac{1}{i\omega} \int_0^\beta \langle j_\mu(-i\hbar\eta) j_\nu(0) \rangle d\eta \quad (2.13)$$

电流算符随时间的变化是,

$$j_{\mu}(t) = e^{iKt/\hbar} j_{\mu}(0) e^{-iKt/\hbar} \quad (2.14)$$

其中,

$$K = \sum_s \mu_s N_s - H \quad (2.15)$$

对K有如下关系,

$$[K, A] = \frac{\hbar}{i} \frac{dA}{dt} \quad (2.16)$$

对算符的平均值是这样定义的,

$$\langle O \rangle = Tr\{\rho O\} \quad (2.17)$$

ρ 是密度矩阵,

$$\rho = \frac{\exp(\beta K)}{Tr \exp(\beta K)} \quad (2.18)$$

μ_s, N_s 分别是s类粒子的化学势和粒子数, β 是温度的倒数。我们定义一个函数,

$$\phi(\eta) = e^{\eta K} A e^{-\eta K} - A \quad (2.19)$$

满足如下关系,

$$\frac{\partial \phi(\eta)}{\partial \eta} = e^{\eta K} [K, A] e^{-\eta K} \quad (2.20)$$

因此,

$$\begin{aligned} [A(0), \rho] &= \rho \phi(\beta) \\ &= \rho \int_0^\beta d\eta \frac{\partial \phi(\eta)}{\partial \eta} \\ &= \rho \int_0^\beta d\eta e^{\eta K} [K, A] e^{-\eta K} \\ &= \rho \int_0^\beta d\eta e^{\eta K} \frac{\hbar}{i} \frac{dA}{dt} e^{-\eta K} \\ &= \rho \int_0^\beta d\eta \frac{\hbar}{i} \dot{A}(-i\hbar\eta) \end{aligned}$$

$$\int_0^\beta d\eta \rho \dot{r}_\mu(-i\hbar\eta) = \frac{i}{\hbar} \rho \phi(\beta) = \frac{i}{\hbar} [r_\mu(0), \rho] \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\mu\nu}^0(\omega) &= -\frac{e^2}{i\omega} \int_0^\beta Tr \rho \sum_i \dot{r}_{i\mu}(-i\hbar\eta) \sum_j \dot{r}_{j\nu}(0) d\eta \\ &= -\frac{e^2}{i\omega} Tr \frac{i}{\hbar} [\sum_i r_{i\mu}(0), \rho] \sum_j \dot{r}_{j\nu}(0) \\ &= \frac{e^2}{\hbar\omega} Tr \rho [\sum_i r_{i\mu}(0), \sum_j \dot{r}_{j\nu}(0)] \end{aligned}$$

考虑既有Rashba也有Dresselhaus自旋轨道耦合系统的哈密顿量,

$$H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m^*} + \frac{\alpha}{\hbar} (\sigma_x p_y - \sigma_y p_x) - \frac{\beta}{\hbar} (\sigma_x p_x - \sigma_y p_y) \quad (2.22)$$

速度算符是,

$$\dot{r}_x = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m^*} - \frac{\alpha}{\hbar} \sigma_y - \frac{\beta}{\hbar} \sigma_x \quad (2.23)$$

$$\dot{r}_y = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m^*} + \frac{\alpha}{\hbar} \sigma_x + \frac{\beta}{\hbar} \sigma_y \quad (2.24)$$

$$[r_{i\mu}, \dot{r}_{j\nu}] = \frac{i\hbar}{m^*} \delta_{\mu\nu} \delta_{ij} \quad (2.25)$$

最后给出,

$$\sigma_{\mu\nu}^0(\omega) = \sum_s \frac{1}{\hbar\omega} \frac{i\hbar n_s}{m^*} \delta_{\mu\nu} = \sum_s \frac{ie^2 n_s}{m^* \omega} \delta_{\mu\nu} \quad (2.26)$$

其中 n_s 是s类粒子的数目。可见最终结果给出一个纯虚数的电导, 类似于电感。

2.5 微扰展开

假设系统具有如下的哈密顿量,

$$H = H_0 + H_I \quad (2.27)$$

其中,

$$H_0 = \sum_{\mathbf{p}, n, l} E_{\mathbf{p}, n, l} a_{\mathbf{p}, n, l}^\dagger a_{\mathbf{p}, n, l} \quad (2.28)$$

$$H_I = H_{ee} + H_{ep} \quad (2.29)$$

其中,

$$\begin{aligned} H_{ee} &= \sum_{\mathbf{p}, n, l} \sum_{\mathbf{p}', n', l'} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} V(\mathbf{q}) a_{\mathbf{p}+\mathbf{q}, n, l}^\dagger a_{\mathbf{p}, n, l} a_{\mathbf{p}'-\mathbf{q}, n', l'}^\dagger a_{\mathbf{p}', n', l'} \\ H_{ep} &= \sum_{\mathbf{p}, n, l} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} C_{n, l}(\mathbf{q}) a_{\mathbf{p}+\mathbf{q}, n, l}^\dagger a_{\mathbf{p}, n, l} (b_{\mathbf{q}} + b_{-\mathbf{q}}^\dagger) \end{aligned}$$

定义演化算符 U ,

$$U(\tau, \tau') = e^{\tau H_0} e^{-(\tau - \tau') H} e^{-\tau' H_0} \quad (2.30)$$

则

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu}(\tau) &= \langle T j_\mu(\tau) j_\nu(0) \rangle = e^{\beta\Omega} \text{Tr} e^{-\beta H} e^{H\tau} j_\mu(0) e^{-H\tau} j_\nu(0) \\ &= e^{\beta\Omega} \text{Tr} [e^{-\beta H} e^{H\tau} e^{-H_0\tau} j_\mu^{(I)}(\tau) e^{H_0\tau} e^{-H\tau} j_\nu^{(I)}(0)] \\ &= e^{\beta\Omega} \text{Tr} [e^{-\beta H_0} U(\beta, 0) U(0, \tau) j_\mu^{(I)}(\tau) U(\tau, 0) j_\nu^{(I)}(0)] \\ &= e^{\beta\Omega} e^{-\beta\Omega_0} [e^{\beta(\Omega_0 - H_0)} U(\beta, 0) U(0, \tau) j_\mu^{(I)}(\tau) U(\tau, 0) j_\nu^{(I)}(0)] \\ &= e^{\beta\Omega} e^{-\beta\Omega_0} \langle T j_\mu^{(I)}(\tau) j_\nu^{(I)}(0) U(\beta, 0) \rangle_0 \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned} e^{-\beta\Omega} &= \text{Tr} [e^{-\beta(H_0 + H_I)}] = \text{Tr} [e^{-\beta H_0} U(\beta, 0)] \\ &= e^{-\beta\Omega_0} \text{Tr} [e^{\beta(\Omega_0 - H_0)} U(\beta, 0)] \\ &= e^{-\beta\Omega_0} \langle U(\beta, 0) \rangle_0 \end{aligned}$$

则 $M_{\mu\nu}(\tau)$ 可以写成,

$$M_{\mu\nu}(\tau) = \frac{e^{-\beta\Omega_0} \langle T j_\mu^{(I)}(\tau) j_\nu^{(I)}(0) U(\beta, 0) \rangle_0}{e^{-\beta\Omega_0} \langle U(\beta, 0) \rangle_0}$$

$$\approx \frac{\langle T j_{\mu}^{(I)}(\tau) j_{\nu}^{(I)}(0) U(\beta, 0) \rangle_0}{\langle U(\beta, 0) \rangle_0}$$

其中演化算符具有如下形式解,

$$\begin{aligned} U(\beta, 0) &= \exp \left[- \int_0^{\beta} H_I(\tau) d\tau \right] \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int \cdots \int d\tau_1 \cdots d\tau_n T [H_I(\tau_1) \cdots H_I(\tau_n)] \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int \cdots \int d\tau_1 \cdots d\tau_n T \{ [H_{ee}(\tau_1) + H_{ep}(\tau_1)] \cdots [H_{ee}(\tau_n) + H_{ep}(\tau_n)] \} \end{aligned}$$

2.6 二次量子化

下面对文献 [29] 中的哈密顿量给出详细的二次量子化过程, 先写出一量子化的哈密顿量

$$H = \sum_i \left[\frac{\mathbf{p}_i^2 + p_{z,i}^2}{2m} + V(\mathbf{r}_i) \right] + \frac{e^2}{2} \sum_{i \neq j} \frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} + e \sum_i \Phi(\mathbf{r}_i) \quad (2.31)$$

电声子耦合带来的有效势满足泊松方程

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = 4\pi e \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}) \quad (2.32)$$

$\mathbf{P}$ 是电声子相互作用带来的极化

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \Theta \sum_{\lambda} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \left(b_{\mathbf{q}} e^{i\frac{\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}{\hbar}} \mathbf{e}_{\mathbf{q},\lambda} + b_{\mathbf{q}}^{\dagger} e^{-i\frac{\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}{\hbar}} \mathbf{e}_{\mathbf{q},\lambda} \right) \quad (2.33)$$

在考虑电子与 LO 声子相互作用时,

$$\Theta = \sqrt{\frac{\hbar\omega_{LO}}{8\pi} \left[\frac{1}{\epsilon(\infty)} - \frac{1}{\epsilon(0)} \right]} \quad (2.34)$$

极化的散度是,

$$\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}) = i\frac{\Theta}{\hbar} \sum_{\lambda} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \left(b_{\mathbf{q}} e^{i\frac{\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}{\hbar}} \mathbf{q} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{q},\lambda} - b_{\mathbf{q}}^{\dagger} e^{-i\frac{\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}{\hbar}} \mathbf{q} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{q},\lambda} \right) \quad (2.35)$$

由泊松方程解得有效势是,

$$\Phi(\mathbf{r}) = -i\Theta \sum_{\lambda} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{4\pi\hbar e}{q^2} \left(b_{\mathbf{q}} e^{i\frac{\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}{\hbar}} \mathbf{q} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{q},\lambda} - b_{\mathbf{q}}^{\dagger} e^{-i\frac{\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}{\hbar}} \mathbf{q} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{q},\lambda} \right) \quad (2.36)$$

TO声子模式垂直于波矢, LO声子模式平行于波矢,

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{q},TO} = 0$$

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{q},LO} = q$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = -i\Theta \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{4\pi\hbar e}{q} \left(b_{\mathbf{q}} e^{i\frac{\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}{\hbar}} - b_{\mathbf{q}}^{\dagger} e^{-i\frac{\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}{\hbar}} \right) \quad (2.37)$$

哈密顿量可以被写成,

$$\begin{aligned} H = & \sum_i \left[\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + V(\mathbf{r}_i) \right] + \frac{e^2}{2} \sum_{i \neq j} \frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \\ & - i\Theta \sum_i \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{4\pi\hbar e^2}{q} \left(b_{\mathbf{q}} e^{i\frac{\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_i}{\hbar}} - b_{\mathbf{q}}^{\dagger} e^{-i\frac{\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_i}{\hbar}} \right) \end{aligned}$$

选取下面方程的解作为二次量子化的一套完备基,

$$\left[\frac{\mathbf{p}^2 + p_z^2}{2m} + V(z) \right] \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \quad (2.38)$$

$$V(z) = V(z - la) \quad (2.39)$$

$$\psi_{\mathbf{p},n}(\mathbf{r}, z) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} e^{i\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{\hbar}} \xi_n(z - la) \quad (2.40)$$

$$\left[\frac{\mathbf{p}^2 + p_z^2}{2m} + V(z) \right] \psi_{\mathbf{p},n,l}(\mathbf{r}, z) = E_{\mathbf{p},n,l} \psi_{\mathbf{p},n,l}(\mathbf{r}, z) \quad (2.41)$$

求和可以被写成对全空间的积分,

$$\begin{aligned}
 H = & \int d^2\mathbf{r} dz \Psi^\dagger(\mathbf{r}, z) \left[\frac{\mathbf{p}^2 + p_z^2}{2m} + V(\mathbf{r}) \right] \Psi(\mathbf{r}, z) \\
 & + \frac{e^2}{2} \iint d^2\mathbf{r} d^2\mathbf{r}' dz dz' \Psi^\dagger(\mathbf{r}, z) \Psi(\mathbf{r}, z) \frac{1}{|(\mathbf{r}, z) - (\mathbf{r}', z')|} \Psi^\dagger(\mathbf{r}', z') \Psi(\mathbf{r}', z') \\
 & - i\Theta \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{4\pi\hbar e^2}{q} \int d^2\mathbf{r} dz \Psi^\dagger(\mathbf{r}, z) \left(b_{\mathbf{q}} e^{i\frac{\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}, z)}{\hbar}} - b_{\mathbf{q}}^\dagger e^{-i\frac{\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}, z)}{\hbar}} \right) \Psi(\mathbf{r}, z)
 \end{aligned}$$

Ψ 可以用完备基展开,

$$\begin{aligned}
 \Psi(\mathbf{r}, z) &= \sum_{\mathbf{p}, n, l} a_{\mathbf{p}, n, l} \psi_{\mathbf{p}, n, l}(\mathbf{r}, z) \\
 &= \frac{1}{2\pi\hbar} \sum_{\mathbf{p}, n, l} a_{\mathbf{p}, n, l} e^{i\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{\hbar}} \xi_n(z - la)
 \end{aligned}$$

哈密顿的第一项,

$$\begin{aligned}
 & \int d^2\mathbf{r} dz \Psi^\dagger(\mathbf{r}, z) \left[\frac{\mathbf{p}^2 + p_z^2}{2m} + V(\mathbf{r}) \right] \Psi(\mathbf{r}, z) \\
 &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \sum_{\mathbf{p}, n, l} \sum_{\mathbf{p}', n', l'} E_{\mathbf{p}, n, l} a_{\mathbf{p}', n', l'}^\dagger a_{\mathbf{p}, n, l} \int d^2\mathbf{r} dz e^{-i\frac{(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\cdot\mathbf{r}}{\hbar}} \xi_{n'}^*(z - l'a) \xi_n(z - la) \\
 &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \sum_{\mathbf{p}, n, l} \sum_{\mathbf{p}', n', l'} E_{\mathbf{p}, n, l} a_{\mathbf{p}', n', l'}^\dagger a_{\mathbf{p}, n, l} (2\pi\hbar)^2 \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \delta_{nn'} \delta_{ll'} \\
 &= \sum_{\mathbf{p}, n, l} E_{\mathbf{p}, n, l} a_{\mathbf{p}, n, l}^\dagger a_{\mathbf{p}, n, l}
 \end{aligned}$$

电子-电子之间的库仑相互作用项,

$$\begin{aligned}
 & \frac{e^2}{2} \iint d^2\mathbf{r} d^2\mathbf{r}' dz dz' \Psi^\dagger(\mathbf{r}, z) \Psi(\mathbf{r}, z) \frac{1}{|(\mathbf{r}, z) - (\mathbf{r}', z')|} \Psi^\dagger(\mathbf{r}', z') \Psi(\mathbf{r}', z') \\
 &= \frac{e^2}{2} \frac{1}{(2\pi\hbar)^4} \sum_{\mathbf{p}, n, l} \sum_{\mathbf{p}', n', l'} \sum_{\mathbf{p}'', n'', l''} \sum_{\mathbf{p}''', n''', l'''} a_{\mathbf{p}, n, l}^\dagger a_{\mathbf{p}', n', l'} a_{\mathbf{p}'', n'', l''}^\dagger a_{\mathbf{p}''', n''', l'''} \\
 & \iint d^2\mathbf{r} d^2\mathbf{r}' dz dz' e^{-i\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{\hbar}} e^{i\frac{\mathbf{p}'\cdot\mathbf{r}}{\hbar}} e^{-i\frac{\mathbf{p}''\cdot\mathbf{r}'}{\hbar}} e^{i\frac{\mathbf{p}'''\cdot\mathbf{r}'}{\hbar}} \\
 & \frac{1}{|(\mathbf{r}, z) - (\mathbf{r}', z')|} \xi_n^*(z - la) \xi_{n'}(z - l'a) \xi_{n''}^*(z' - l''a) \xi_{n'''}(z' - l'''a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^2}{2} \frac{1}{(2\pi\hbar)^4} \sum_{\mathbf{p},n,l} \sum_{\mathbf{p}',n',l'} \sum_{\mathbf{p}'',n'',l''} \sum_{\mathbf{p}''',n''',l'''} a_{\mathbf{p},n,l}^\dagger a_{\mathbf{p}',n',l'} a_{\mathbf{p}'',n'',l''}^\dagger a_{\mathbf{p}''',n''',l'''} \\
&\iint d^2\mathbf{r} d^2\mathbf{r}' dz dz' e^{-i\frac{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{r}}{\hbar}} e^{-i\frac{(\mathbf{p}''-\mathbf{p}''')\cdot\mathbf{r}'}{\hbar}} \\
&\int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{Q^2 + q_z^2} e^{i\mathbf{Q}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} e^{iq_z(z-z')} \xi_n^*(z-la) \xi_{n'}(z-l'a) \xi_{n''}^*(z'-l''a) \xi_{n'''}(z'-l'''a) \\
&= \frac{e^2}{2} \frac{1}{(2\pi\hbar)^4} \sum_{\mathbf{p},n,l} \sum_{\mathbf{p}',n',l'} \sum_{\mathbf{p}'',n'',l''} \sum_{\mathbf{p}''',n''',l'''} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{Q^2 + q_z^2} a_{\mathbf{p},n,l}^\dagger a_{\mathbf{p}',n',l'} a_{\mathbf{p}'',n'',l''}^\dagger a_{\mathbf{p}''',n''',l'''} \\
&\iint d^2\mathbf{r} d^2\mathbf{r}' dz dz' e^{-i\frac{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')-\mathbf{Q}}{\hbar}\cdot\mathbf{r}} e^{-i\frac{(\mathbf{p}''-\mathbf{p}'''+\mathbf{Q})\cdot\mathbf{r}'}{\hbar}} \\
&e^{iq_z(z-z')} \xi_n^*(z-la) \xi_{n'}(z-l'a) \xi_{n''}^*(z'-l''a) \xi_{n'''}(z'-l'''a) \\
&= \frac{e^2}{2} \frac{1}{(2\pi\hbar)^4} \sum_{\mathbf{p},n,l} \sum_{\mathbf{p}',n',l'} \sum_{\mathbf{p}'',n'',l''} \sum_{\mathbf{p}''',n''',l'''} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{Q^2 + q_z^2} a_{\mathbf{p},n,l}^\dagger a_{\mathbf{p}',n',l'} a_{\mathbf{p}'',n'',l''}^\dagger a_{\mathbf{p}''',n''',l'''} \\
&(2\pi\hbar)^4 \delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}'-\mathbf{Q}) \delta(\mathbf{p}''-\mathbf{p}'''+\mathbf{Q}) \\
&\iint dz dz' e^{iq_z(z-z')} \xi_n^*(z-la) \xi_{n'}(z-l'a) \xi_{n''}^*(z'-l''a) \xi_{n'''}(z'-l'''a) \\
&= \frac{e^2}{2} \sum_{\mathbf{p},n,l} \sum_{\mathbf{p}'',n'',l''} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{Q^2 + q_z^2} e^{iq_z(z-z')} a_{\mathbf{p},n,l}^\dagger a_{\mathbf{p}-\mathbf{Q},n,l} a_{\mathbf{p}'',n'',l''}^\dagger a_{\mathbf{p}''+\mathbf{Q},n'',l''} \\
&\int dz |\xi_n(z-la)|^2 \int dz' |\xi_{n''}(z'-l''a)|^2 \\
&= \frac{e^2}{2} \sum_{\mathbf{p},n,l} \sum_{\mathbf{p}'',n'',l''} \int \frac{d^2\mathbf{Q}}{(2\pi)^2} \int \frac{dq_z}{2\pi} \frac{1}{Q^2 + q_z^2} e^{iq_z(z-z')} a_{\mathbf{p},n,l}^\dagger a_{\mathbf{p}-\mathbf{Q},n,l} a_{\mathbf{p}'',n'',l''}^\dagger a_{\mathbf{p}''+\mathbf{Q},n'',l''} \\
&\int dz |\xi_n(z-la)|^2 \int dz' |\xi_{n''}(z'-l''a)|^2 \\
&= \frac{e^2}{2} \sum_{\mathbf{p},n,l} \sum_{\mathbf{p}'',n'',l''} \int \frac{d^2\mathbf{Q}}{(2\pi)^2} \int \frac{dq_z}{2\pi} \frac{1}{(q_z + i\mathbf{Q})(q_z - i\mathbf{Q})} e^{iq_z(z-z')} a_{\mathbf{p},n,l}^\dagger a_{\mathbf{p}-\mathbf{Q},n,l} a_{\mathbf{p}'',n'',l''}^\dagger a_{\mathbf{p}''+\mathbf{Q},n'',l''} \\
&\int dz |\xi_n(z-la)|^2 \int dz' |\xi_{n''}(z'-l''a)|^2 \\
&= \frac{e^2}{2} \sum_{\mathbf{p},n,l} \sum_{\mathbf{p}'',n'',l''} \int \frac{d^2\mathbf{Q}}{(2\pi)^2} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(i\mathbf{Q} + i\mathbf{Q})} e^{-Q|z-z'|} a_{\mathbf{p},n,l}^\dagger a_{\mathbf{p}-\mathbf{Q},n,l} a_{\mathbf{p}'',n'',l''}^\dagger a_{\mathbf{p}''+\mathbf{Q},n'',l''} \\
&\int dz |\xi_n(z-la)|^2 \int dz' |\xi_{n''}(z'-l''a)|^2 \\
&= \frac{e^2}{2} \sum_{\mathbf{p},n,l} \sum_{\mathbf{p}'',n'',l''} \int \frac{d^2\mathbf{Q}}{(2\pi)^2} \frac{1}{2Q} e^{-Q|z-z'|} a_{\mathbf{p},n,l}^\dagger a_{\mathbf{p}-\mathbf{Q},n,l} a_{\mathbf{p}'',n'',l''}^\dagger a_{\mathbf{p}''+\mathbf{Q},n'',l''} \\
&\int dz |\xi_n(z-la)|^2 \int dz' |\xi_{n''}(z'-l''a)|^2
\end{aligned}$$

电声子相互作用项,

$$\begin{aligned}
& -i\Theta \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{4\pi\hbar e^2}{q} \int d^2\mathbf{r} dz \Psi^\dagger(\mathbf{r}, z) \left(b_{\mathbf{q}} e^{i\frac{\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}, z)}{\hbar}} - b_{\mathbf{q}}^\dagger e^{-i\frac{\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}, z)}{\hbar}} \right) \Psi(\mathbf{r}, z) \\
& = -i\Theta \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{4\pi\hbar e^2}{q} \sum_{\mathbf{p}', n', l'} \sum_{\mathbf{p}, n, l} a_{\mathbf{p}', n', l'}^\dagger a_{\mathbf{p}, n, l} \\
& \quad \int d^2\mathbf{r} dz \xi_{n'}^\dagger(z - l'a) \xi_n(z - la) \left(b_{\mathbf{q}} e^{-i\frac{(\mathbf{p}' - \mathbf{Q} - \mathbf{p})\cdot\mathbf{r}}{\hbar}} e^{i\frac{q_z z}{\hbar}} - b_{\mathbf{q}}^\dagger e^{-i\frac{(\mathbf{p}' + \mathbf{Q} - \mathbf{p})\cdot\mathbf{r}}{\hbar}} e^{-i\frac{q_z z}{\hbar}} \right) \\
& = -i\Theta \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int \frac{d^2\mathbf{Q} dq_z}{(2\pi)^3} \frac{4\pi\hbar e^2}{q} \sum_{\mathbf{p}', n', l'} \sum_{\mathbf{p}, n, l} a_{\mathbf{p}', n', l'}^\dagger a_{\mathbf{p}, n, l} (2\pi\hbar)^2 \\
& \quad \delta_{nn'} \delta_{ll'} \int dz \xi_{n'}^\dagger(z - la) \xi_n(z - la) \left[b_{\mathbf{q}} e^{i\frac{q_z z}{\hbar}} \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{Q} - \mathbf{p}) - b_{\mathbf{q}}^\dagger e^{-i\frac{q_z z}{\hbar}} \delta(\mathbf{p}' + \mathbf{Q} - \mathbf{p}) \right] \\
& = -i\Theta \int \frac{d^2\mathbf{Q} dq_z}{(2\pi)^3} \frac{4\pi\hbar e^2}{q} \sum_{\mathbf{p}, n, l} \left(b_{\mathbf{q}} e^{i\frac{q_z z}{\hbar}} a_{\mathbf{p} + \mathbf{Q}, n, l}^\dagger a_{\mathbf{p}, n, l} - b_{\mathbf{q}}^\dagger e^{-i\frac{q_z z}{\hbar}} a_{\mathbf{p} - \mathbf{Q}, n, l}^\dagger a_{\mathbf{p}, n, l} \right) \int dz |\xi_n(z - la)|^2 \\
& = -i\Theta \int \frac{d^2\mathbf{Q} dq_z}{(2\pi)^3} \frac{4\pi\hbar e^2}{q} \sum_{\mathbf{p}, n, l} \left(b_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{p} + \mathbf{Q}, n, l}^\dagger a_{\mathbf{p}, n, l} + b_{-\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p} + \mathbf{Q}, n, l}^\dagger a_{\mathbf{p}, n, l} \right) \int dz e^{i\frac{q_z z}{\hbar}} |\xi_n(z - la)|^2 \\
& = -i\Theta \int \frac{d^2\mathbf{Q} dq_z}{(2\pi)^3} \frac{4\pi\hbar e^2}{q} \int dz e^{i\frac{q_z z}{\hbar}} |\xi_n(z - la)|^2 \sum_{\mathbf{p}, n, l} a_{\mathbf{p} + \mathbf{Q}, n, l}^\dagger a_{\mathbf{p}, n, l} (b_{\mathbf{q}} + b_{-\mathbf{q}}^\dagger)
\end{aligned}$$

总结如下,

$$\int d\mathbf{r} \Psi^\dagger(\mathbf{r}) \left[\frac{\mathbf{p}^2 + p_z^2}{2m} + V(\mathbf{r}) \right] \Psi(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{p}, n, l} E_{\mathbf{p}, n, l} a_{\mathbf{p}, n, l}^\dagger a_{\mathbf{p}, n, l}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{e^2}{2} \iint d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \Psi^\dagger(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}) \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \Psi^\dagger(\mathbf{r}') \Psi(\mathbf{r}') \\
& = \frac{e^2}{2} \sum_{\mathbf{p}, n, l} \sum_{\mathbf{p}'', n'', l''} \int \frac{d^2\mathbf{Q}}{(2\pi)^2} \frac{1}{2Q} e^{-Q|z - z'|} a_{\mathbf{p}, n, l}^\dagger a_{\mathbf{p} - \mathbf{Q}, n, l} a_{\mathbf{p}'', n'', l''}^\dagger a_{\mathbf{p}'' + \mathbf{Q}, n'', l''} \\
& \quad \int dz |\xi_n(z - la)|^2 \int dz' |\xi_{n''}(z' - l''a)|^2
\end{aligned}$$

$$-i\Theta \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{4\pi\hbar e^2}{q} \int d\mathbf{r} \Psi^\dagger(\mathbf{r}) \left(b_{\mathbf{q}} e^{i\frac{\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}{\hbar}} - b_{\mathbf{q}}^\dagger e^{-i\frac{\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}{\hbar}} \right) \Psi(\mathbf{r})$$

2.7. 总结

$$= -i\Theta \int \frac{d^2\mathbf{Q}dq_z}{(2\pi)^3} \frac{4\pi\hbar e^2}{q} \int dz e^{i\frac{2\pi z}{\hbar}} |\xi_n(z-la)|^2 \sum_{\mathbf{p},n,l} a_{\mathbf{p}+\mathbf{Q},n,l}^\dagger a_{\mathbf{p},n,l} (b_{\mathbf{q}} + b_{-\mathbf{q}}^\dagger)$$

最后的结果是，

$$H = \sum_{\mathbf{p},n,l} E_{\mathbf{p},n,l} a_{\mathbf{p},n,l}^\dagger a_{\mathbf{p},n,l} + \sum_{\mathbf{p},n,l} \sum_{\mathbf{p}',n',l'} \int \frac{d^2\mathbf{Q}}{(2\pi)^2} V_{nl,n'l'}(\mathbf{Q}) a_{\mathbf{p},n,l}^\dagger a_{\mathbf{p}-\mathbf{Q},n,l} a_{\mathbf{p}'',n'',l''}^\dagger a_{\mathbf{p}'+\mathbf{Q},n'',l''} \\ + \sum_{\mathbf{p},n,l} \int \frac{d^2\mathbf{Q}dq_z}{(2\pi)^3} C_{n,l}(\mathbf{q}) a_{\mathbf{p}+\mathbf{Q},n,l}^\dagger a_{\mathbf{p},n,l} (b_{\mathbf{q}} + b_{-\mathbf{q}}^\dagger)$$

其中，

$$V_{nl,n'l'}(\mathbf{Q}) = \frac{e^2}{2} \frac{1}{2Q} \int dz |\xi_n(z-la)|^2 \int dz' e^{-Q|z-z'|} |\xi_{n'}(z'-l'a)|^2 \\ C_{n,l}(\mathbf{q}) = -i\Theta \frac{4\pi\hbar e^2}{q} \int dz e^{i\frac{2\pi z}{\hbar}} |\xi_n(z-la)|^2$$

2.7 总结

在本章中，然后推导了如何从Kubo公式出发，将kubo公式的流-流关联函数计算与场论中的费曼图联系起来，最终在松原表象下直接做作图微扰展开的计算，再做解析延拓得到电导的过程。推导过程中证明并利用了谱表示定理。在这一章的最后还推导了如何从三维空间出发，严格得到二维平面中的电子与三维的LO声子相互作用的二次量子化的形式。

第三章 自旋轨道耦合对极化子效应的增强

本章我们将在含自旋轨道耦合系统中研究电声子相互作用引起的极化子效应。在不含自旋轨道耦合系统中，极化子效应会使电子的有效质量增大。我们采用Rayleigh-Schrödinger微扰理论研究了电子-LO声子相互作用引起的电子自能修正，发现自旋轨道耦合能增强极化子的结合能。利用能量的表达式我们可以计算有效质量，我们给出了电子的有效质量的倒数对Rashba自旋轨道耦合系数以及波矢 $\mathbf{k}$ 的依赖关系。

3.1 二次量子化的哈密顿量及流算符

包含Rashba和线性Dresselhaus自旋轨道相互作用的多体哈密顿量可以写成

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m^*} + \frac{\alpha}{\hbar}(\sigma_x p_y - \sigma_y p_x) - \frac{\beta}{\hbar}(\sigma_x p_x - \sigma_y p_y) + V_{e-e} + V_{e-p} \quad (3.1)$$

其中 V_{e-e} 电子间的库仑相互作用项， V_{e-p} 电声子相互作用项。取零级哈密顿量为

$$H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m^*} + \frac{\alpha}{\hbar}(\sigma_x p_y - \sigma_y p_x) - \frac{\beta}{\hbar}(\sigma_x p_x - \sigma_y p_y) \quad (3.2)$$

其中 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 是泡利矩阵， p_x, p_y 是电子动量的两分量， m^* 是电子有效质量。参数 α, β 分别表征Rashba和Dresselhaus 自旋轨道相互作用的强度，都与外电场成正比。薛定谔方程 $H_0 \Psi_{\mathbf{k}, \lambda} = \varepsilon_{\mathbf{k}, \lambda} \Psi_{\mathbf{k}, \lambda}$ 的本征态已经求出

$$\Psi_{\mathbf{k}, \lambda} = \xi_{\mathbf{k}, \lambda} e^{i(k_x x + k_y y)} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \xi_{\mathbf{k}, \pm} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm \frac{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)k^2 - 4\alpha\beta k_x k_y}}{-\beta(k_x + ik_y) + i\alpha(k_x - ik_y)} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm e^{-i\phi} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{k} \equiv (k_x, k_y)$, $\lambda = \pm 1$ 表示电子在自旋正枝和负枝。 $\phi_{\mathbf{k}}$ 是与动量方向有关的

相因子。

$$\begin{aligned}\cos \phi_{\mathbf{k}} &= \frac{\alpha k_y - \beta k_x}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2) \mathbf{k}^2 - 4\alpha\beta k_x k_y}} \\ \sin \phi_{\mathbf{k}} &= \frac{\alpha k_x - \beta k_y}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2) \mathbf{k}^2 - 4\alpha\beta k_x k_y}} \\ \tan \phi_{\mathbf{k}} &= \frac{\alpha k_y - \beta k_x}{\alpha k_x - \beta k_y}\end{aligned}$$

本征态 $(\mathbf{k}, \lambda)$ 的本征值是

$$\varepsilon_{\mathbf{k}, \lambda} = \frac{\hbar^2}{2m^*} \mathbf{k}^2 + \lambda \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2) \mathbf{k}^2 - 4\alpha\beta k_x k_y} \quad (3.4)$$

从哈密顿量

$$\begin{aligned}H_0(\mathbf{A}) &= \frac{(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A})^2}{2m^*} + \frac{\alpha}{\hbar} \left(\sigma_x \left(p_y - \frac{e}{c}A_y \right) - \sigma_y \left(p_x - \frac{e}{c}A_x \right) \right) \\ &\quad - \frac{\beta}{\hbar} \left(\sigma_x \left(p_x - \frac{e}{c}A_x \right) - \sigma_y \left(p_y - \frac{e}{c}A_y \right) \right)\end{aligned}$$

可以得到速度算符,

$$v_x = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x - \frac{e}{c}A_x}{m^*} - \frac{\alpha}{\hbar} \sigma_y - \frac{\beta}{\hbar} \sigma_x \quad (3.5)$$

$$v_y = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y - \frac{e}{c}A_y}{m^*} + \frac{\alpha}{\hbar} \sigma_x + \frac{\beta}{\hbar} \sigma_y \quad (3.6)$$

和流密度算符

$$J_x = ev_x = e \frac{p_x}{m^*} - \frac{e^2}{m^*c} A_x - e \frac{\alpha}{\hbar} \sigma_y - e \frac{\beta}{\hbar} \sigma_x \quad (3.7)$$

$$J_y = ev_y = e \frac{p_y}{m^*} - \frac{e^2}{m^*c} A_y + e \frac{\alpha}{\hbar} \sigma_x + e \frac{\beta}{\hbar} \sigma_y \quad (3.8)$$

我们用以上求得的本征态来构建量子场算符, $\hat{\Psi}(x, y) = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \Psi_{\mathbf{k}, \lambda} \hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda}$ 和 $\hat{\Psi}^\dagger(x, y) = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \Psi_{\mathbf{k}, \lambda}^* \hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger$ 其中 $\hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda}(\hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger)$ 分别是具有波矢 $\mathbf{k}$ 和自旋态 λ 的湮

灭（产生）算符。在二次量子化表象下的哈密顿量是

$$\hat{H}_0 = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \epsilon_{\mathbf{k}, \lambda} \hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda} \quad (3.9)$$

$$V_{e-e} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}, \mathbf{k}, \mathbf{k}', \lambda, \lambda', \lambda_1, \lambda'_1} V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', e-e}^{\lambda, \lambda', \lambda_1, \lambda'_1}(\mathbf{q}) \hat{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \lambda'}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}, \lambda'_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}', \lambda_1} \hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda} \quad (3.10)$$

其中

$$V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', e-e}^{\lambda, \lambda', \lambda_1, \lambda'_1}(\mathbf{q}) = g^{\lambda, \lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) V_{e-e}(q) g^{\lambda_1, \lambda'_1}(\mathbf{k}', \mathbf{k}' - \mathbf{q}) \quad (3.11)$$

其中 $\mathbf{q} \equiv (q_x, q_y)$, $\mathbf{r} \equiv (x, y)$,

$$V_{e-e}(q) = \frac{2\pi e^2}{q\epsilon_\infty}$$

$$g^{\lambda, \lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \lambda' e^{i\phi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda e^{-i\phi_{\mathbf{k}}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left[1 + \lambda \lambda' e^{i(\phi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \phi_{\mathbf{k}})} \right] \quad (3.12)$$

有自旋轨道耦合时的电声子相互作用的形式,

$$V_{e-ph} = \sum_{\mathbf{q}, q_z, \mathbf{k}, \lambda, \lambda'} V_{\mathbf{k}, e-ph}^{\lambda, \lambda'}(\mathbf{q}, q_z) \hat{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \lambda'}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda} \left(\hat{b}^\dagger(\mathbf{q}, q_z) + \hat{b}(-\mathbf{q}, -q_z) \right) \quad (3.13)$$

其中

$$V_{\mathbf{k}, e-ph}^{\lambda, \lambda'}(\mathbf{q}, q_z) = g^{\lambda, \lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) V_{e-ph}(q, q_z) \quad (3.14)$$

$\hat{b}^\dagger(\hat{b})$ 是声子的产生（湮灭）算符,

$$V_{e-ph}(\mathbf{q}, q_z) = i \left[\frac{2\pi e^2 \hbar \omega_{LO}}{(q^2 + q_z^2)} \left(\frac{1}{\epsilon_\infty} - \frac{1}{\epsilon_s} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.15)$$

这里 ϵ_∞ 和 ϵ_s 是半导体中的高频和静态介电常数。

声子格林函数定义为,

$$D(\mathbf{q}, q_z, \alpha_m) = \frac{\hbar \omega(\mathbf{q}, q_z)}{(\hbar \alpha_m)^2 - (\hbar \omega(\mathbf{q}, q_z))^2} \quad (3.16)$$

如果忽略声子的色散,

$$D(\alpha_m) = \frac{\hbar\omega_{LO}}{(\hbar\alpha_m)^2 - (\hbar\omega_{LO})^2} \quad (3.17)$$

如果电子限制在二维平面上。我们需要三维声子和二维电子耦合的形式, 定义电声子矩阵元的平方,

$$V_{e-ph}(q) = \frac{2\pi e^2 \hbar\omega_{LO}}{q} \left(\frac{1}{\epsilon_\infty} - \frac{1}{\epsilon_s} \right) \quad (3.18)$$

在kubo公式中, 速度算符中的A将给出正比于电场平方的项(无磁场时), 所以我们令 $\mathbf{A} = 0$, 则利用以下关系可以得到电流算符的二次量子化形式,

$$\begin{aligned} & \xi_{\mathbf{k},\lambda'}^\dagger \sigma_x \xi_{\mathbf{k},\lambda} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \lambda' e^{i\phi_{\mathbf{k}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda e^{-i\phi_{\mathbf{k}}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{(\lambda' + \lambda)}{2} \cos \phi_{\mathbf{k}} + i \frac{(\lambda' - \lambda)}{2} \sin \phi_{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \xi_{\mathbf{k},\lambda'}^\dagger \sigma_y \xi_{\mathbf{k},\lambda} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \lambda' e^{i\phi_{\mathbf{k}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda e^{-i\phi_{\mathbf{k}}} \end{pmatrix} \\ &= -\frac{(\lambda + \lambda')}{2} \sin \phi_{\mathbf{k}} + i \frac{(\lambda' - \lambda)}{2} \cos \phi_{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{J}_x &= \int \int dx dy \hat{\Psi}^\dagger(x, y) J_x \hat{\Psi}(x, y) \\ &= \frac{e}{m^*} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \hbar k_x \hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda} - \sum_{\mathbf{k}, \lambda, \lambda'} e \frac{\alpha}{\hbar} \left[-\frac{(\lambda + \lambda')}{2} \sin \phi_{\mathbf{k}} + i \frac{(\lambda' - \lambda)}{2} \cos \phi_{\mathbf{k}} \right] \hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda'}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda} \\ &\quad - \sum_{\mathbf{k}, \lambda, \lambda'} e \frac{\beta}{\hbar} \left[\frac{(\lambda' + \lambda)}{2} \cos \phi_{\mathbf{k}} + i \frac{(\lambda' - \lambda)}{2} \sin \phi_{\mathbf{k}} \right] \hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda'}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{J}_y &= \int \int dx dy \hat{\Psi}^\dagger(x, y) J_y \hat{\Psi}(x, y) \\
&= \frac{e}{m^*} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \hbar k_y \hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda} + \sum_{\mathbf{k}, \lambda, \lambda'} e \frac{\alpha}{\hbar} \left[\frac{(\lambda' + \lambda)}{2} \cos \phi_{\mathbf{k}} + i \frac{(\lambda' - \lambda)}{2} \sin \phi_{\mathbf{k}} \right] \hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda'}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda} \\
&\quad + \sum_{\mathbf{k}, \lambda, \lambda'} e \frac{\beta}{\hbar} \left[-\frac{(\lambda + \lambda')}{2} \sin \phi_{\mathbf{k}} + i \frac{(\lambda' - \lambda)}{2} \cos \phi_{\mathbf{k}} \right] \hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda'}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda}
\end{aligned}$$

3.2 极化子效应

在窄带隙半导体纳米结构，比如InAs和 $\text{In}_{1-x}\text{Ga}_x\text{As}$ 量子阱中，Rashba自旋轨道耦合是起主要作用的。这时自由电子的哈密顿量可以写成，

$$H_0 = \frac{1}{2m^*} (p_x^2 + p_y^2) + \frac{\alpha}{\hbar} (\sigma_y p_x - \sigma_x p_y), \quad (3.19)$$

其中 m^* 是无电声子相互作用的电子的有效质量。能量本征值是，

$$E_\lambda^{(0)} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} + \lambda \alpha k, \quad (3.20)$$

其中 $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ ， $\lambda = \pm 1$ ，本征态 ξ_α 是，

$$\xi_{k, \lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\lambda (k_y - i k_x) / k \end{pmatrix}.$$

电声子相互作用在一系列物理现象中起着重要作用，比如超导电性，磁声异常，极化子效应，局域化，热载流子输运以及超声的产生。电子-纵光学模（LO）声子散射在半导体量子阱中的非弹性光散射中起着重要作用，因为LO声子和带间等离子之间有耦合。因此，以下我们将研究Rashba自旋轨道耦合存在时的二维半导体中的电子-LO声子相互作用和极化子效应。我们的结果显示极化子效应能够明显的被自旋轨道耦合提高。

半导体中的电子-LO声子相互作用可以用Fröhlich模型描述，

$$H_{e-ph} = \sum_{\mathbf{k}, \alpha} M(q) \hat{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\alpha}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\alpha} (\hat{b}_{\mathbf{q}} + \hat{b}_{-\mathbf{q}}^\dagger), \quad (3.21)$$

其中 $\hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger$ 和 $\hat{b}_{\mathbf{q}}$ 分别是LO声子的产生和湮灭算符。耦合强度是,

$$M(q) = \left[\frac{2\pi e^2 \hbar \omega_{LO}}{q} \left(\frac{1}{\epsilon_\infty} - \frac{1}{\epsilon_s} \right) \right]^{1/2}.$$

这里 ϵ_∞ 和 ϵ_s 是半导体中的高频和静态介电常数。电子-LO声子相互作用引起的自能修正可以用Rayleigh-Schrödinger微扰理论来描述:

$$\varepsilon_{\mathbf{k},\lambda} = \varepsilon_{\mathbf{k},\lambda}^0 - \sum_{\mathbf{q},\lambda'} \frac{|M(q)|^2 |g^{\lambda,\lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q})|^2}{\varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\lambda'}^0 - \varepsilon_{\mathbf{k},\lambda}^0 + \hbar \omega_{LO}}, \quad (3.22)$$

其中 ω_{LO} 是LO声子的频率, 并且,

$$g^{\lambda,\lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) = \frac{1}{2} \left[1 + \lambda \lambda' \frac{k + q \cos \theta}{\sqrt{k^2 + q^2 + 2kq \cos \theta}} \right].$$

引入如下的无量纲参数, $u = k/k_F(0)$, $z = q/k_F(0)$, $\Omega_{LO} = 2m_0 \hbar \omega_{LO} / \hbar^2 k_F^2(0)$, $k_\alpha = \frac{2m_0 \alpha}{\hbar^2}$, $\alpha_s = \frac{e^2}{\hbar} (\frac{m_0}{2\hbar \omega_{LO}})^{1/2} \left(\frac{1}{\epsilon_\infty} - \frac{1}{\epsilon_s} \right)$, $y = \frac{k_\alpha}{k_F(0)}$, 电子能量可以改写成,

$$\varepsilon_{\mathbf{u},\lambda} = \frac{\hbar^2 k_F^2(0)}{2m_0} [u^2 + \lambda \frac{k_\alpha}{k_F(0)} u + \delta\varepsilon] \quad (3.23)$$

其中 $\delta\varepsilon = -(\Omega_{LO}^{3/2} \alpha_s / 4\pi) \sum^\lambda(\mathbf{u})$, $\sum^\lambda(\mathbf{u}) = \sum_{\lambda'} \int_0^\infty dz \int_0^{2\pi} d\theta |g^{\lambda,\lambda'}(\mathbf{u}, \mathbf{u} + \mathbf{z})|^2 / (\Omega_{LO} + \varepsilon_{\mathbf{u}+\mathbf{z},\lambda'}^0 - \varepsilon_{\mathbf{u},\lambda}^0)$ 以上结果只考虑了单电子与极化晶格相互作用的Rayleigh-Schrödinger微扰理论的领头阶修正。极化子的结合能可以被写成:

$$E_0 = -\frac{\pi}{2} \alpha_s \hbar \omega_{LO} \frac{1}{\sqrt{1 - y^2 / (4\Omega_{LO})}}. \quad (3.24)$$

极化子的结合能被自旋轨道耦合提高了, 提高比例是 $[\sqrt{1 - y^2 / (4\Omega_{LO})}]^{-1/2}$ 。在自旋轨道耦合系数的领头阶, 能量提高 $\Delta E \propto \alpha^2$ 。自旋轨道耦合引起的能量修正是 $\pm \alpha k$ 。原来的抛物线能带劈裂成两个Rashba能带使带间跃迁几率增大, 为LO声子散射提供了有效的通道。另外, 线性能量修正使带内声子散射更为有效。这个结果如果由实验证实的话将是非常有趣的, 它显示了电声子耦合和自

旋轨道耦合的本征关联。

极化子有效质量由 $1/m_{ij} = \partial^2 \varepsilon / \partial k_i \partial k_j$ 给出。在有自旋轨道耦合存在时，有效质量即使在能带底部也不是常数。我们得到极化子有效质量如下，

$$\left(\frac{1}{m^*}\right)_{xx} = \frac{1}{2m_0} \frac{\partial^2}{\partial u_x^2} \left(u^2 + \lambda \frac{k_\alpha}{k_F(0)} u - \frac{\alpha_s \Omega_{LO}^{3/2} \sum^\lambda(u)}{4\pi} \right) \quad (3.25)$$

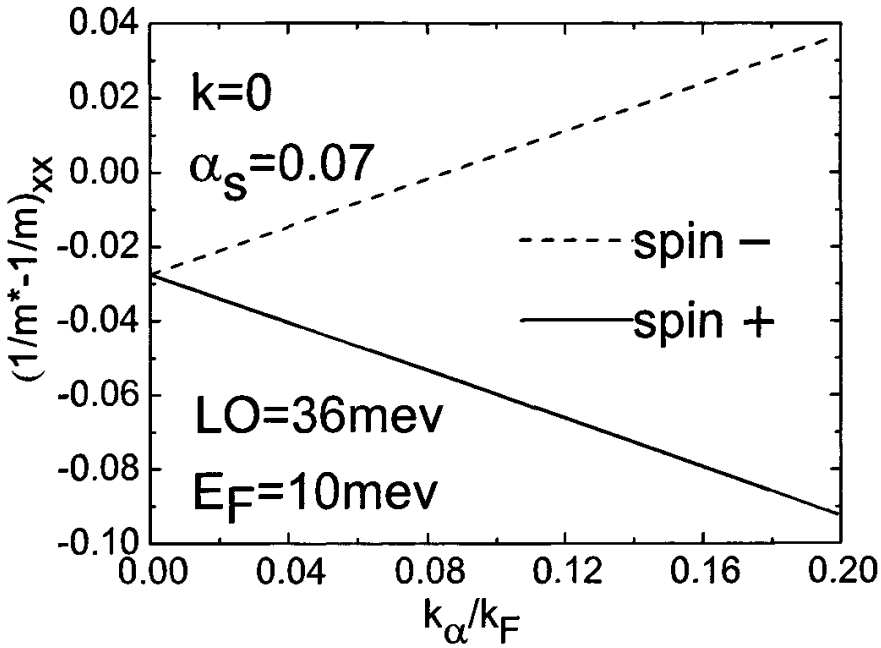


图 3.1 极化子有效质量在 $k=0$ 处

在图3.1中，我们画出了 $K=0$ 处有效质量的倒数对 Rashba 自旋轨道耦合系数的依赖。从图中看出，这种依赖是线性的。对当前系统来说，在自旋轨道耦合为零的时候，电声子相互作用造成极化子有效质量重于电子有效质量。图3.1中 $\alpha = 0$ 处的值代表了这种修正。下 Rashba 带的有效质量随着自旋轨道耦合系数减小，上 Rashba 带的有效质量随着自旋轨道耦合系数增大。这种变化可以这样理解。在 $k=0$ 处，电声子相互作用会使电子能量降低约等于极化子结合

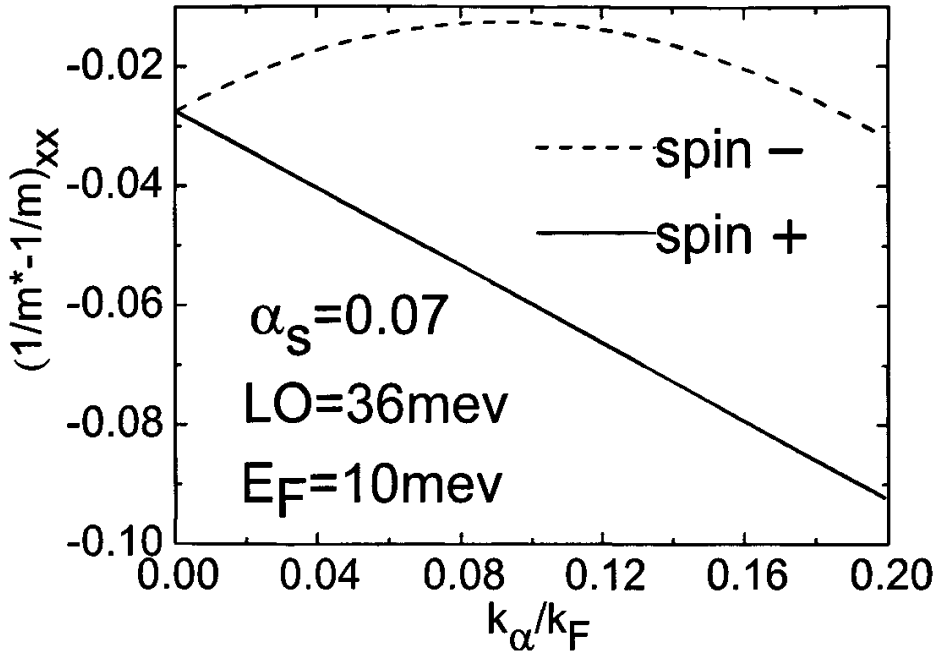


图 3.2 极化子有效质量在能带底部

能。这是无自旋轨道耦合时的极化子效应。有自旋轨道耦合时情况有所不同。上Rashba带电子的有效质量会被自旋轨道耦合降低。有效质量越轻，电声子相互作用就越有效，使得极化子质量修正被自旋轨道耦合提高（图中的实线）。下Rashba带电子的有效质量会被自旋轨道耦合提高，使得极化子效应对有效质量的修正减小，在自旋轨道耦合足够大时，有效质量为负，此时电声子相互作用降低了电子能量，却使有效质量减小。

与处在抛物线能带的电子不同，电子和极化子有效质量依赖于波矢 k 的大小和方向。图3.3和3.4中描述了这种趋势。对上Rashba带，增大 k 会显示出两种互相抵消的效应的对抗。一方面，能量中的线性 k 项在 k 增大时变得不重要，使得极化子质量修正减小；另一方面，由抛物线能带造成的极化子质量修正随着 k 的增大而增大。因此，极化子质量修正在 k 小时随着 k 增大而减小，在 k 大时随着 k 增大而增大。对下Rashba带，这两种效应是彼此支持的，因此极化子质量修正随 k 单调增加。

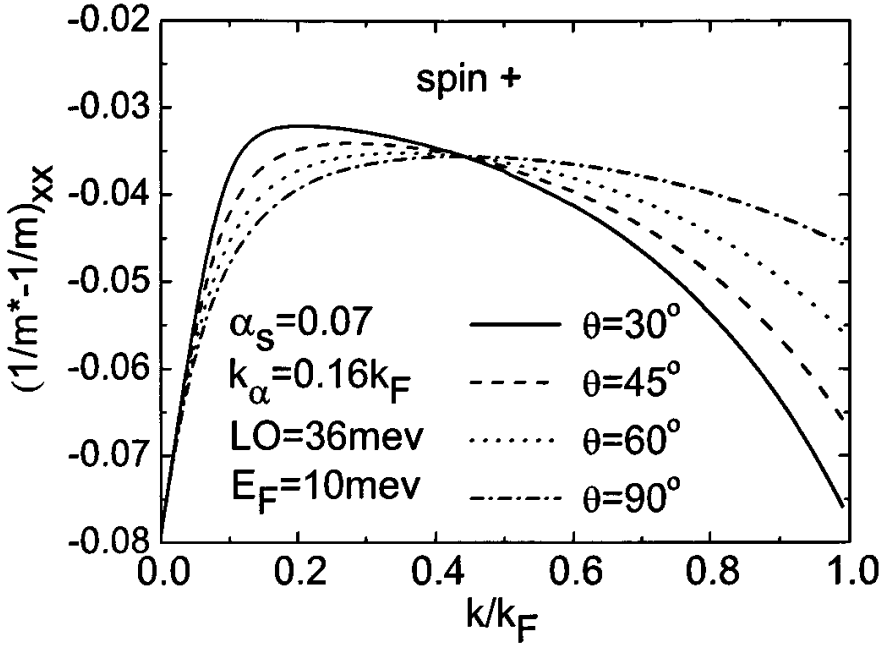


图 3.3 上Rashba带极化子有效质量修正

我们建议进行半导体量子阱中的远红外磁吸收实验来验证我们的结果。自旋轨道耦合系数可以通过调节外电场来改变。

3.3 总结

在第一节中我们给出了既有Rashba也有线性Dresselhaus自旋轨道相互作用的哈密顿量和流算符的二次量子化形式；在第二节中，在只考虑Rashba自旋轨道相互作用时，我们显示了自旋轨道耦合会在二维半导体中导致非常不同的极化子效应。极化子的结合能会被自旋轨道耦合提高，极化子有效质量在不同的Rashba带中会有不同的变化趋势。

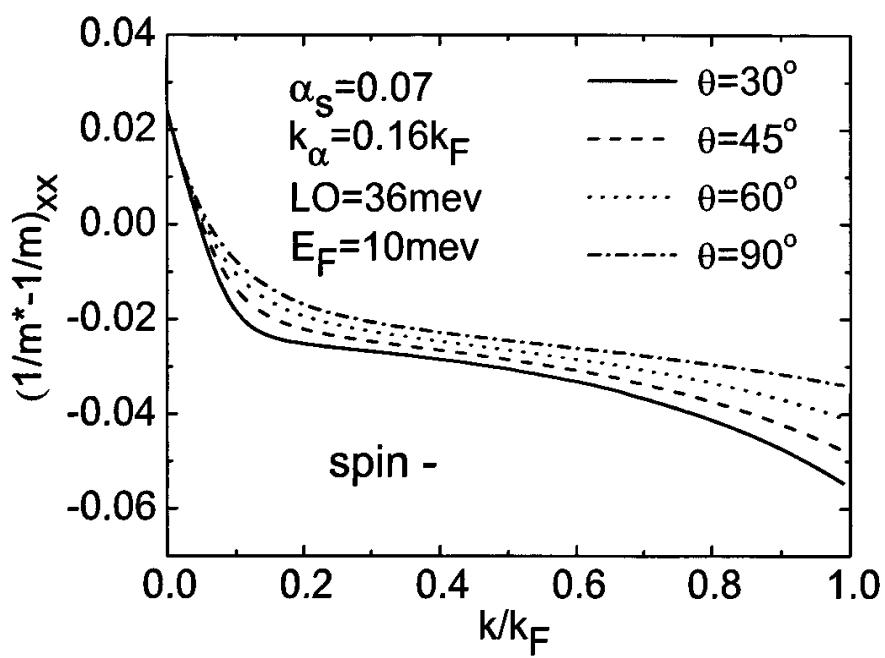


图 3.4 下Rashba带极化子有效质量修正

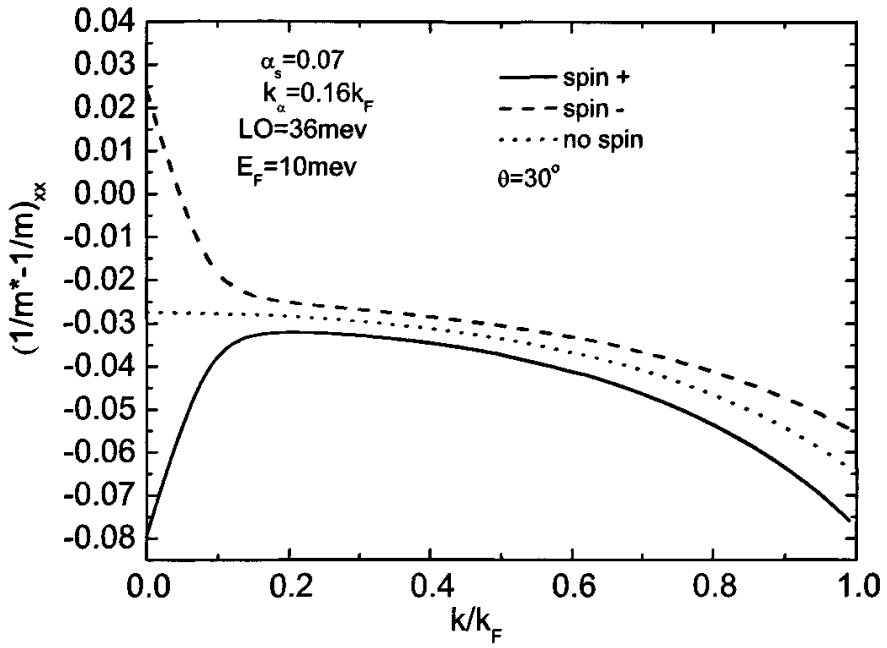


图 3.5 无自旋轨道耦合时极化子有效质量修正

第四章 Rashba自旋轨道耦合下电导和自旋霍尔电导的多体理论

本章我们将研究含Rashba自旋轨道耦合系统的电导率和自旋霍尔电导。我们采用微扰展开的办法，先研究不含电声子相互作用时的电导率和自旋霍尔电导率，给出了他们对温度和自旋轨道耦合系数的依赖关系。接下来给出了含电声子相互作用和电子-电子相互作用时电导率和自旋霍尔电导的解析结果。

4.1 电导率

如上章所述，利用Kubo公式计算电导率归结于计算

$$M_{\mu\nu}(\omega_n) = \int_0^{\beta_T} d\tau e^{\omega_n \tau} \langle T j_\mu(\tau) j_\nu(0) \rangle \quad (4.1)$$

其中

$$\omega_n = i2\pi n/\beta_T, n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.2)$$

我们定义 $M_{xx'}(z)$ 是从定义在虚轴上的无穷多个点 $i2\pi n/\beta_T$ ($n > 0$)的函数 $M_{xx'}(\omega_n)$ 到整个上半平面的解析延拓。根据上一章的知识很容易得到

$$\sigma_{xx'}^1(\omega) = \frac{1}{i\omega} M_{xx'}(\omega + i\delta) \quad (4.3)$$

其中 $\delta \rightarrow 0_{+}$ ，而 $M_{xx'}(\omega_n)$ ，将利用格林函数的技术加以计算。如果只考虑Rashba自旋轨道耦合，可以令 $\beta = 0$ ，则

$$\begin{aligned} \cos \phi_{\mathbf{k}} &= \frac{k_y}{k} \\ \sin \phi_{\mathbf{k}} &= \frac{k_x}{k} \end{aligned}$$

$$\hat{j}_x = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \left\{ \frac{e}{m^*} \hbar k_x + \frac{\lambda e}{\hbar} \alpha \frac{k_x}{k} \right\} \hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda} + i \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \lambda \frac{e}{\hbar} \alpha \frac{k_y}{k} \hat{a}_{\mathbf{k}, -\lambda}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda} \quad (4.4)$$

$$\hat{j}_y = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \left\{ \frac{e}{m^*} \hbar k_y + \frac{\lambda e}{\hbar} \alpha \frac{k_y}{k} \right\} \hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda} - i \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \lambda \frac{e}{\hbar} \alpha \frac{k_x}{k} \hat{a}_{\mathbf{k}, -\lambda}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda} \quad (4.5)$$

4.1.1 无电声子相互作用的费曼圈图结果

我们画出电流-电流关联的单圈图如下所示，

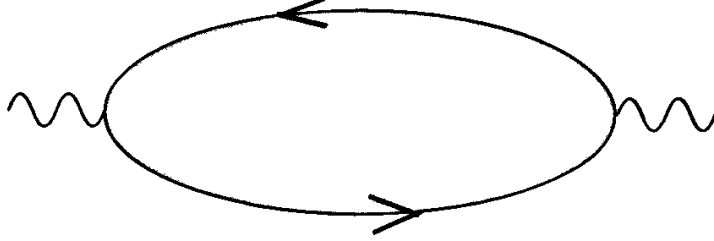


图 4.1 无电声子相互作用的费曼圈图

其中带箭头的是电子线，在松原表象下它具有如下形式，

$$G_{k,\lambda}(\zeta_l) = \frac{1}{\hbar\zeta_l - \varepsilon_{k,\lambda}} \quad (4.6)$$

其中，

$$\zeta_l = (2l+1)i\pi/\beta_T + \mu, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.7)$$

$$\beta_T = \frac{1}{k_B T} \quad (4.8)$$

$$\varepsilon_{k,\lambda} = \frac{\hbar^2}{2m^*} \mathbf{k}^2 + \lambda k \quad (4.9)$$

是有Rashba自旋轨道耦合时的单电子能量。单圈图给出不为零的结果，

$$\begin{aligned} & M_{xx}^0(\omega_n) \\ &= i^2 \left(\frac{e\alpha}{\hbar} \right)^2 \frac{\hbar}{\beta_T} \sum_{\mathbf{k}, \lambda, l} \left(\frac{k_y}{k} \right)^2 G_{k,\lambda}(\zeta_l) G_{k,-\lambda}(\zeta_l + \omega_n) \\ &= - \left(\frac{e\alpha}{\hbar} \right)^2 \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \left(\frac{k_y}{k} \right)^2 \frac{f_{\mathbf{k},\lambda} - f_{\mathbf{k},-\lambda}}{(\hbar\omega_n + \varepsilon_{\mathbf{k},\lambda} - \varepsilon_{\mathbf{k},-\lambda})} \\ &= - \left(\frac{e\alpha}{\hbar} \right)^2 \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{k_y}{k} \right)^2 \left[\frac{f_{\mathbf{k},+} - f_{\mathbf{k},-}}{\hbar\omega_n + 2\alpha k} + \frac{f_{\mathbf{k},-} - f_{\mathbf{k},+}}{\omega_n - 2\alpha k} \right] \\ &= - \left(\frac{e\alpha}{\hbar} \right)^2 \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty k dk (f_{\mathbf{k},+} - f_{\mathbf{k},-}) \left[\frac{1}{(\hbar\omega_n + 2\alpha k)} - \frac{1}{(\hbar\omega_n - 2\alpha k)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& ReM_{xx}^0(\omega + i\delta) \\
&= -\left(\frac{e\alpha}{\hbar}\right)^2 \frac{1}{4\pi} P \int_0^\infty k dk (f_{\mathbf{k},+} - f_{\mathbf{k},-}) \left(\frac{1}{\hbar\omega + 2\alpha k} - \frac{1}{\hbar\omega - 2\alpha k} \right) \\
&= -\frac{e^2\alpha^2}{4\pi\hbar^2} P \int_0^\infty k dk \left(\frac{1}{\exp\beta(\hbar^2 k^2/2m + \alpha k - \mu) + 1} - \frac{1}{\exp\beta(\hbar^2 k^2/2m - \alpha k - \mu) + 1} \right) \\
&\quad \left(\frac{1}{\hbar\omega + 2\alpha k} - \frac{1}{\hbar\omega - 2\alpha k} \right) \\
&= -\frac{e^2\alpha^2}{8\pi\hbar^2} P \int_0^\infty k dk \left(th \frac{\beta(\hbar^2 k^2/2m - \alpha k - \mu)}{2} - th \frac{\beta(\hbar^2 k^2/2m + \alpha k - \mu)}{2} \right) \\
&\quad \left(\frac{1}{\hbar\omega + 2\alpha k} - \frac{1}{\hbar\omega - 2\alpha k} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& ImM_{xx}^0(\omega + i\delta) \\
&= \frac{e^2\alpha^2}{4\hbar^2} \int_0^\infty k dk (f_{\mathbf{k},+} - f_{\mathbf{k},-}) [\delta(\hbar\omega + 2\alpha k) - \delta(\hbar\omega - 2\alpha k)] \\
&= \frac{e^2\alpha^2}{8\hbar^2} \int_0^\infty k dk \left[th \frac{\beta(\hbar^2 k^2/2m - \alpha k - \mu)}{2} - th \frac{\beta(\hbar^2 k^2/2m + \alpha k - \mu)}{2} \right] \\
&\quad [\delta(\hbar\omega + 2\alpha k) - \delta(\hbar\omega - 2\alpha k)] \\
&= \frac{e^2\alpha^2}{8\hbar^2} \left\{ -\frac{\hbar\omega}{2\alpha} \frac{1}{2\alpha} \left[th \frac{\beta(\hbar^4\omega^2/8m\alpha^2 - \hbar\omega/2 - \mu)}{2} - th \frac{\beta(\hbar^4\omega^2/8m\alpha^2 + \hbar\omega/2 - \mu)}{2} \right] \right\} \\
&= -\frac{e^2\omega}{32\hbar} \left[th \frac{\beta(\hbar^4\omega^2/8m\alpha^2 - \hbar\omega/2 - \mu)}{2} - th \frac{\beta(\hbar^4\omega^2/8m\alpha^2 + \hbar\omega/2 - \mu)}{2} \right]
\end{aligned}$$

在零温近似下 $\beta \rightarrow \infty$,我们有,

$$\begin{aligned}
& ReM_{xx}^0(\omega + i\delta) \\
&= -\frac{e^2\alpha^2}{8\pi\hbar^2} P \int_0^\infty k dk (sign(\hbar^2 k^2/2m - \alpha k - \mu) - sign(\hbar^2 k^2/2m + \alpha k - \mu)) \\
&\quad \times \left(\frac{1}{\hbar\omega + 2\alpha k} - \frac{1}{\hbar\omega - 2\alpha k} \right) \\
&= -\frac{e^2\alpha^2}{8\pi\hbar^2} P \int_0^\infty k dk \left[\begin{aligned} & sign((k - \frac{m\alpha}{\hbar^2})^2 - \frac{m^2\alpha^2}{\hbar^4} - \frac{2m\mu}{\hbar^2}) \\ & - sign((k + \frac{m\alpha}{\hbar^2})^2 - \frac{m^2\alpha^2}{\hbar^4} - \frac{2m\mu}{\hbar^2}) \end{aligned} \right] \left(\frac{1}{\hbar\omega + 2\alpha k} - \frac{1}{\hbar\omega - 2\alpha k} \right) \\
&= -\frac{e^2\alpha^2}{8\pi\hbar^2} P \int_0^\infty k dk \left[\begin{aligned} & sign((k - \frac{m\alpha}{\hbar^2} - k_F^0)(k - \frac{m\alpha}{\hbar^2} + k_F^0)) \\ & - sign((k + \frac{m\alpha}{\hbar^2} - k_F^0)(k + \frac{m\alpha}{\hbar^2} + k_F^0)) \end{aligned} \right] \left(\frac{1}{\hbar\omega + 2\alpha k} - \frac{1}{\hbar\omega - 2\alpha k} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{e^2\alpha^2}{4\pi\hbar^2} P \int_{k_F^0 - m\alpha/\hbar^2}^{k_F^0 + m\alpha/\hbar^2} k dk \left(\frac{1}{\hbar\omega - 2\alpha k} - \frac{1}{\hbar\omega + 2\alpha k} \right) \\
&= -\frac{e^2\alpha^2}{4\pi\hbar^2} P \int_{k_F^0 - m\alpha/\hbar^2}^{k_F^0 + m\alpha/\hbar^2} dk \left(-\frac{1}{2\alpha} + \frac{\hbar\omega/2\alpha}{\hbar\omega - 2\alpha k} - \frac{1}{2\alpha} - \frac{\hbar\omega/2\alpha}{\hbar\omega + 2\alpha k} \right) \\
&= -\frac{e^2\alpha^2}{4\pi\hbar^2} \left[-\frac{2m}{\hbar^2} + P \int_{k_F^0 - m\alpha/\hbar^2}^{k_F^0 + m\alpha/\hbar^2} dk \frac{\hbar\omega}{4\alpha^2} \left(-\frac{1}{k - \hbar\omega/2\alpha} - \frac{1}{k + \hbar\omega/2\alpha} \right) \right] \\
&= \frac{e^2\alpha^2}{4\pi\hbar^2} \left[\frac{2m}{\hbar^2} + \frac{\hbar\omega}{4\alpha^2} \ln \left| \frac{(k_F^0 + m\alpha/\hbar^2)^2 - (\hbar\omega/2\alpha)^2}{(k_F^0 - m\alpha/\hbar^2)^2 - (\hbar\omega/2\alpha)^2} \right| \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&ImM_{xx}^0(\omega + i\delta) \\
&= -\frac{e^2\omega}{32\hbar} \left[th \frac{\beta(\hbar^4\omega^2/8m\alpha^2 - \hbar\omega/2 - \mu)}{2} - th \frac{\beta(\hbar^4\omega^2/8m\alpha^2 + \hbar\omega/2 - \mu)}{2} \right] \\
&= -\frac{e^2\omega}{32\hbar} \left[sign(\hbar^2\omega^2 - 4m\alpha^2\omega/\hbar - \frac{8m\alpha^2\mu}{\hbar^2}) - sign(\hbar^2\omega^2 + 4m\alpha^2\hbar\omega - 8m\alpha^2\mu) \right] \\
&= -\frac{e^2\omega}{32\hbar} \left[\begin{aligned} &sign\left(\left(\hbar\omega - \frac{2m\alpha^2}{\hbar^2}\right)^2 - \frac{4m^2\alpha^4}{\hbar^4} - \frac{8m\alpha^2\mu}{\hbar^2}\right) \\ &- sign\left(\left(\hbar\omega + \frac{2m\alpha^2}{\hbar^2}\right)^2 - \frac{4m^2\alpha^4}{\hbar^4} - \frac{8m\alpha^2\mu}{\hbar^2}\right) \end{aligned} \right] \\
&= -\frac{e^2\omega}{32\hbar} \left[\begin{aligned} &sign\left(\left(\hbar\omega - \frac{2m\alpha^2}{\hbar^2}\right)^2 - 4\alpha^2(k_F^0)^2\right) - sign\left(\left(\hbar\omega + \frac{2m\alpha^2}{\hbar^2}\right)^2 - 4\alpha^2\hbar^2(k_F^0)^2\right) \end{aligned} \right] \\
&= -\frac{e^2\omega}{32\hbar} \left[\begin{aligned} &sign\left(\left(\hbar\omega - \frac{2m\alpha^2}{\hbar^2} - 2\alpha k_F^0\right)\left(\hbar\omega - \frac{2m\alpha^2}{\hbar^2} + 2\alpha k_F^0\right)\right) \\ &- sign\left(\left(\hbar\omega + \frac{2m\alpha^2}{\hbar^2} - 2\alpha k_F^0\right)\left(\hbar\omega + \frac{2m\alpha^2}{\hbar^2} + 2\alpha k_F^0\right)\right) \end{aligned} \right] \\
&= \frac{e^2\omega}{16\hbar} \Theta \left[1 - \left(\frac{(\hbar\omega - 2\alpha k_F^0)^2}{2m\alpha^2/\hbar^2} \right)^2 \right]
\end{aligned}$$

其中

$$k_F^0 = \sqrt{\frac{2m\mu}{\hbar^2} + \frac{m^2\alpha^2}{\hbar^4}} = \frac{k_F^+ + k_F^-}{2} \quad (4.10)$$

在零温时电导率的实部只在区间 $2\alpha k_F^0 - 2m\alpha^2/\hbar^2 < \hbar\omega < 2\alpha k_F^0 + 2m\alpha^2/\hbar^2$ 内不为零, 在此区间内电导率为一常数。在高温近似下 $\beta \rightarrow 0$, 有

$$ImM_{xx}^0(\omega + i\delta) = \frac{e^2\beta\omega^2}{64\hbar} \quad (4.11)$$

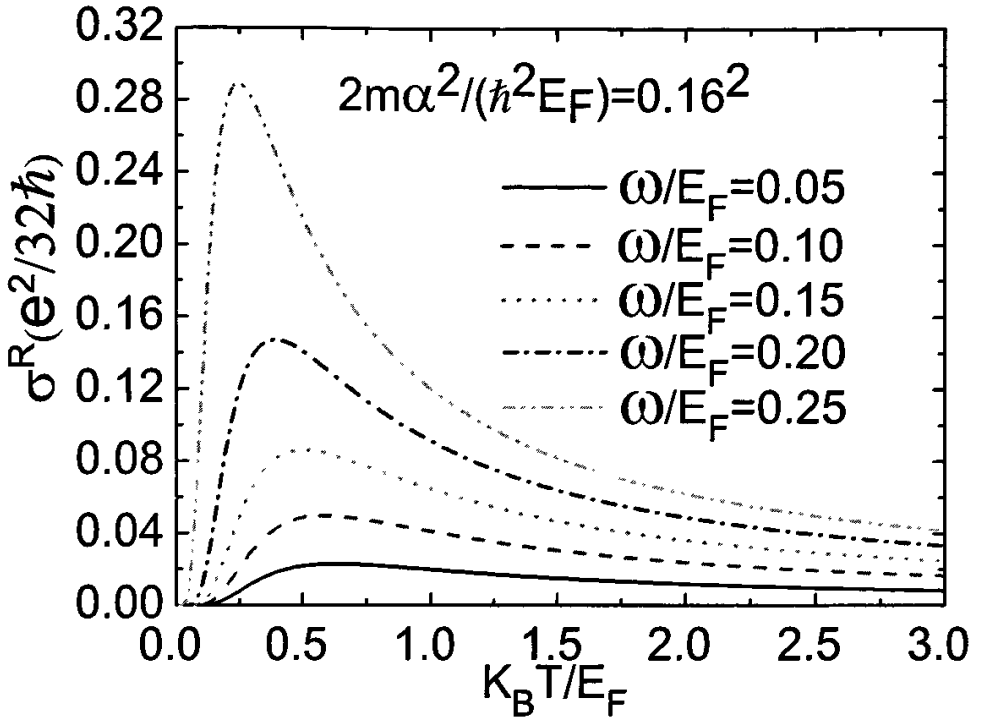


图 4.2 电导随温度变化（低频）

在有限温度下，电导率的实部在低温时随温度升高而增大，在高温时随温度升高而减小，在某个温度处达到峰值；在频率小于零温时区间下限时，电导率的峰的高度随频率增大而增高，频率大于零温时区间上限时，电导率的峰的高度随频率增大而降低。我们还画了在有限温度下电导率的实部随自旋轨道耦合系数变化的图，发现随着频率增大，电导峰的位置向较大的自旋轨道耦合数的方向移动，而且高度也变高。峰值处的自旋轨道耦合系数与频率之间满足线性关系。

以上结果可以做如下解释，电导的实部对应于单粒子的吸收几率（Landau damping），在零温时，只有频率在某一范围内的光子才能被吸收。在图4.2和4.3中我们可以发现在温度为零时，电导为零。当温度升高时，会产

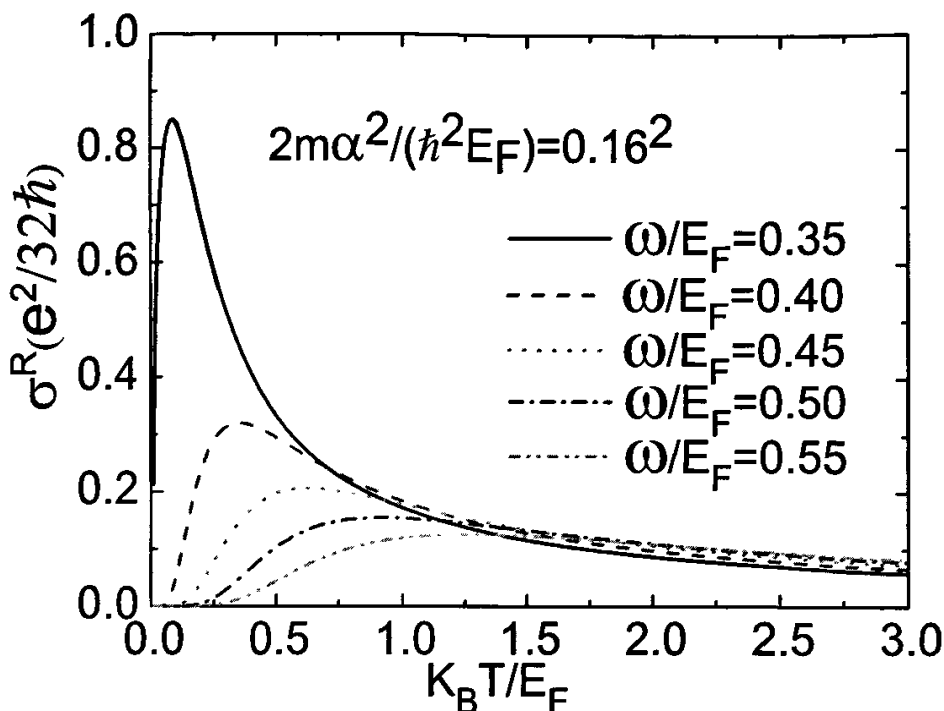


图 4.3 电导随温度变化（高频）

生更多的电子和空穴，使光子被吸收的几率和频率范围都变大，因此温度升高时电导增大，当温度继续升高时，电子和空穴被激发到很高的能量上去，使得适合吸收某一频率的光子的电子数减少，因此电导下降。越靠近零温时电导不为零的区域（或称为共振区），电导的峰越高。这是因为在此区域附近光子被吸收的几率最大。在图4.5中我们可以看出共振区的位置随自旋轨道耦合的大小会移动，成线性关系。

以上的效应有希望在高迁移率半导体异质结中的微波共振吸收实验中观测到。

4.1.2 电导的高阶费曼图结果

在做更高阶的微扰展开时，我们在玻尔球中的粒子数很大（高密度）和外

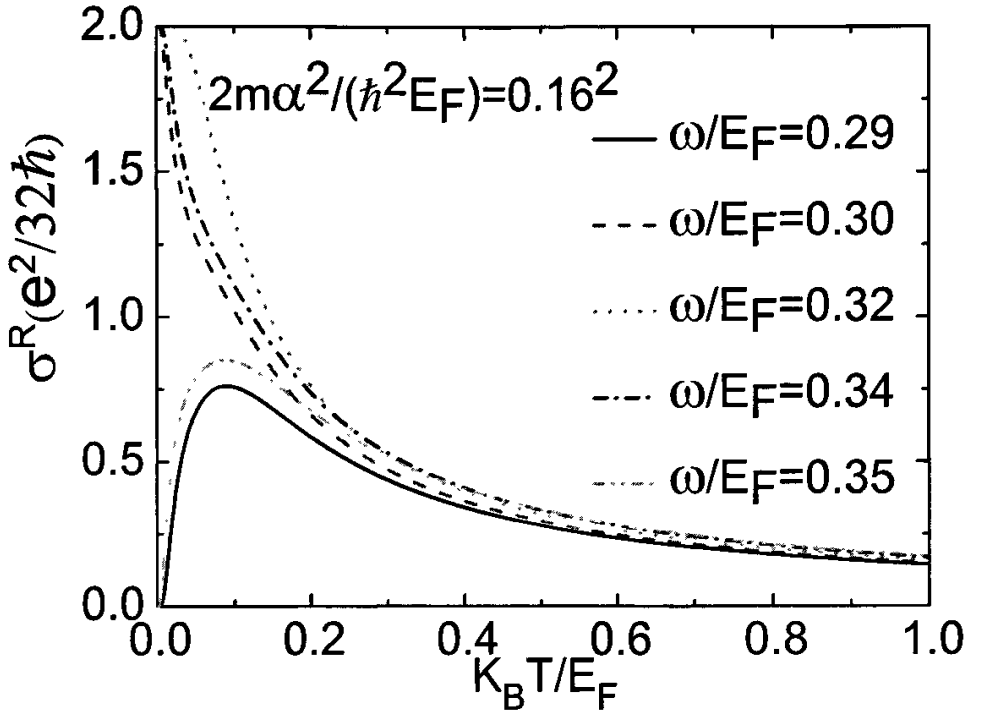


图 4.4 电导随温度变化（中间频）

电场频率很高的条件下对所有对电导率有贡献的图进行求和，并且假设外场的波长有无限长（长波近似）。因此在选取做微扰计算所需的费曼图时，我们挑选与电子数 N 成比例的图，并且包含到无穷多阶，而那些不与 N 成比例的图被认为很小。我们考虑如图4.6所示的五个图 [29]

RPA近似下的有效相互作用可以写成，

$$U(q, \alpha_m) = \frac{V(q) + V_{ph}(q)D(\alpha_m)}{1 - (V(q) + V_{ph}(q)D(\alpha_m))\Pi(\mathbf{q}, \alpha_m)} \quad (4.12)$$

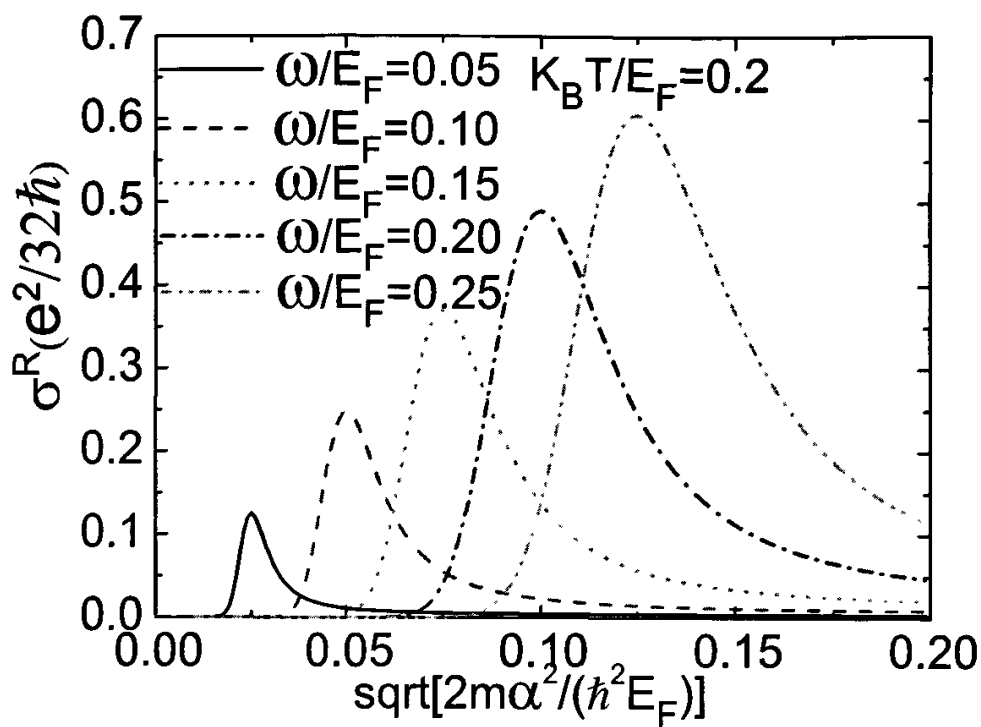


图 4.5 电导随自旋轨道耦合系数变化

其中,

$$\begin{aligned}
 \Pi(\mathbf{q}, \alpha_m) &= \sum_{\lambda, \lambda', \mathbf{k}} g^{\lambda, \lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) \Pi_{\mathbf{k}}^{\lambda, \lambda'}(\mathbf{q}, \alpha_m) g^{\lambda', \lambda}(\mathbf{k} + \mathbf{q}, \mathbf{k}) \\
 &= \sum_{\lambda, \lambda', \mathbf{k}} \frac{1}{2} (1 + \lambda \lambda' \cos(\phi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \phi_{\mathbf{k}})) \Pi_{\mathbf{k}}^{\lambda, \lambda'}(\mathbf{q}, \alpha_m)
 \end{aligned}$$

$$\Pi_{\mathbf{k}}^{\lambda, \lambda'}(\mathbf{q}, \alpha_m) = \frac{f_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \lambda'} - f_{\mathbf{k}, \lambda}}{\varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \lambda'} - \varepsilon_{\mathbf{k}, \lambda} - \alpha_m} \quad (4.13)$$

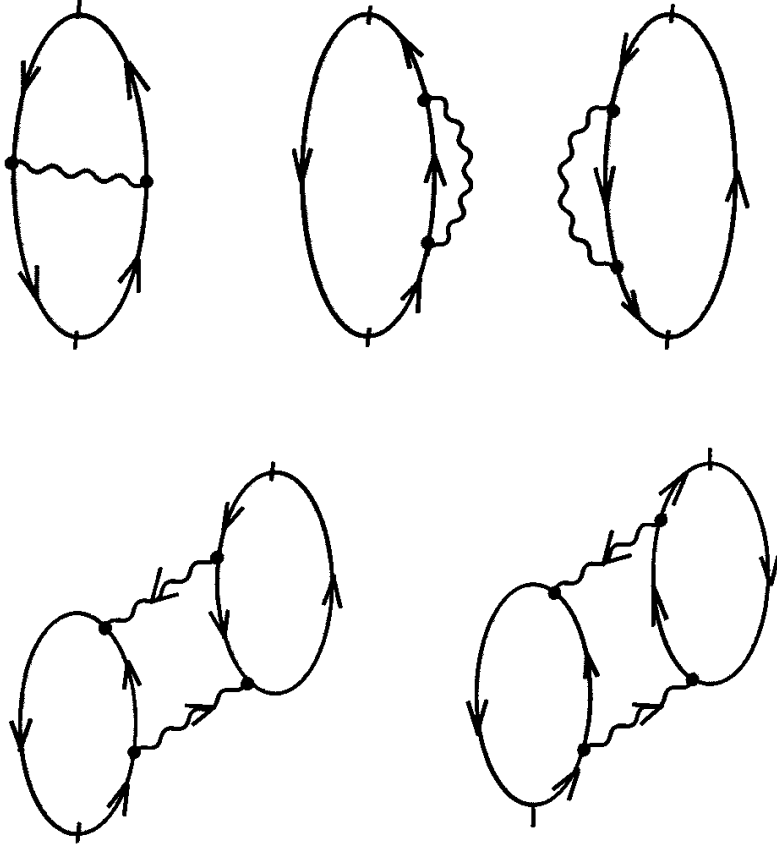


图 4.6 高阶费曼图

五个图求和可以写成,

$$M_{xx}(\omega_n) = \frac{e^2 \hbar^2}{m^{*2}} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \lambda, \lambda'} k_x k'_x \times \sum_{i=1}^5 N_{kk'}^i(\omega_n, \lambda, \lambda') \quad (4.14)$$

其中,

$$\begin{aligned} & N_{kk'}^1(\omega_n, \lambda, \lambda') \\ = & \delta_{\mathbf{k}', \mathbf{k}+\mathbf{q}} \frac{1}{\beta_T} \times \sum_{\mathbf{q}, m} U(q, \alpha_m) g^{\lambda, \lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}+\mathbf{q}) g^{\lambda', \lambda}(\mathbf{k}+\mathbf{q}, \mathbf{k}) \\ & \times \frac{1}{\beta_T} \times \sum_l G_{k, \lambda}(\zeta_l) G_{k, \lambda}(\zeta_l + \omega_n) G_{k', \lambda'}(\zeta_l + \omega_n + \alpha_m) G_{k', \lambda'}(\zeta_l + \alpha_m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& N_{kk'}^2(\omega_n, \lambda, \lambda') \\
&= \delta_{\mathbf{k}', \mathbf{k}} \delta_{\lambda, \lambda'} \frac{1}{\beta_T} \times \sum_{\mathbf{q}, m, \lambda_1} U(q, \alpha_m) g^{\lambda, \lambda_1}(\mathbf{k}, \mathbf{k} - \mathbf{q}) g^{\lambda_1, \lambda}(\mathbf{k} - \mathbf{q}, \mathbf{k}) \\
&\quad \times \frac{1}{\beta_T} \times \sum_l [G_{k, \lambda}(\zeta_l)]^2 G_{k, \lambda}(\zeta_l - \omega_n) G_{k-q, \lambda_1}(\zeta_l - \alpha_m)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& N_{kk'}^3(\omega_n, \lambda, \lambda') \\
&= \delta_{\mathbf{k}', \mathbf{k}} \delta_{\lambda, \lambda'} \frac{1}{\beta_T} \times \sum_{\mathbf{q}, m, \lambda_1} U(q, \alpha_m) g^{\lambda, \lambda_1}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) g^{\lambda_1, \lambda}(\mathbf{k} + \mathbf{q}, \mathbf{k}) \\
&\quad \times \frac{1}{\beta_T} \times \sum_l [G_{k, \lambda}(\zeta_l)]^2 G_{k, \lambda}(\zeta_l + \omega_n) G_{k+q, \lambda_1}(\zeta_l + \alpha_m)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& N_{kk'}^4(\omega_n, \lambda, \lambda') \\
&= \frac{1}{\beta_T} \sum_{\mathbf{q}, m} \sum_{\lambda_1, \lambda'_1} U(q, \alpha_m) U(q, \alpha_m - \omega_n) g^{\lambda, \lambda_1}(\mathbf{k}, \mathbf{k} - \mathbf{q}) g^{\lambda_1, \lambda}(\mathbf{k} - \mathbf{q}, \mathbf{k}) \\
&\quad g^{\lambda', \lambda'_1}(\mathbf{k}', \mathbf{k}' - \mathbf{q}) g^{\lambda'_1, \lambda'}(\mathbf{k}' - \mathbf{q}, \mathbf{k}') \frac{1}{\beta_T^2} \sum_l G_{k, \lambda}(\zeta_l) G_{k, \lambda}(\zeta_l - \omega_n) G_{k-q, \lambda_1}(\zeta_l - \alpha_m) \\
&\quad \times \sum_{l'} G_{k', \lambda'}(\zeta_{l'}) G_{k', \lambda'}(\zeta_{l'} - \omega_n) G_{k'-q, \lambda'_1}(\zeta_{l'} - \alpha_m)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& N_{kk'}^5(\omega_n, \lambda, \lambda') \\
&= \frac{1}{\beta_T} \sum_{\mathbf{q}, m} \sum_{\lambda_1, \lambda'_1} U(q, \alpha_m) U(q, \alpha_m - \omega_n) g^{\lambda, \lambda_1}(\mathbf{k}, \mathbf{k} - \mathbf{q}) g^{\lambda_1, \lambda}(\mathbf{k} - \mathbf{q}, \mathbf{k}) \\
&\quad g^{\lambda', \lambda'_1}(\mathbf{k}', \mathbf{k}' + \mathbf{q}) g^{\lambda'_1, \lambda'}(\mathbf{k}' + \mathbf{q}, \mathbf{k}') \frac{1}{\beta_T^2} \sum_l G_{k, \lambda}(\zeta_l) G_{k, \lambda}(\zeta_l - \omega_n) G_{k-q, \lambda_1}(\zeta_l - \alpha_m) \\
&\quad \times \sum_{l'} G_{k', \lambda'}(\zeta_{l'}) G_{k', \lambda'}(\zeta_{l'} + \omega_n) G_{k'+q, \lambda'_1}(\zeta_{l'} + \alpha_m)
\end{aligned}$$

前三个图求和给出,

$$\begin{aligned}
& M_{xx}^1(\omega_n) + M_{xx}^2(\omega_n) + M_{xx}^3(\omega_n) \\
&= \frac{e^2 \hbar^2}{m^{*2} \beta_T} \times \sum_{\mathbf{q}, m} \frac{q_x^2}{\omega_n^2} U(q, \alpha_m) (\Pi(\mathbf{q}, \alpha_m + \omega_n) - \Pi(\mathbf{q}, \alpha_m))
\end{aligned}$$

后两个图求和给出，

$$\begin{aligned}
 & M_{xx}^4(\omega_n) + M_{xx}^5(\omega_n) \\
 &= \frac{e^2 \hbar^2}{m^{*2} \beta_T} \times \sum_{\mathbf{q}, m} \frac{q_x^2}{\omega_n^2} U(q, \alpha_m) U(q, \alpha_m + \omega_n) \Pi(\mathbf{q}, \alpha_m + \omega_n) (\Pi(\mathbf{q}, \alpha_m + \omega_n) - \Pi(\mathbf{q}, \alpha_m))
 \end{aligned}$$

加起来是，

$$\begin{aligned}
 & M_{xx}(\omega_n) \\
 &= M_{xx}^1(\omega_n) + M_{xx}^2(\omega_n) + M_{xx}^3(\omega_n) + M_{xx}^4(\omega_n) + M_{xx}^5(\omega_n) \\
 &= \frac{1}{\omega_n^2} \frac{e^2 \hbar^2}{m^{*2}} \int 2\pi q^3 dq \frac{V_{ph}(q)}{V(q)} \\
 & \quad \frac{1}{\beta_T} \times \sum_m \tilde{D}(\alpha_m) \chi(\alpha_m + \omega_n) \left[\frac{1}{\epsilon(\mathbf{q}, \alpha_m)} - \frac{1}{\epsilon(\mathbf{q}, \alpha_m + \omega_n)} \right]
 \end{aligned}$$

其中，

$$\tilde{D}(\alpha_m) = \frac{D(\alpha_m)}{1 - V_{ph}(q) \Pi(\mathbf{q}, \alpha_m) D(\alpha_m) / \epsilon(q, \alpha_m)} \quad (4.15)$$

$$\chi(\alpha_m + \omega_n) = 1 + \frac{V_{ph}(q) \Pi(\mathbf{q}, \alpha_m + \omega_n) \tilde{D}(\alpha_m + \omega_n)}{\epsilon(q, \alpha_m + \omega_n)} \quad (4.16)$$

介电函数定义为，

$$\epsilon(q, \alpha_m) = 1 - V(q) \Pi(\mathbf{q}, \alpha_m) \quad (4.17)$$

忽略两个声子格林函数相乘的项，得到，

$$\begin{aligned}
 M_{xx}(\omega_n) &\simeq \frac{1}{\omega_n^2} \frac{e^2 \hbar^2}{m^{*2}} \int 2\pi q^3 dq \frac{V_{ph}(q)}{V(q)} \\
 & \quad \frac{1}{\beta_T} \times \sum_m \tilde{D}(\alpha_m) \left[\frac{1}{\epsilon(\mathbf{q}, \alpha_m)} - \frac{1}{\epsilon(\mathbf{q}, \alpha_m + \omega_n)} \right]
 \end{aligned}$$

为了能够做解析延拓，我们需要先对 α_m 求和，具有如下形式的求和，

$$f(\omega_n) = \frac{2}{\beta_T} \times \sum_m \varphi(\alpha_m) \psi(\omega_n + \alpha_m) \quad (4.18)$$

可以被解析延拓成,

$$f(\omega) = \frac{P}{2\pi i} \int dx \left[\text{cth}\left(\frac{\beta_T x}{2}\right) - \text{cth}\left(\frac{\beta_T (x + \omega)}{2}\right) \right] [\varphi^+(x) - \varphi^-(x)] \psi^+(x + \hbar\omega) \quad (4.19)$$

$$\sigma_{xx}^1(\omega) = \frac{1}{i\omega} M_{xx'}(\omega + i\delta) \quad (4.20)$$

解析延拓后的结果是,

$$\begin{aligned} & \text{Re}\sigma_{xx}(\omega) \\ &= \frac{e^2 \hbar^2}{m^{*2} \omega^3} \int q^3 dq \frac{V_{ph}(q)}{V(q)} P \int dx \\ & \times \left[\text{cth}\left(\frac{\beta_T x}{2}\right) - \text{cth}\left(\frac{\beta_T (x + \omega)}{2}\right) \right] \text{Im}\tilde{D}(x^+) \text{Im} \frac{1}{\epsilon(\mathbf{q}, x^+ + \hbar\omega)} \end{aligned}$$

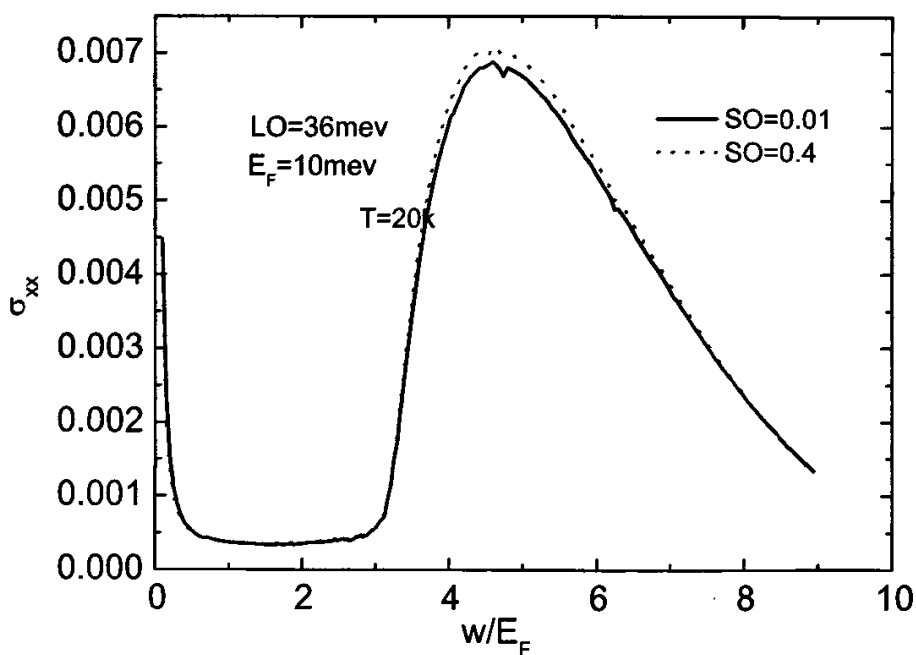


图 4.7 电导随频率变化 (有电声子相互作用时)

我们给出了在不同的自旋轨道耦合系数时电导率随频率的变化，发现在频率处于LO声子频率附近时，电导具有明显的峰值，增大自旋轨道耦合能提高电导峰的高度。

4.1.3 总结

在本小结中我们给出了只有Rashba自旋轨道耦合时无电声子相互作用的电导随温度和自旋轨道耦合的变化，发现越靠近零温时电导不为零的区域（共振区），电导越大。共振区的位置随自旋轨道耦合系数移动成线性关系。接着给出了有电子-电子相互作用和电声子相互作用的电导的解析结果。

4.2 自旋霍尔电导

研究自旋霍尔效应需要定义自旋流，我们采用目前公认的定义，并且给出在只有Rashba自旋轨道耦合时的结果，

$$v_i^\mu(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}\{v_i, \sigma_\mu\} = (p_i/m^*)\sigma_\mu + \alpha e_{z\mu i} \quad (4.21)$$

$$v_y^z(\mathbf{p}) = \frac{p_y}{m^*}\sigma_z \quad (4.22)$$

$$v_x^z(\mathbf{p}) = \frac{p_x}{m^*}\sigma_z \quad (4.23)$$

利用以下关系可以将自旋流在螺旋基表象下二次量子化，

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & \lambda' [k_y + ik_x]/k \end{pmatrix} \sigma_z \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda [k_y - ik_x]/k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \lambda' [k_y + ik_x]/k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda [k_y - ik_x]/k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -\lambda' [k_y + ik_x]/k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda [k_y - ik_x]/k \end{pmatrix} \\ &= 1 - \lambda'\lambda \end{aligned}$$

$$j_x^z = \frac{\hbar}{2} v_x^z = \frac{\hbar}{2} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \frac{\hbar k_x}{m^*} a_{\mathbf{k}, -\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k}, \lambda} \quad (4.24)$$

$$j_y^z = \frac{\hbar}{2} v_y^z = \frac{\hbar}{2} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \frac{\hbar k_y}{m^*} a_{\mathbf{k}, -\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k}, \lambda} \quad (4.25)$$

$$\sigma_{xx'}^z(\omega) = \int_0^\infty e^{i\omega t} dt \int_0^\beta \langle j_x^z(t - i\eta) j_{x'}(0) \rangle d\eta \quad (4.26)$$

$$\sigma_{xx'}^z(\omega) = \sigma_{xx'}^0(\omega) + \sigma_{xx'}^1(\omega) \quad (4.27)$$

其中

$$\sigma_{\mu\nu}^0(\omega) = -\frac{1}{i\omega} \int_0^\beta \langle j_\mu^z(-i\hbar\eta) j_\nu(0) \rangle d\eta \quad (4.28)$$

$$\sigma_{yx}^0(\omega) = \sigma_{xx}^0(\omega) = \sigma_{xy}^0(\omega) = \sigma_{yy}^0(\omega) = 0 \quad (4.29)$$

$$\sigma_{\mu\nu}^1(\omega) = -\frac{1}{i\omega} \int_0^\infty e^{i\omega t} dt \int_0^\beta \frac{\partial}{\partial t} \langle j_\mu^z(t - i\hbar\eta) j_\nu(0) \rangle d\eta \quad (4.30)$$

$$= \frac{1}{\omega} \int_0^\infty e^{i\omega t} dt \langle [j_\mu^z(t), j_\nu(0)] \rangle \quad (4.31)$$

我们同样可以定义如下的格林函数,

$$M_{xx'}(u) = \langle T j_x^z(0) j_{x'}(u) \rangle \quad (4.32)$$

$$M_{yx}(\omega_n) = \frac{i e \alpha \hbar}{2 m^*} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \lambda, \lambda'} \left(k_y \frac{\lambda' k'_y}{k'} \right) \times \sum_{i=0}^3 N_{kk'}^i(\omega_n, \lambda, \lambda') \quad (4.33)$$

则自旋霍尔电导可以通过解析延拓得到

$$\sigma_{yx}^{SH}(\omega) = \frac{1}{i\omega} M_{yx}^0(\omega + i\delta) \quad (4.34)$$

4.2.1 无电声子相互作用的费曼圈图结果

计算如图4.1所示的单圈图, 可以得到

$$M_{yx}^0(\omega_n)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{i e \alpha \hbar}{2 m} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \left(\frac{\lambda k_y^2}{k} \right) \frac{\hbar}{\beta_T} \times \sum_i G_{\mathbf{k}, \lambda}(\zeta_i) G_{\mathbf{k}, -\lambda}(\zeta_i + \omega_n) \\
&= i \frac{e \alpha \hbar}{m} \frac{1}{8\pi} \int_0^\infty k^2 dk \frac{f_{\mathbf{k},+} - f_{\mathbf{k},-}}{(\hbar\omega_n + 2\alpha k)} - \frac{f_{\mathbf{k},-} - f_{\mathbf{k},+}}{(\hbar\omega_n - 2\alpha k)} \\
&= i \frac{e \alpha \hbar}{8\pi m} \int_0^\infty k^2 dk (f_{\mathbf{k},+} - f_{\mathbf{k},-}) \left[\frac{1}{(\hbar\omega_n + 2\alpha k)} + \frac{1}{(\hbar\omega_n - 2\alpha k)} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&Re M_{yx}^0(\omega + i\delta) \\
&= \frac{e \alpha \hbar}{8m} \int_0^\infty k^2 dk (f_{\mathbf{k},+} - f_{\mathbf{k},-}) [\delta(\hbar\omega + 2\alpha k) + \delta(\hbar\omega - 2\alpha k)] \\
&= \frac{e \alpha \hbar}{8m} \left(\frac{\hbar\omega}{2\alpha} \right)^2 \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{\frac{1}{\exp \beta(\hbar^4\omega^2/8m\alpha^2 + \hbar\omega/2 - \mu) + 1}}{-\frac{1}{\exp \beta(\hbar^4\omega^2/8m\alpha^2 - \hbar\omega/2 - \mu) + 1}} \right) \\
&= \frac{e \hbar^3 \omega^2}{128m\alpha^2} \left(th \frac{\beta(\hbar^4\omega^2/8m\alpha^2 - \hbar\omega/2 - \mu)}{2} - th \frac{\beta(\hbar^4\omega^2/8m\alpha^2 + \hbar\omega/2 - \mu)}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&Im M_{yx}^0(\omega + i\delta) \\
&= \frac{e \alpha \hbar}{8\pi m} P \int_0^\infty k^2 dk (f_{\mathbf{k},+} - f_{\mathbf{k},-}) \left(\frac{1}{\hbar\omega + 2\alpha k} + \frac{1}{\hbar\omega - 2\alpha k} \right) \\
&= \frac{e \alpha \hbar}{8\pi m} P \int_0^\infty dk \left(\frac{\frac{1}{\exp \beta(\hbar^2 k^2/2m + \alpha k - \mu) + 1}}{-\frac{1}{\exp \beta(\hbar^2 k^2/2m - \alpha k - \mu) + 1}} \right) \left(\frac{k^2}{\hbar\omega + 2\alpha k} + \frac{k^2}{\hbar\omega - 2\alpha k} \right) \\
&= \frac{e \alpha \hbar}{16\pi m} P \int_0^\infty dk \left(\frac{th \frac{\beta(\hbar^2 k^2/2m - \alpha k - \mu)}{2}}{-th \frac{\beta(\hbar^2 k^2/2m + \alpha k - \mu)}{2}} \right) \left(\frac{k^2}{\hbar\omega + 2\alpha k} + \frac{k^2}{\hbar\omega - 2\alpha k} \right)
\end{aligned}$$

我们给出了自旋霍尔电导在不同频率下随温度变化的图，在图4.8中我们发现随着频率的增大，零温时的自旋霍尔电导增大，在零频时能回到 $e/8\pi$ ；随着温度增高，自旋霍尔电导先增大，达到峰值后又下降，频率越高，电导峰越高。在图4.9中我们发现自旋霍尔电导在频率大于某个频率后是负值，随着温度增高，自旋霍尔电导的绝对值先增大后减小。频率越高，电导峰越低。在图4.10中我们给出了自旋霍尔电导由正变负的频率位置。对于当前系统，频率值是0.32。在图4.12中给出了自旋霍尔电导随自旋轨道耦合系数变化的图，发现在某些自旋轨道耦合系数附近会出现自旋霍尔电导由负变正的震荡行为。随着频率增大，这个震荡点也向右移动。下面给出零温极限 $\beta \rightarrow \infty$ 下的情形，

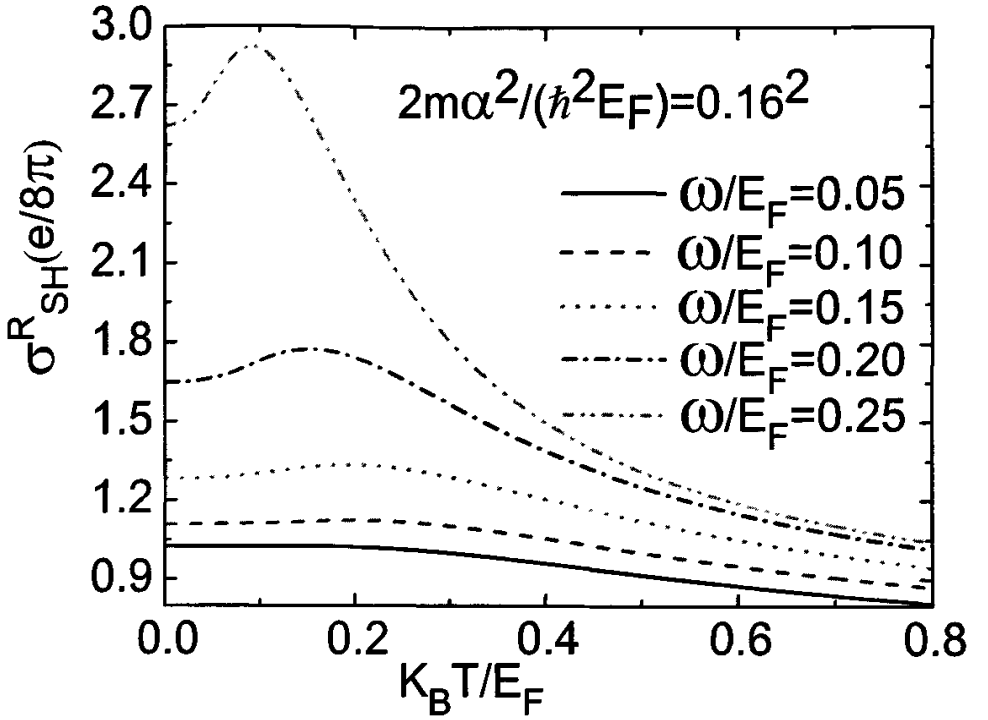


图 4.8 自旋霍尔电导随温度变化（低频）

$$\begin{aligned}
 & \text{Re} M_{yx}^0(\omega + i\delta) \\
 &= \frac{e\hbar^3\omega^2}{128m\alpha^2} (\text{sign}(\hbar^4\omega^2/8m\alpha^2 - \hbar\omega/2 - \mu) - \text{sign}(\hbar^4\omega^2/8m\alpha^2 + \hbar\omega/2 - \mu)) \\
 &= -\frac{e\hbar^3\omega^2}{64m\alpha^2} \Theta\left[1 - \left(\frac{(\hbar\omega - 2\alpha k_F^0)}{2m\alpha^2/\hbar^2}\right)^2\right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Im} M_{yx}^0(\omega + i\delta) \\
 &= \frac{e\alpha\hbar}{16\pi m} P \int_0^\infty dk \left[\begin{array}{c} \text{sign}(\hbar^2 k^2/2m - \alpha k - \mu) \\ -\text{sign}(\hbar^2 k^2/2m + \alpha k - \mu) \end{array} \right] \left(\frac{k^2}{\hbar\omega + 2\alpha k} + \frac{k^2}{\hbar\omega - 2\alpha k} \right)
 \end{aligned}$$

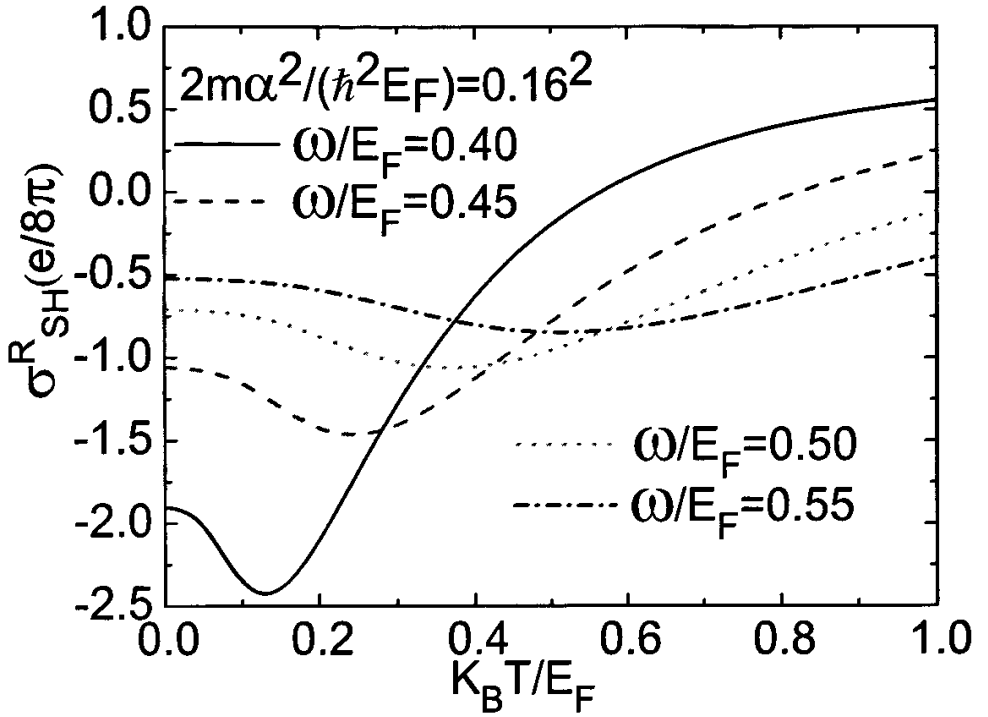


图 4.9 自旋霍尔电导随温度变化（高频）

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{e\alpha\hbar}{8\pi m} P \int_{k_F^0 - m\alpha/\hbar^2}^{k_F^0 + m\alpha/\hbar^2} \frac{1}{2\alpha} dk \left(\frac{\frac{k^2 + k\hbar\omega/2\alpha - k\hbar\omega/2\alpha - (\hbar\omega/2\alpha)^2 + (\hbar\omega/2\alpha)^2}{\hbar\omega/2\alpha + k}}{+ \frac{k^2 - k\omega/2\alpha + k\omega/2\alpha - (\omega/2\alpha)^2 + (\omega/2\alpha)^2}{\hbar\omega/2\alpha - k}} \right) \\
 &= -\frac{e\hbar}{16\pi m} P \int_{k_F^0 - m\alpha/\hbar^2}^{k_F^0 + m\alpha/\hbar^2} dk \left(k - \hbar\omega/2\alpha + \frac{(\hbar\omega/2\alpha)^2}{\hbar\omega/2\alpha + k} - k - \hbar\omega/2\alpha - \frac{(\hbar\omega/2\alpha)^2}{k - \hbar\omega/2\alpha} \right) \\
 &= -\frac{e\hbar}{16\pi m} [-2m\hbar\omega/\hbar^2 + (\hbar\omega/2\alpha)^2 (\ln |k + \hbar\omega/2\alpha| - \ln |k - \hbar\omega/2\alpha|) \Big|_{k_F^0 - m\alpha/\hbar^2}^{k_F^0 + m\alpha/\hbar^2}] \\
 &= \frac{e\omega}{8\pi} - \frac{e\hbar^3\omega^2}{64\pi m\alpha^2} \ln \left| \frac{(k_F^0)^2 - (m\alpha/\hbar^2 + \hbar\omega/2\alpha)^2}{(k_F^0)^2 - (m\alpha/\hbar^2 - \hbar\omega/2\alpha)^2} \right|
 \end{aligned}$$

 高温极限下, $\beta \rightarrow 0$

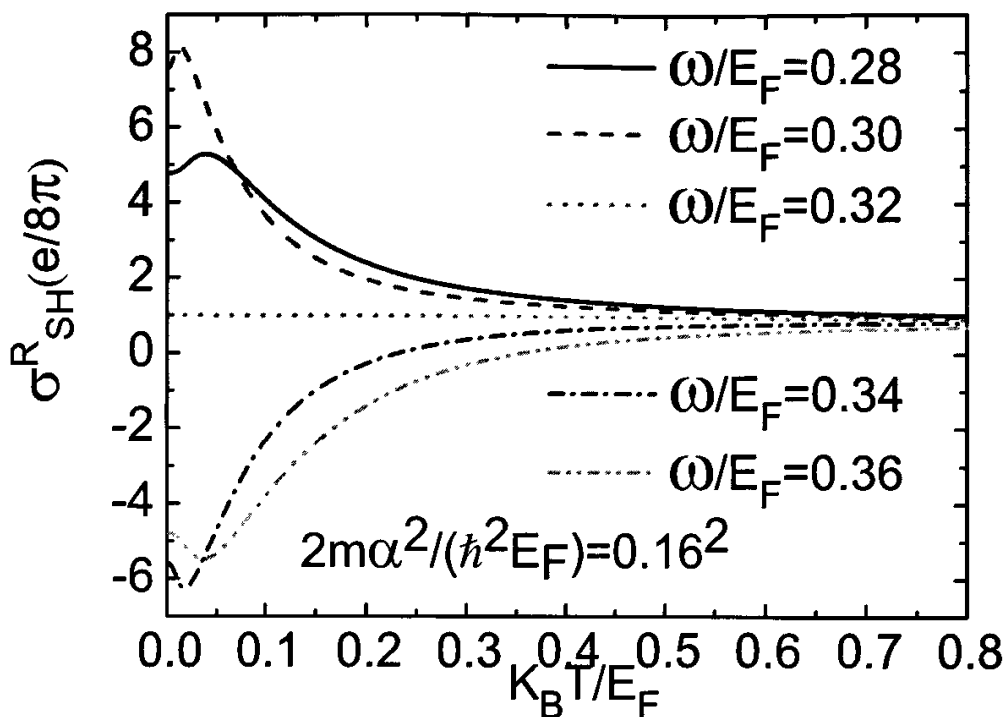


图 4.10 自旋霍尔电导随温度变化（中间频）

$$Re M_{yx}^0(\omega + i\delta) = -\frac{e\hbar^3\beta\omega^3}{256m\alpha^2} \quad (4.35)$$

4.2.2 自旋霍尔电导的高阶费曼圈图结果

我们计算了图4.6中的前三个图，它们是全部的两圈图

$$\begin{aligned} & M_{yx}^1(\omega_n) \\ &= \frac{i}{2} \frac{e\alpha\hbar}{m^*} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \lambda, \lambda'} \left(k_y \frac{\lambda' k'_y}{k'} \right) \delta_{\mathbf{k}', \mathbf{k}+\mathbf{q}} \frac{\hbar}{\beta_T} \times \sum_{\mathbf{q}, m} U(q, \alpha_m) g^{-\lambda, \lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}+\mathbf{q}) g^{-\lambda', \lambda}(\mathbf{k}+\mathbf{q}, \mathbf{k}) \\ & \quad \times \frac{\hbar}{\beta_T} \times \sum_l G_{k, \lambda}(\zeta_l) G_{k, -\lambda}(\zeta_l + \omega_n) G_{k', \lambda'}(\zeta_l + \omega_n + \alpha_m) G_{k', -\lambda'}(\zeta_l + \alpha_m) \end{aligned}$$

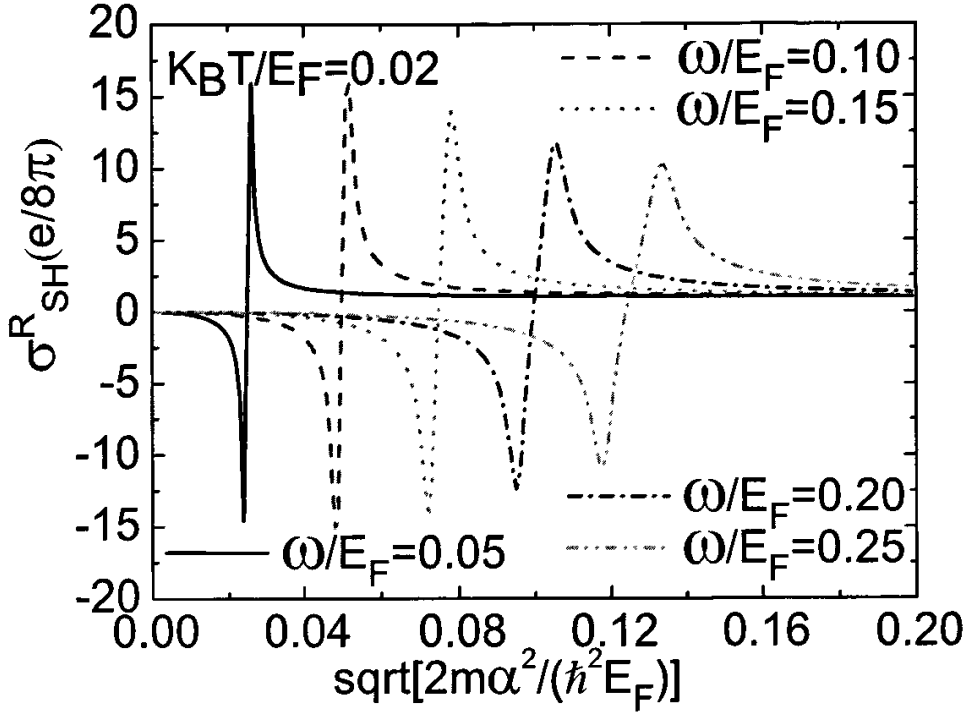


图 4.11 自旋霍尔电导实部随自旋轨道耦合系数变化

$$\begin{aligned}
 &= \frac{i e \alpha \hbar}{2 m^*} \sum_{\mathbf{k}, \lambda, \lambda'} \frac{\hbar}{\beta_T} \times \sum_{\mathbf{q}, m} U(q, \alpha_m) \frac{1}{2} [1 - \lambda \lambda' \cos(\phi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \phi_{\mathbf{k}})] \\
 &\quad \left[\frac{f_{\mathbf{k}, \lambda}}{\varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \lambda'} - \varepsilon_{\mathbf{k}, \lambda} - \hbar(\alpha_m + \omega_n)} \frac{\frac{\lambda' k_y}{|k+q|} (k_y + q_y) - \frac{\lambda k_y}{k} (k_y + q_y)}{(\hbar \omega_n + \varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, -\lambda'} - \varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \lambda'}) (\hbar \omega_n + \varepsilon_{\mathbf{k}, \lambda} - \varepsilon_{\mathbf{k}, -\lambda})} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{f_{\mathbf{k}, \lambda}}{\varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \lambda'} - \varepsilon_{\mathbf{k}, \lambda} + \hbar(\alpha_m + \omega_n)} \frac{\frac{\lambda k_y}{k} (k_y + q_y) - \frac{\lambda' k_y}{|k+q|} (k_y + q_y)}{(\hbar \omega_n + \varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \lambda'} - \varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, -\lambda'}) (\hbar \omega_n + \varepsilon_{\mathbf{k}, -\lambda} - \varepsilon_{\mathbf{k}, \lambda})} \right] \\
 &= \frac{M_{yx}^2(\omega_n)}{2 m^*} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \lambda} \left(k_y \frac{\lambda k'_y}{k'} \right) \delta_{\mathbf{k}', \mathbf{k}} \frac{\hbar}{\beta_T} \times \sum_{\mathbf{q}, m, \lambda_1} U(q, \alpha_m) g^{-\lambda, \lambda_1}(\mathbf{k}, \mathbf{k} - \mathbf{q}) g^{\lambda_1, -\lambda}(\mathbf{k} - \mathbf{q}, \mathbf{k})
 \end{aligned}$$

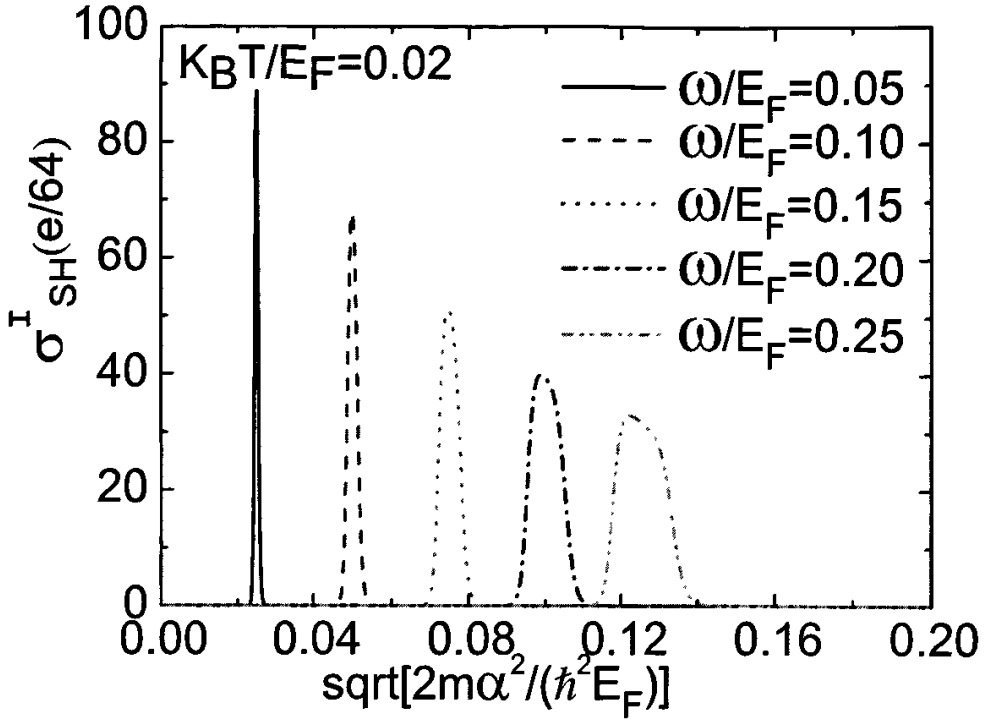


图 4.12 自旋霍尔电导虚部随自旋轨道耦合系数变化

$$\begin{aligned}
 & \times \frac{\hbar}{\beta_T} \times \sum_l G_{k,-\lambda}(\zeta_l) G_{k,\lambda}(\zeta_l - \omega_n) G_{k,-\lambda}(\zeta_l) G_{k-q,\lambda_1}(\zeta_l - \alpha_m) \\
 = & -\frac{i e \alpha \hbar}{2 m^*} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \frac{\hbar}{\beta_T} \times \sum_{\mathbf{q}, m, \lambda_1} U(q, \alpha_m) \frac{1}{2} [1 - \lambda \lambda_1 \cos(\phi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \phi_{\mathbf{k}})] \\
 & \left[\frac{f_{\mathbf{k}, \lambda}}{(\hbar \omega_n + \varepsilon_{\mathbf{k}, \lambda} - \varepsilon_{\mathbf{k}, -\lambda})^2} \frac{\lambda k_y^2 / k}{\varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \lambda_1} - \varepsilon_{\mathbf{k}, \lambda} + \hbar \alpha_m - \hbar \omega_n} \right. \\
 & \left. + \frac{f_{\mathbf{k}, \lambda}}{(\hbar \omega_n + \varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \lambda_1} - \varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, -\lambda_1})^2} \frac{\lambda_1 (k_y + q_y)^2 / |\mathbf{k} + \mathbf{q}|^2}{\varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \lambda_1} - \varepsilon_{\mathbf{k}, \lambda} - \hbar \alpha_m + \hbar \omega_n} \right] \\
 & M_{xy}^3(\omega_n)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{i e \alpha \hbar}{2 m^*} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \lambda} \left(k_y \frac{\lambda k'_y}{k'} \right) \delta_{\mathbf{k}', \mathbf{k}} \frac{\hbar}{\beta_T} \times \sum_{\mathbf{q}, m, \lambda_1} U(q, \alpha_m) g^{\lambda, \lambda_1}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) g^{\lambda_1, \lambda}(\mathbf{k} + \mathbf{q}, \mathbf{k}) \\
&\quad \times \frac{\hbar}{\beta_T} \times \sum_l G_{k, -\lambda}(\zeta_l + \omega_n) G_{k, \lambda}(\zeta_l) G_{k+q, \lambda_1}(\zeta_l + \alpha_m) G_{k, \lambda}(\zeta_l) \\
&= \frac{i e \alpha \hbar}{2 m^*} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \frac{\hbar}{\beta_T} \times \sum_{\mathbf{q}, m, \lambda_1} U(q, \alpha_m) \frac{1}{2} [1 - \lambda \lambda_1 \cos(\phi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \phi_{\mathbf{k}})] \\
&\quad \left[\frac{f_{\mathbf{k}, \lambda}}{(\hbar \omega_n - \varepsilon_{\mathbf{k}, \lambda} + \varepsilon_{\mathbf{k}, -\lambda})^2} \frac{\lambda k_y^2 / k}{\varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \lambda_1} - \varepsilon_{\mathbf{k}, \lambda} - \hbar \alpha_m + \hbar \omega_n} \right. \\
&\quad \left. + \frac{f_{\mathbf{k}, \lambda}}{(\hbar \omega_n - \varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \lambda_1} + \varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, -\lambda_1})^2} \frac{\lambda_1 (k_y + q_y)^2 / |k + q|}{\varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \lambda_1} - \varepsilon_{\mathbf{k}, \lambda} + \hbar \alpha_m - \hbar \omega_n} \right]
\end{aligned}$$

4.2.3 总结

在本小结中我们给出了只有Rashba自旋轨道耦合时无电声子相互作用的自旋霍尔电导随温度和自旋轨道耦合的变化，接着给出了有电子-电子相互作用和电声子相互作用的自旋霍尔电导的解析结果。

4.3 总结

在本章中，我们先研究了无电声子相互作用的电导和自旋霍尔电导，给出了他们在不同频率下随温度和随自旋轨道耦合系数的变化，发现电导会由温度得到增强，在某一温度处达到峰值。零温时电导只在某一频率范围内不为零。电导也会被自旋轨道耦合增强，在某处出现峰值。自旋霍尔电导会由温度得到增强，但在经过某一频率时自旋霍尔电导会由正变负。

结 论

本文首先推导了用Kubo公式在松原表象中计算线形响应的一般方法，将电导的计算归结为电流-电流关联的计算，将自旋霍尔电导的计算归结为自旋流-电流关联的计算。在处理有自旋轨道耦合存在的系统中电声子相互作用对输运性质的影响时，先研究了极化子有效质量问题，发现自旋轨道耦合能提高极化子效应和有效质量修正，在领头阶，对极化子结合能的提高正比于自旋轨道耦合系数的平方。

接着研究了无电声子相互作用时的电导，发现自旋轨道耦合能造成在零温近似下，单圈图给出的电导率的实部是一个区间函数，只在某些频率范围内不为零，而虚部在频率接近与自旋轨道耦合系数有关的特征频率时具有对数发散。对自旋霍尔电导率而言，在零温近似下，单圈图给出的自旋霍尔电导率在零频下等于 $e/8\pi$ ，与前人的结果相同；本文还给出了非零频的结果，自旋霍尔电导率的实部将在在频率接近与自旋轨道耦合系数有关的特征频率时具有对数发散，虚部将是一个区间函数，只在某些频率范围内不为零。进一步研究有限温度时的结果发现，电导随温度增大会出现峰值，自旋霍尔电导随温度增大在频率大于某一频率时会由正变负。对电导和自旋霍尔电导，我们都给出了有电声子相互作用的高阶费曼图的解析结果，但是只给出了电导随频率变化的曲线，发现电导随频率增大在LO声子特征频率附近出现峰值，增大自旋轨道耦合，峰值增高。

参考文献

- [1] S. A. Wolf, D. D. Awschalom, R. A. Buhrman, J. M. Daughton, S. von Molnr, M. L. Roukes, A. Y. Chtchelkanova, D. M. Treger, *Science* **294**, 1488 (2001).
- [2] C.P. Weber, C.N. Gedik, J.E. Moore, J. Orenstein, Jason Stephens and D.D. Awschalom, *Nature* **437**, 1330 (2005).
- [3] Darius Nikbin, *PhysicsWeb*, 11 September 2006
- [4] N. P. Stern, S. Ghosh, G. Xiang, M. Zhu, N. Samarth, and D. D. Awschalom, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 126603 (2006).
- [5] R.Kubo, *J.Phys.Soc.Jpn.* **12**, 570(1957)
- [6] M. I. Dyakonov and V. I. Perel, *Phys. Lett.* **35A**, 459 (1971)
- [7] Y. K. Kato, R. C. Myers, A. C. Gossard, and D. D. Awschalom, *Science* **306**, 1910 (2004).
- [8] J. Wunderlich, B. Kaestner, J. Sinova, and T. Jungwirth, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 047204 (2005).
- [9] V. Sih, R. C. Myers, Y. K. Kato, W. H. Lau, A. C. Gossard, and D. D. Awschalom, *Nature Phys.* **1**, 31 (2005).
- [10] S. Murakami, N. Nagaosa, and S. Zhang, *Science* **301**, 1348 (2003).
- [11] J. Sinova, D. Culcer, Q. Niu, N. A. Sinitsyn, T. Jungwirth, and A. H. MacDonald, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 126603 (2004).
- [12] H. Engel, B. I. Halperin, and E. I. Rashba, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 166605 (2005).
- [13] J. Shi, P. Zhang, D. Xiao, and Q. Niu, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 076604 (2006).
- [14] V. Sih, W. H. Lau, R. C. Myers, V. R. Horowitz, A. C. Gossard, and D. D. Awschalom, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 096605 (2006).
- [15] E. M. Hankiewicz, L.W. Molenkamp, T. Jungwirth, and J. Sinova, *Phys. Rev. B* **70**, 241301(R) (2004); S. I. Erlingsson and D. Loss, *Phys. Rev. B* **72**, 121310(R) (2005).
- [16] S. O. Valenzuela and M. Tinkham, *Nature (London)* **442**, 176 (2006).
- [17] J. I. Inoue, G. E. W. Bauer, and L. W. Molenkamp, *Phys. Rev. B* **70**, 041303(R) (2004).
- [18] E. G. Mishchenko, A. V. Shytov, and B. I. Halperin, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 226602 (2004).
- [19] E. I. Rashba, *Phys. Rev. B* **70**, 201309(R) (2004).

- [20] O. V. Dimitrova, Phys. Rev. B **71**, 245327 (2005).
- [21] R. Raimondi and P. Schwab, Phys. Rev. B **71**, 033311 (2005).
- [22] O. Chalaev and D. Loss, Phys. Rev. B **71**, 245318 (2005).
- [23] E. I. Rashba, cond-mat/0507007 (unpublished).
- [24] S. Murakami, Adv. Solid State Phys. **45**, 197 (2005).
- [25] A. Khaetskii, cond-mat/0408136 (unpublished).
- [26] A. G. Mal' shukov and K. A. Chao, Phys. Rev. B **71**, 121308(R) (2005).
- [27] S. Murakami, Phys. Rev. B **69**, 241202(R) (2004).
- [28] P. L. Krotkov and S. Das Sarma, Phys. Rev. B **73**, 195307 (2006).
- [29] N. Tzoar, and Chao Zhang, Phys. Rev. B **35**, 7596 (1987).

在学期间的研究成果

发表/待发表论文

- [1] Zhou Li, Zhongshui Ma, A.R.Wright and Chao Zhang, Appl.Phys.Lett. **90** 112103 (2007), has been selected for the March 26, 2007 issue of Virtual Journal of Nanoscale Science Technology.
- [2] Temperature dependence of spin hall effect in Rashba spin-orbit coupling systems. Zhongshui Ma, Zhou Li, and Chao Zhang, in preparation.

致 谢

感谢北京大学理论物理所凝聚态理论研究小组提供的良好的科研氛围。

感谢澳大利亚University of Wollongong的张潮教授邀请我赴澳交流，并对我在澳期间的生活给予多方面的照顾，在研究方面给予热心指导。

感谢李定平教授的热心帮助以及田光善教授，郭卫教授，钱志新教授，尹澜教授，赵光达教授和郑汉青教授开设的各门研究生基本课程。

感谢小组内陈蕾，刘军丰，刘雪乐，吴志刚同学和杨化通博士在平时的学习讨论中对我的帮助。

感谢家人的支持。