

金属薄膜透射率的近似计算及其分析

张 伟

(哈尔滨工业大学)

从计算薄膜透射率的一般公式出发,对通常满足厚度远小于工作波长的金属薄膜的位相因子作 $e^{\pm i\delta}$ 进行了线性近似,从而得到适用不同情况的金属薄膜透射率的近似公式。分别计算了几种金属薄膜垂直入射下透射率随厚度及消光系数变化的曲线,也对非金属吸收膜进行了计算,并与精确公式的计算结果进行了比较。最后,对本公司及其结果进行了分析讨论。

一、引言

金属薄膜透射光谱特性的计算非常复杂,无法从公式形式上分析其光谱特性,但金属薄膜(如分光膜、反射膜、滤光膜及建筑玻璃热反膜等)厚度通常在几百埃以内,远小于其工作波长。根据这一特点,本文从一般薄膜的透射率公式着手,对公式中的位相因子 $e^{\pm i\delta}$ 进行线性近似,得到了不同情况下垂直入射和斜入射的透射率计算公式,公式简单明了,便于分析与计算。文中分析与计算了Al、Cu、及Ge等薄膜的透射率曲线,并与精确公式的计算结果进行比较,取得较满意的结果。此外,文中对公式的适用范围及精度也进行了分析与讨论。

二、位相因子 $e^{\pm i\delta}$ 的一阶近似

对厚度为 d ,光学常数为 $\hat{n} = n - ik$ 的金属薄膜,由多光束干涉原理,知其透射系数 (t) :

$$t = \frac{t_1 t_2 e^{-i\delta}}{1 + r_1 r_2 e^{-2i\delta}} \quad (1)$$

其中 t_1 、 t_2 与 r_1 、 r_2 分别为薄膜上、下界面的透射与反射系数; δ 为薄膜的位相厚度且,

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \hat{n} \cos \hat{\theta} \quad (2)$$

$\hat{\theta}$ 为光线在薄膜中的复折射角。公式(1)也可写成

$$t = \frac{t_1 t_2}{e^{i\delta} + r_1 r_2 e^{-i\delta}} \quad (3)$$

若 $d \ll \lambda$,即 $\delta \ll 1$,从而可忽略 $e^{\pm i\delta}$ 展开式中 d/λ 的高阶项,有

$$t = \frac{t_1 t_2}{(1 + i\delta) + r_1 r_2 (1 - i\delta)} \quad (4)$$

三、金属薄膜的透射率公式

1. 垂直入射下的透射率公式

此时,对薄膜的上、下界面分别有

$$t_1 = \frac{2n_0}{n_0 + \hat{n}}$$

$$t_2 = \frac{2\hat{n}}{\hat{n} + n_s} \quad r_1 = \frac{n_0 - \hat{n}}{n_0 + \hat{n}} \quad r_2 = \frac{\hat{n} - n_s}{n_0 + \hat{n}} \quad (5)$$

n_0 与 n_s 分别为入射介质与基片的折射率。代入 (4) 式, 整理得

$$t = \frac{2n_0\hat{n}}{\hat{n}(n_0 + n_s) + i\sigma(\hat{n}^2 + n_0n_s)} = \frac{2n_0}{(n_0 + n_s) + \frac{4\pi}{\lambda}dnk + i\frac{2\pi}{\lambda}d(n^2 - k^2 + n_0n_s)} \quad (6)$$

从而, 垂直入射下薄膜的透射率 (S) 为

$$T = \frac{n_s}{n_0} \cdot (t \cdot t^*) = \frac{4n_0n_s}{(n_0 + n_s + \frac{4\pi}{\lambda}dnk)^2 + (2\pi d/\lambda)^2(n^2 - k^2 + n_0n_s)} \quad (7)$$

若 k 与 n 较接近 (通常 $k > n$), 则 $n^2 - k^2 + n_0n_s$ 很小, 且 $(d/\lambda)^2$ 为高阶小量, 因此

$$T = \frac{4n_0n_s}{(n_0 + n_s + \frac{4\pi}{\lambda}ndk)^2} \quad (8)$$

2. 斜入射下的透射率公式

1) S 分量的透射率

对 S 分量, 在薄膜的上、下界面有

$$t_{1s} = \frac{2\eta_{0s}}{\eta_{0s} + \eta_s} \quad t_{2s} = \frac{2\eta_s}{\eta_0 + \eta_{ss}} \quad r_{1s} = \frac{\eta_{0s} - \eta_s}{\eta_{0s} + \eta_s} \quad r_{2s} = \frac{\eta_s - \eta_{ss}}{\eta_s + \eta_{ss}}$$

其中, η_{0s} 、 η_s 及 η_{ss} 相应地为入射介质、薄膜及基片的 s 分量的修正导纳。代入 (4) 式整理得

$$t_s = \frac{2\eta_{0s}\eta_s}{\eta_s(\eta_{0s} + \eta_{ss}) + i\delta(\eta_s^2 + \eta_{0s}\eta_{ss})} \quad (9)$$

将 (2) 式及 $\eta_s = \hat{n} \cos \hat{\theta}$ 代入, 得

$$t_s = \frac{2\eta_{0s}}{(\eta_{0s} + \eta_{ss}) + i\frac{2\pi}{\lambda}d(\hat{n}^2 \cos^2 \hat{\theta} + \eta_{0s}\eta_{ss})} \quad (10)$$

$$\text{令 } \hat{n}^2 \cos^2 \hat{\theta} = u_s + iv_s \quad (11)$$

则

$$\hat{n}^2 \cos^2 \hat{\theta} = \hat{n}^2 (1 - \sin^2 \hat{\theta}) = n^2 - n_0^2 \sin^2 \theta \quad (12)$$

将 $\hat{n} = n - ik$ 代入, 并比较上面两式的右端, 有

$$u_s = n^2 - k^2 - n_0^2 \sin^2 \theta \quad (13)$$

$$v_s = -2nk \quad (14)$$

因此

$$t_s = \frac{2\eta_{0s}}{(\eta_{0s} + \eta_{ss}) + i\frac{2\pi}{\lambda}d(u_s + iv_s + \eta_{0s}\eta_{ss})}$$

$$= \frac{2\eta_{0s}}{(\eta_{0s} + \eta_{ss} - \frac{2\pi}{\lambda} d v_s) + i \frac{2\pi}{\lambda} d (u_s + \eta_{0s} \eta_{ss})} \quad (15)$$

于是, S 分量的透射率 (T_s) 为

$$T_s = \frac{n_s \cos \theta_s}{n_0 \cos \theta_0} (t_s \cdot t_s^*)$$

$$= \frac{4\eta_{0s} \eta_{ss}}{(\eta_{0s} + \eta_{ss} - \frac{2\pi}{\lambda} d v_s)^2 + (2\pi \frac{d}{\lambda})^2 (u_s + \eta_{0s} \eta_{ss})^2} \quad (16)$$

将公式 (13) 与 (14) 代入, 得

$$T_s = \frac{4\eta_{0s} \eta_{ss}}{(\eta_{0s} + \eta_{ss} + \frac{4\pi}{\lambda} n d k)^2 + (2\pi \frac{d}{\lambda})^2 (n^2 - k^2 - n_0^2 \sin^2 \theta_0 + \eta_{0s} \eta_{ss})^2} \quad (17)$$

若 n 与 k 较接近, 可忽略 $(d/\lambda)^2$ 项, 从而

$$T_s = \frac{4\eta_{0s} \eta_{ss}}{(\eta_{0s} + \eta_{ss} + \frac{4\pi}{\lambda} n d k)^2} = \frac{4n_0 n_s \cos \theta_0 \cos \theta_s}{(n_0 \cos \theta_0 + n_s \cos \theta_s + \frac{4\pi}{\lambda} n d k)^2} \quad (18, 19)$$

θ_0 与 θ_s 分别为光线的入射角与基片中的折射角, θ_s 由 Snell 定律确定。

2) P 分量的透射率

对 P 分量, 在薄膜的上、下界面有

$$t_{1P} = \frac{2\eta_{0P}}{\eta_{0P} + \eta_P} \frac{\cos \theta_0}{\cos \hat{\theta}} \quad t_{2P} = \frac{2\eta_P}{\eta_P + \eta_{SP}} \frac{\cos \hat{\theta}}{\cos \theta_s}$$

$$r_{1P} = \frac{\eta_{0P} - \eta_P}{\eta_{0P} + \eta_P} \quad r_{2P} = \frac{\eta_P - \eta_{SP}}{\eta_P + \eta_{SP}}$$

η_{0P} 、 η_P 与 η_{SP} 相应地为入射介质、薄膜与基片的 P 量的修正导纳。代入 (4) 式整理得

$$t_P = \frac{(2\eta_{0P} \eta_{SP} \cos \theta_0) / \cos \theta_s}{\eta_P (\eta_{0P} + \eta_{SP}) + i \delta (\eta_P^2 + \eta_{0P} \eta_{SP})} \quad (20)$$

将 (2) 式及 $\eta_P = \hat{n} / \cos^2 \hat{\theta}$ 代入, 得

$$t_P = \frac{(2\eta_{0P} \cos \theta_0) / \cos \theta_s}{(\eta_{0P} + \eta_{SP}) + i \frac{2\pi}{\lambda} d \cos^2 \hat{\theta} (\hat{n}^2 / \cos^2 \hat{\theta} + \eta_{0P} \eta_{SP})} \quad (21)$$

其中对 $\cos^2 \hat{\theta}$, 有

$$\cos^2 \hat{\theta} = 1 - \sin^2 \hat{\theta} \equiv 1 - (S_1 + i S_2)^2 = 1 - S_1^2 + S_2^2 - i (2S_1 S_2) \equiv C_1 + i C_2 \quad (22)$$

从而

$$C_1 = 1 - S_1^2 S_2^2 \quad (23)$$

$$C_2 = -2S_1 S_2 \quad (24)$$

且

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= -\frac{n_0 \sin \theta_0}{n^2 + k^2} n \\ S_2 &= -\frac{n_0 \sin \theta_0}{n^2 + k^2} k \end{aligned} \right\}^{[1]} \quad (25)$$

因此由 (23) 与 (24) 式得

$$C_1 = 1 - \frac{(n_0^2 \sin^2 \theta_0) (n^2 - k^2)}{(n^2 + k^2)^2} \quad (26)$$

$$C_2 = -\frac{2nk n_0^2 \sin^2 \theta_0}{(n^2 + k^2)^2} \quad (27)$$

于是, (21) 式可写成

$$\begin{aligned} t_p &= \frac{(2\eta_{0P} \cos \theta_0) / \cos \theta_s}{(\eta_{0P} + \eta_{SP}) + i \frac{2\pi}{\lambda} d [\widehat{n^2} + \eta_{0P} \eta_{SP} (C_1 + iC_2)]} \\ &= \frac{(2\eta_{0P} \cos \theta_0) / \cos \theta_s}{\eta_{0P} + \eta_{SP} + \frac{2\pi}{\lambda} (2nk - C_2) d + i \frac{2\pi}{\lambda} d (n^2 - k^2 + \eta_{0P} \eta_{SP} C_1)} \end{aligned} \quad (28)$$

于是, P 分量的透射率 (T_P) 为

$$\begin{aligned} T_P &= \frac{n_s \cos \theta_s}{n_0 \cos \theta_0} (t_P \cdot t_P^*) \\ &= \frac{4\eta_{0P} \eta_{SP}}{[\eta_{0P} + \eta_{SP} + \frac{2\pi}{\lambda} (2nk - C_2) d]^2 + (2\pi \frac{d}{\lambda})^2 (n^2 - k^2 + \eta_{0P} \eta_{SP} C_1)^2} \end{aligned} \quad (29)$$

分析公式 (26) 与上式知: 若 n 与 k 较接近, 则可忽略 $(d/\lambda)^2$ 项, 从而

$$T_P = \frac{4\eta_{0P} \eta_{SP}}{[\eta_{0P} + \eta_{SP} + \frac{2\pi}{\lambda} (2nk - C_2) d]^2} \quad (30)$$

$$= \frac{(4n_0 n_s) / \cos \theta_0 \cos \theta_s}{(n_0 / \cos \theta_0 + n_s / \cos \theta_s + \frac{2\pi}{\lambda} (2nk - C_2) d)^2} \quad (31)$$

其中 C_2 由公式 (27) 确定。

分析公式 (7)、(17) 与 (29) 或 (18)

四、计算实例

及 (19) 与 (30) 及 (31), 易知: 当 $\theta_0 =$

0° 时, $T_s = T_P = T$

1) 图1中的曲线1是利用公式 (8) 计算

的铬 (Cr) 膜透射率随厚度变化的曲线, 选择公式 (8) 计算是由于铬的光学常数为 $\hat{n} = n - ik = 2 - 3i$ ($\lambda = 5500 \text{ \AA}$)^[2]。

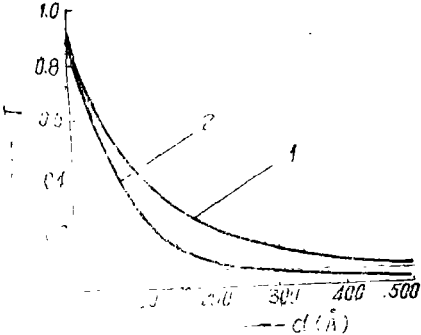


图1 金属膜透射率随厚度变化的曲线
 曲线1: Cr膜, $\hat{n} = 2 - 3i$, $\lambda = 5500 \text{ \AA}$;
 曲线2: Al膜, $\hat{n} = 0.82 - 5.44i$, $\lambda = 5460 \text{ \AA}$
 $n_0 = 1.0$, $n_s = 1.51$, $\theta_0 = 0^\circ$
 图1中的曲线2是由公式 (7) 计算的铝 (Al) 膜的透射率, 选举 (7) 式是因为其光学常数 $\hat{n} = 0.82 - 5.44i$ ^[2], n 与 k 相差较大。

2) 图2是利用公式 (7) 计算铜(Cu)膜的透射率与厚度的关系曲线。

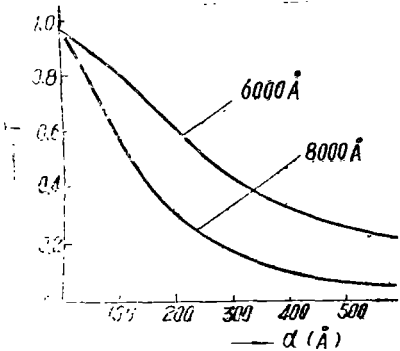


图2 铜膜透射率与厚度的关系曲线
 铜膜的光学常数 $\hat{n} = 0.19 - 2.98i$ ($6000 \text{ \AA}$)
 $\hat{n} = 0.17 - 4.84i$ ($8000 \text{ \AA}$), $n_0 = 1.0$, $n_s = 1.52$, $\theta_0 = 0^\circ$

3) 图3中的虚线^[3]与实线分别是精确公式和本文公式 (7) 的计算结果。

4) 图4中的虚线^[4]和实线分别是精确公式与本文公式(8)的计算结果。

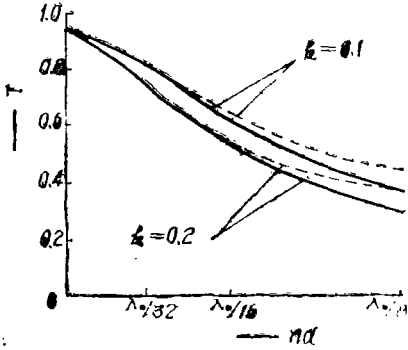


图3 金属膜透射率随厚度变化的曲线
 $\hat{n} = 3.5 - ik$, $n_0 = 1.0$, $n_s = 1.5$, $\theta_0 = 0^\circ$

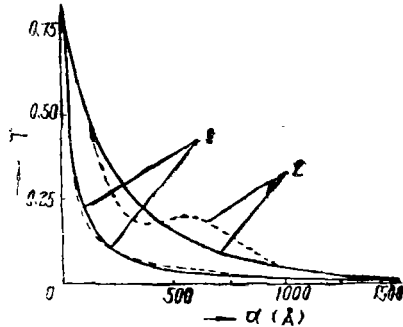


图4 Ge膜的透射率与厚度的关系曲线
 曲线1: $\hat{n} = 3.73 - 2.30i$ ($4300 \text{ \AA}$)
 曲线2: $\hat{n} = 4.98 - 0.92i$ ($6500 \text{ \AA}$)
 $n_0 = 1.38$, $n_s = 1.52$, $\theta_0 = 0^\circ$

四、分析与讨论

1) 本文得到的透射率公式是在 $d \ll \lambda$ 的条件下成立的, 一般情况下, 透射率的计算误差随 b 的增加而变化。见图3, 在 $nd = \lambda_0/8$ 时, 与精确公式的计算结果相比, 误差约为10%。

2)透射率的计算误差不仅与厚度有关, 也与薄膜的光学常数有关, 在 $n/k \rightarrow 1.0$ 及 nk 较大时, 计算精度很高, 参见图4。

3) 虽然本文公式是在 $d \ll \lambda$ 的条件下得到的, 但对很高的 nk 值, 本文公式所适用的厚度范围会很大 (见图4)。由于透射率随厚的增大而迅速下降, 从而使得计算误差也相应地迅速下降。

4) 公式 (8) 的适用条件是 n 与 k 较接

近, 即 $n/k \rightarrow 1.0$, 否则误差将很大。因而不能使用(8)式, 应使用(7)式, 表1与表2是Cr膜与Al膜的计算数据。从表中可看

出, 使用不同公式计算的透射率误差相差很大(参见图1中的曲线1与2)。

表1 使用不同公式计算的Cr膜 ($\hat{n} = 2 - 3i$) 透射率与厚度的关系 (所用参数同图1)

所用公式	$d(\text{\AA})$								
	T	0	50	100	150	200	300	400	500
公式(8)		0.960	0.591	0.400	0.290	0.218	0.137	0.094	0.069
公式(7)		0.960	0.588	0.396	0.285	0.213	0.133	0.090	0.066
$(2\pi \frac{d}{\lambda})^2 (n^2 - k^2 + n_0 n_s)^2$		0	0.040	0.160	0.361	0.640	1.435	2.558	4.000
$(n_0 + n_s + \frac{4\pi}{\lambda} ndk)^2$		6.25	10.152	15.000	20.670	27.522	43.800	63.830	86.960

表2 利用不同公式计算的Al膜 ($\hat{n} = 0.82 - 5.44i$) 透射率与厚度的关系 (所用参数同图1)

所用公式	$d(\text{\AA})$								
	T	0	50	100	150	200	300	400	500
公式(8)		0.960	0.661	0.482	0.388	0.289	0.193	0.137	0.103
公式(7)		0.960	0.519	0.269	0.155	0.099	0.049	0.03	0.02
$(2\pi \frac{d}{\lambda})^2 (n^2 - k^2 + n_0 n_s)^2$		0	2.489	9.927	22.40	39.83	89.62	159.30	248.94
$(n_0 + n_s + \frac{4\pi}{\lambda} ndk)^2$		6.25	9.077	12.448	15.46	20.76	31.09	43.80	58.25

另外若令

$$(2\pi \frac{d}{\lambda})^2 (n^2 - k^2 + n_0 n_s)^2 \equiv A$$

$$(n_0 + n_s + \frac{4\pi}{\lambda} nk d)^2 \equiv B$$

那么, 公式(7)可写成

$$T = \frac{4n_0 n_s}{B(1 + A/B)} \tag{32}$$

显然, A/B 比值与 n/k 比值有关, 表3给出了不同 n/k 值对应的 A/B 比值与厚度的关系。由此可见, 什么样的 n/k 比值, 可使得 A/B 的比值忽略不计, 从而使用公式(8)。

5) 本文中的公式虽然是对金属膜进行讨论的, 也完全适用于非金属的吸收膜。实际上, 上面已经计算了Ge膜的透射率(见

图4)。

六、结束语

使用金属膜, 其厚度通常满足 $d \ll \lambda$ 这一条件, 本文正是在这一条件下得到的关于透射率计算的近似公式。这些公式中, 垂直入射下的公式, 简单明了, 将透射率与金属的光学常数 (n, d) 及薄膜厚度 (d) 的关系直接显示出来, 便于理论分析与计算。

从上面几个计算的例子来看, 本文所得公式的计算结果与精确公式的计算结果在 $d \ll \lambda$ 的范围内吻合得很好。由于金属膜光学常数比电介质膜具有更强的不稳定性以及

(下转第48页)

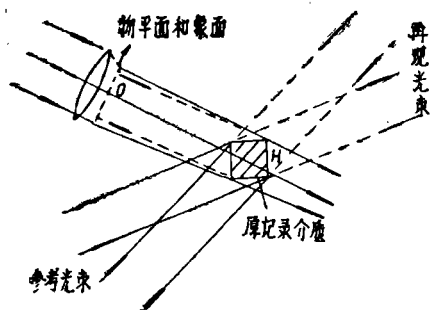


图5

同的条纹面内。记录完毕，将厚记录介质进行线性处理，就得到一张含有全部信息的全息图。

再现时用再现光照射厚全息图，理论分析得出^[2]，只有在入射方向满足布喇格定律时，才能得到清晰的象(衍射效率最高)。如再现光的入射方向与条纹平面的夹角为 θ_B ，则当 θ_B 满足

$$2nl\sin\theta_B = \lambda \quad (5)$$

时，在特定方向可看到清晰的象。

式中 n ——全息图的平均折射率

l ——相邻条纹平面的间距

λ ——入射波长

从上式可知，入射波长一定，则从不同的入射方向可取出不同的信息使之再现，这种性质称为角度选择性。在图5装置中，再现时用参考波的共轭波作为再现波(在图中用虚线表示)照射全息图，所需信息就在原来物的位置以实象形式出现，改变再现光的入射角就可再现不同的信息。

全息存储与一般存储相比，优点是记录与再现快，可靠性好，抗干扰性强等，假如全息图上有一划痕，并不影响信息的再现。

参考文献

- [1] 黄婉云，傅里叶光学教程，北京师范大学出版社，1985年，第208页
- [2] 于美文，光学技术，1985年，第6期，第14页

(上接第54页)

表3

不同 n/k 比值所对应的 A/B 值与厚度的关系

n/k	$d(\text{\AA})$	A/B	0	50	100	150	200	300	400	500
0.67			0	0.004	0.010	0.017	0.023	0.033	0.040	0.044
0.06			0	0.020	0.080	0.182	0.305	0.630	1.037	1.500
0.05			0	0.275	0.800	1.450	1.920	2.880	3.640	4.270
0.04			0	0.110	0.420	0.890	1.390	3.100	5.080	7.270

非均匀性等因素，所以所谓精确公式在实际透射率的计算上是近似的。因此，从这种意义上讲，本文所得公式也是有其实际价值的。

参考文献

- [1] Z.Knittel, Optics of Thin Films,

p.183 (1976)

- [2] 顾培夫，光学薄膜技术(上册)，第129~130页，1984年
- [3] M.Born and E.Wolf, Principles of Optics, 6th ed, p.631(1930)
- [4] 同[1], p.197