

用叠加原理推证圆环变形时环上任意点的位移公式

彭美驥

(机械系)

摘 要

本文根据圆环变形的假设条件,用叠加原理推证圆环变形时环上任意点的位移公式

关键词: 叠加原理, 圆环变形, 位移。

清华大学工程力学教研组振动组编著的“机械振动”一书,讨论圆环振动分析圆环变形时只简单地给出环上任意一点 α 的位移公式,没有给出详细的推导过程,又没有指出公式的出入之处,无法查找公式的推导,给教学带来一定的困难。本文根据圆环变形的假设条件,用叠加原理推导出环上任意一点 α 的位移公式。

所谓圆环,指的是如例(1)所示的旋转体,它的截面形状不限,但显然圆环是等截面的。为了推导圆环变形时环上任意点的位移公式,首先要建立圆环的坐标系和圆环的几何及力学假设。

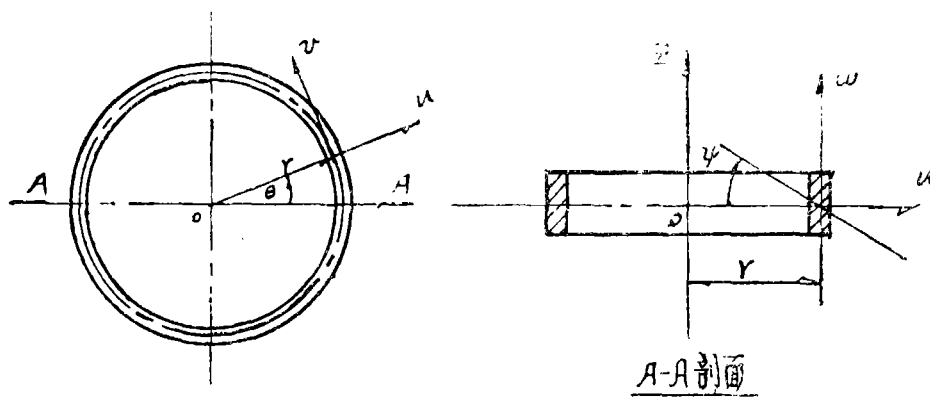


图 1

圆 环 座 标

本文1986年12月6日收到。

一、圆环坐标系

以圆环变形前各截面重心所在的平面和对称轴即旋转轴的交点为坐标原点，以对称轴为Z轴，建立空间固定的柱坐标系 $R\theta Z$ ，环上任意点a的位置可以用它在变形前的座标 R, θ, Z 来确定，而环的轴线（即截面重心连线）上各点的位置用座标 θ 就可以确定（请见图1）。因此，圆环的变形状态可以由轴线上各点沿当地的 R, θ, Z 三个方向的位移分量 u, v, w 以及过e点的截面绕轴线的转角 Ψ 所完全确定。 u, v, w 和 Ψ 是 θ 和时间 t 的函数，它们的正方向如图（1）所示。

二、几何与力学假设

（1）圆环的截面尺寸比圆环的平均半径 r 要小得多。

（2）平截面假设，圆环振动时变形是微量变形，过Z轴的平面与圆环相截的截面（以后所述的截面皆指这种截面）在变形过程中仍保持平面，且始终与当时的圆环轴线的切线垂直。

（3） $\sigma_r, \sigma_z = 0$ ，即截面没有挤压，拉伸变形。

（4） $\tau_{rz}, \tau_{zr} = 0$ ，即截面没有角变形。

根据上述假设，当圆环轴线上各点同时有位移 u, v, w 及截面绕圆环轴线的转角 Ψ 时，环上任意一点a的位移 u_a, v_a, w_a 可以视为圆环轴线上各点单独有位移 u, v, w 和截面绕圆环轴线的转角 Ψ 时，点a的位移 u_a, v_a, w_a 的叠加，这就是叠加原理，叠加原理只能用于线性系统。具体推导如下：

（a）设圆环轴线各点只 v 有位移， u, w 及过各点的截面转角 $\Psi = 0$

任取轴线上一点e，则e的位移 $u_e = 0, v_e = v, w_e = 0$ 以及过e点的截面转角 $\Psi = 0$ ，如图2所示。

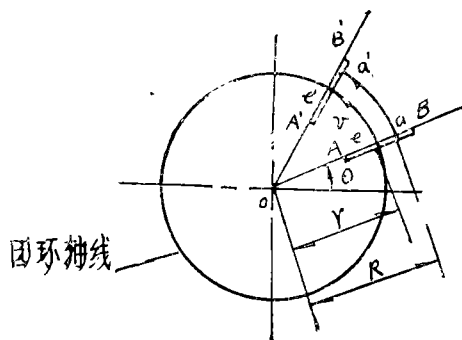


图 2

由于 $v_e = v, u_e = w_e = \Psi_e = 0$ ，圆环可视为刚体绕轴Z转动了 $\frac{v}{r}$ 角度，（ r —圆环轴线

的半径)即截面AB旋转 v/r 角度,转到截面A'B'的位置,截面AB上e、a两点就旋转到截面A'B'上的e'、a'两点上。因为 $ee' = v$ 则

$$a点的v向位移为v_a = aa' = v \frac{R}{r} \quad (1)$$

$$a点的u向位移显然为u_a = u_e = 0 \quad (2)$$

$$a点的w向位移显然为w_a = w_e = 0 \quad (3)$$

式中R为任意点a的R坐标。

(b) 设圆环轴线各点只有u位移, v、w及过各点的截面转角 Ψ 等于零。

任取轴线上一点e, 则e的位移 $u_e = u$ 、 $v_e = 0$ 、 $w_e = 0$ 及过e点的截面AB的转角 $\Psi_e = 0$ 。

这时圆环轴线形状不再是圆因 $u = u(\theta)$, 但仍是平面曲线。如图3所示

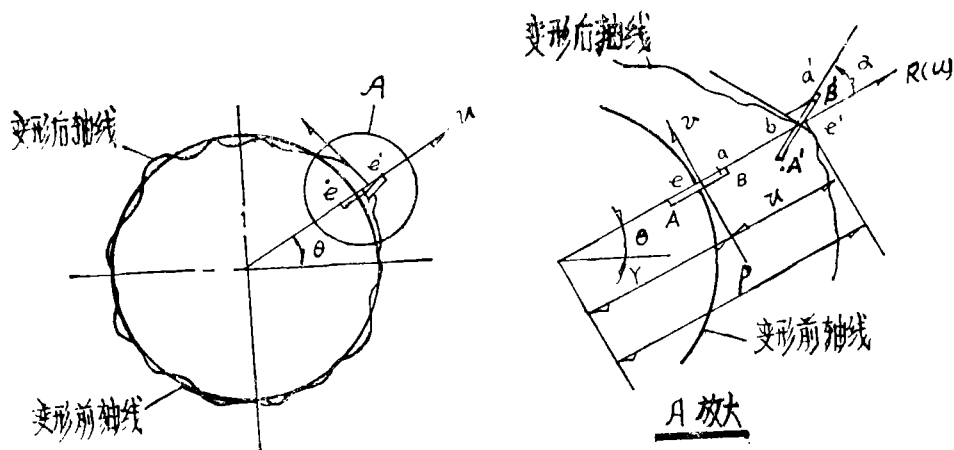


图3

因e点的位移 $u_e = u$ 、 $v_e = 0$ 、 $w_e = 0$ 及e点的截面AB的转角 $\Psi_e = 0$, 所以截面AB可以认为是沿着矢径R平移及绕e'点的Z轴旋转到达图3所示的A'B'位置。截面AB的这种移动给截面AB上任意点a带来v向的附加位移 v_{au} , 求法如下:

截面AB上e、a两点分别移动到截面A'B'的e'、a'两点上请见图(3), e'的R坐标如下

$$\rho = r + u$$

将 ρ 对 θ 微分则得

$$\rho' = \frac{\partial \rho}{\partial \theta} = \frac{\partial (r + u)}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad (4)$$

截面A'B'法线即圆环轴线上e'的切线与e'点矢径的夹角 φ

$$\varphi = \arctg \frac{\rho}{\rho'} \quad (5)$$

从图示的几何关系得:

$$\alpha = \varphi - 90^\circ \quad (6)$$

过a'点作矢径 ρ 的平行线交e'点的切线于b点, 则be'线段可近似视为圆环轴线上e的u位移引

起截面AB上任意点a的v向附加位移量 v_{au} 。则得

$$v_{au} = (R-r) \operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta} (R-r) \quad (7)$$

(截面A'B'在其他方位时也得同样结果, 这里从略)

式中R—a点未变形前的固定空间柱座标的R座标。

r—圆环轴线半径。

由假设条件(7)式可取下面近似值

$$v_{au} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} (R-r) = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} (r-R) \quad (8)$$

$$\text{所以a点的v向位移} \quad v_a = v_e + v_{au} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} (r-R) \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \text{a点的u向位移} \quad u_a &= u_e = u \\ &(\text{略去微量}) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\text{a点的w向位移} \quad w_a = w_e = 0 \quad (11)$$

(c) 设圆环轴线各点只有w位移, u、v及过各点的截面转角 ψ 等于零。

此时圆环轴线的形状如图(4)所示, 为空间曲线, 但在 θR 座标面的投影仍是圆。任取圆环轴线上一点e, 则 $u_e = 0$, $v_e = 0$, $w_e = w$ 及过e点的截面AB的转角 $\psi_e = 0$ 。为便于理解在圆环 $\theta = 0$ 处将圆环轴线切断展成平面曲线如图(5), 由图(5)可见轴线变形后e'点的截面A'B'可以认为是e点的截面AB沿过e点处的w方向平移和绕过e'点平行R矢径的直线旋转的结果。这种结果给截面AB上任意一点a带来v向的附加位移 v_{aw} 。过a点作 θ 座标的平行线与过 θ (e点 θ 座标)的z轴交b点, 则ab线段等于 v_{aw} 。e'点切线与Z轴的夹角 β

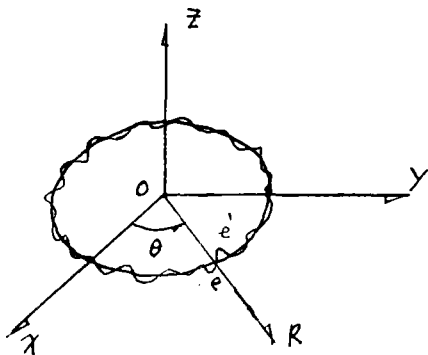


图 4

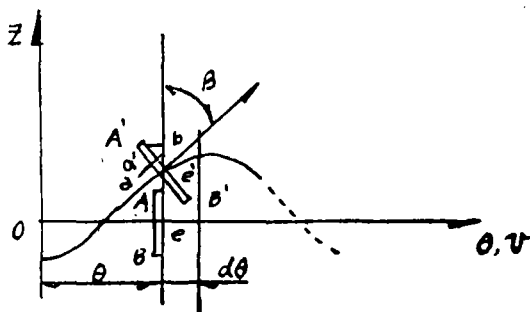


图 5

$$\text{方向余弦} \cos \beta = \frac{\frac{\partial w}{\partial \theta}}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2}} \quad (12)$$

图(5)所示的 α 角 $\alpha = 90^\circ - \beta$

$$\text{所以 } v_{aw} = a'b = -Z, \sin \alpha = -Z \frac{\frac{\partial w}{\partial \theta}}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2}} \doteq -Z \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (13)$$

(略去微量)

(截面A'B'处于其他方位时也能得同样的结果此处从略)

$$\text{所以 } a \text{ 点的 } v \text{ 向位移 } v_a = v_e + v_{aw} = -\frac{Z}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (14)$$

$$a \text{ 点的 } w \text{ 向位移 } w_a \doteq w_e = w \quad (15)$$

(略去微量)

$$a \text{ 点的 } u \text{ 向位移 } u_a = u_e = 0 \quad (16)$$

(d) 设圆环轴线各点的位移 $u = v = w = 0$, 只有过各点的截面ABCD的转角 $\psi \neq 0$.

任取轴线上一点e, 则 $u_e = v_e = w_e = 0$, 过e点的截面ABCD的转角 $\psi_e = \psi$. 由于 $\psi_e = \psi$, 截面ABCD被旋转到A'B'C'D'的位置上如图(6)所示. 这种旋转的结果给截面ABCD上任意点a产生u向, w向的附加位移 $u_{a\psi}$ 、 $w_{a\psi}$.

由图(6)可知截面ABCD上任意点a移到截面A'B'C'D'的a'点上.

$$aa' = L\psi \quad (17)$$

L—o点(截面重心点)

到a点的距离. 过a点作R座标轴的平行线ab, 则:

$$\angle a'ab = 90^\circ - \sin^{-1} \frac{R}{L} + \frac{1}{2}\psi \quad (18)$$

$$u_{a\psi} = aa' \cos \angle a'ab \quad (19)$$

将(18)、(17)式代入(19)式得:

$$u_{a\psi} = L\psi \sin$$

$$\left[\sin^{-1} \frac{Z}{L} - \frac{1}{2}\psi \right]$$

$$\doteq \psi Z \quad (\text{略去微小项})$$

(20)

$$w_{a\psi} = -aa' \sin \angle a'ab = -L\psi \cos \left[\cos^{-1} \frac{R-r}{L} - \frac{1}{2}\psi \right]$$

$$\doteq (r-R)\psi \quad (\text{略去微小项})$$

(21)

$$a \text{ 点的 } u \text{ 向位移 } u_a = u_{a\psi} = \psi Z$$

(22)

$$a \text{ 点的 } v \text{ 向位移 } v_a = v_e = 0$$

(23)

$$a \text{ 点的 } w \text{ 向位移 } w_a = w_{a\psi} = (r-R)\psi$$

(24)

到此时, 如果圆环轴线各点同时有u、v、w位移及过各点的截面有转角 ψ 时, 圆环截面

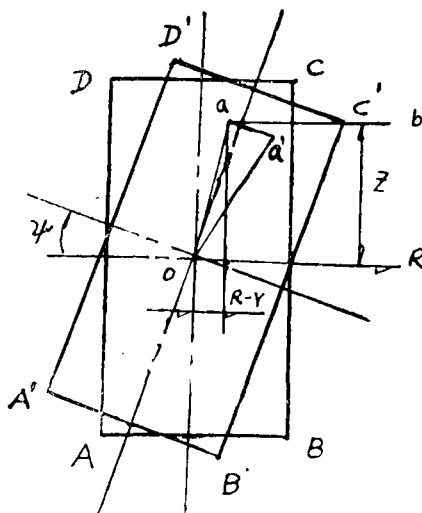


图 6

上任意点a在u, v, w方向上的位移就等于(1), (2), (3), (9), (10), (11), (14), (15), (16), (22), (23), (24)式的组合, 则

$$(2) + (10) + (16) + (22)$$

$$\text{得: } a \text{ 点的 } u \text{ 向位移 } u_a = u + \psi z$$

$$(1) + (9) + (14) + (23)$$

$$\text{得: } a \text{ 点的 } v \text{ 向位移 } v_a = v \frac{R}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} (r - R) - z \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (25)$$

$$(3) + (11) + (15) + (24)$$

$$\text{得: } a \text{ 点的 } w \text{ 向位移 } w_a = w + \psi (r - R)$$

(25) 式为清华大学工程力学教研组振动组编著的“机械振动”书393页公式(a), 公式推证完毕。

参 考 文 献

- [1] 中国矿业学院数学教研室, 《数学手册》, 北京, 科学出版社, 1980, 第三次印刷。
- [2] Γ、W、菲赫金哥尔茨: 《微积分学教程》, 北京, 高等教育出版社, 1959年, 第10次印刷。

The Derivation of the Displacement Formula for an Arbitrary Point in a Deformed Ring from the Overlapping Principle

Peng Meiji

Abstract

This paper, based on the hypothetical conditions of deformed rings, derives a displacement formula for an arbitrary point in the ring by means of the overlapping principle.

Key words: Overlapping principle, Deformed ring, Displacement