

钢轨波形磨耗成因研究

刘学毅

(西南交通大学铁道系 成都610031)

摘要

对现有波磨成因理论进行了全面的总结和分类，揭示了成因理论的不足和发展前景。对波磨进行了详细的现场调查和测试，总结了磨损型波磨的特征和发生发展规律，对波磨分类进行了调整，提出了在长波和短波间还存在一类中长波磨。

针对现有分析模型过份简化、考虑因素单一等缺陷，建立了“轮轨系统垂向-横向-轮对弯曲和扭转非线性空间耦合振动时变模型”。成功地处理了轮轨系统中各种空间耦合关系及非线性因素。首次采用了有限单元与无限元相结合的方法处理轨道边界，有效地消除了模型的边界效应。合理界定了各种相关模型的适用范围。计算模型具有良好的可靠性，对轮轨空间耦合振动问题具有普遍的适用性，是轮轨系统动力学研究方面的一个重要进展。

开辟了着眼于轮轨系统空间耦合振动情况，以轮轨间磨耗功这一综合参量为研究对象的研究思路。通过空间耦合振动研究，融合轮轨系统垂向振动、轮对弯曲振动、轮对扭转振动和磨耗功波动等波磨成因理论，建立了“轮对粘滑振动-磨耗功波动-磨损型波磨”的波磨成因理论。这一理论包罗了多数动力类成因理论，能够解释许多现有成因理论无法解释的波磨现象，将波磨成因的理论研究向前推进了一大步。

系统考察了轮轨参数大范围变化的情况下，轮轨振动形态的多样性。发展了轮对粘滑振动的三个判定条件。着重指出，轮轨系统垂向振动、轮对弯曲振动和轮对扭转振动三种振动形式，在一定条件下相互激化，构成一循环自激振动系统。在国内外首次提出，因各种振动形式被激化的程度不一样，轮对粘滑振动可表现出多种类型，且多种粘滑振动类型与多种波磨特征相对应。详细地描述了四类轮对粘滑振动的特点。系统地列举出了轮对发生粘滑振动时，各种参数的典型组合形式。这方面的研究具有一定的独创性，在一定程度上填补了国内外研究的空白。

认为磨损型长波波磨的成因是，轮对粘滑振动造成的钢轨不均匀磨损的重复和累加效应。提出了波磨形成和发展的四个必要条件，认为轨道不平顺、车速相对集中、车型数量优势等，是激发、加强及使粘滑振动归一化从而形成波

磨的必要条件。全面地分析了中长波磨、均匀长波和非均匀长波磨耗的多种形成和发展过程。发展和完善了认识与防治钢轨波磨的理论基础。

首次提出了磨损型波磨临界半径的概念。认为半径较小的曲线上，波磨主要是低速货车的作用，大半径曲线上机车的作用渐增，直线地段不存在磨损型长波磨耗的形成和发展条件。

重点分析了影响较大的18个因素对波磨的影响关系，研究了蠕滑特性、不平顺、制动、轴刚度和一系阻尼、轨道弹性和阻尼等在波磨形成和发展中的作用。提出了改变蠕滑特性曲线消除粘滑振动、离散车速防止不均匀磨损重复累加效应等3类预防波磨的措施。提出了减少不平顺、调整和增加线路弹性、设置最小超高、控制涂油润滑、进行钢轨倒换、提高钢轨材质及施行钢轨打磨等11类减缓波磨的措施。

现场观测试验段的数据表明，本文所提出的大部分减缓措施切实可行并富有成效。从而初步验证了本文建立的波磨成因理论的正确性。

[关键词] 钢轨波形磨耗，轮轨系统动力学，粘滑振动，磨耗功，成因，预防
减缓措施

Study on the Formation Mechanism of Rail Corrugations

Liu Xue-yi

(Railway and Road Engineering Department
of South West Jiaotong University, Chengdu 610031)

Abstract

In the beginning of this dissertation, comprehensive summary, classification and discussion are made on the existing theories about the formation mechanism of rail corrugations. Some defects are found out and the approach to improve is envisaged.

The characteristics and regularities in the formation and development of wear corrugations are summed up according to the detailed field investigation and measurement, with the classification of corrugations adjusted and a new type of corrugations added in.

A non-linear, space-coupling, and time-dependent vibration model of wheel/rail system is built up, in which the vertical and lateral vibrations of the whole system as well as the bend and torsion vibrations of wheelsets are all taken into account. In this model, various space-coupling relationships and many nonlinear factors are successfully treated. The finite element and infinite element method are simultaneously applied in the track to make the boundary effect disappeared. And the scopes of application are rationally marked out for the related vibration models. This space-coupling model has been verified to have adequate validity not only in causing the corrugations but also in all the cases where the space-coupling vibrations are to be considered.

By studying the space-coupling vibrations of wheel/rail system and combining the existing theories of vertical system vibration, wheelset bend vibration, wheelset torsion vibration and the theory of wear work, a new theory for the formation mechanism of corrugations is proposed, which is described as 'wheelset slip-stick vibrations - wear work oscillations - wear corrugations'. The new theory covers most of the existing dynamic theories and can

explain much more corrugation phenomena, which indicates a great step forward in the research of formation mechanism of rail corrugations.

The manifold vibration states are systematically studied when the parameters in the wheel/rail system vary over wide ranges. Three criteria for wheelset slip-stick vibrations are developed based on the general frictional vibration. Under some conditions, the three forms of vibrations, that is, system vertical vibration, wheelset bend vibration and wheelset torsion vibration, may form a circulative self-induced vibration system in view of the cross excitation. It is discovered for the first time that the slip-stick vibrations may appear in more than one kind of states, for one or another of the three vibrations is excited more severely. And one kind of slip-stick vibration is associated with one group of corrugation characteristics. Four kinds of slip-stick vibrations are described in detail. Some typical parameter groups are enumerated under which the wheelset slip-stick vibrations happen.

It is considered that the formation mechanism of long pitch wear corrugations is the duplication and accumulation of uneven wear of rail tread during the course of wheelset slip-stick vibrations. Four necessary conditions are given, in which the track irregularities, predominance of some train speed and predominance of some train type are regarded as the main causes that excite, strengthen and normalize the slip-stick vibration and make the uneven wear into corrugations. Various processes are described for the formation and development of corrugations.

There exists a critical curve radius for the long pitch wear corrugations. If the curve radii are larger than the critical value, the corrugations are supposed not to occur. On sharp curves, the corrugations are mainly caused by the freight trains of lower speeds. And on the flat curves, the effects of locomotives increase. There are no conditions for the long pitch wear corrugations forming and developing in the straight track.

The influences of eighteen factors to corrugations are emphatically analyzed such as track irregularities, train braking, axle stiffness of wheelsets, suspension damping, elasticity and damping of track. Three kinds of precautionary measures are

suggested, for example, by modifying the characteristic of creep force to eliminate slip-stick vibration, by dispersing train speeds to avoid the accumulation of uneven wear. Eleven kinds of measures for retarding corrugations are recommended, such as reducing track irregularities, adjusting and increasing track elasticity, setting up minimum superelevation, controlling oil lubrication, replacing corrugated rails from curves to straight track, increasing rail wearability and practising rail grinding.

Data from the field experiments show that most of the retarding measures are practicable and rather effective. The theory for the formation mechanism of corrugations has primarily been testified.

[Keywords] rail corrugation, wheel/rail system dynamics, slip-stick vibration, wear work, formation mechanism, precautionary and retarding measures

目 录

第一章 钢轨波形磨耗研究资料综述.....	1
§ 1.1 概述.....	1
§ 1.2 波磨成因理论及分类.....	4
§ 1.2.1 动力类成因理论.....	5
§ 1.2.2 非动力类成因理论.....	10
§ 1.3 关于波磨成因理论的讨论.....	13
§ 1.4 本文进一步研究波磨成因的思路.....	15
第二章 钢轨波磨特征及发生规律.....	17
§ 2.1 波磨多发地段的线路及运营特点.....	17
§ 2.2 波磨的发生特点.....	17
§ 2.3 波磨的表面特征.....	19
§ 2.4 波磨与曲线半径的关系.....	22
§ 2.5 木枕地段与混凝土枕地段的波磨比较.....	24
§ 2.6 其它情况.....	25
§ 2.7 调查结论.....	26
§ 2.8 关于波磨特征的讨论.....	26
第三章 轮轨非线性空间耦合振动模型.....	29
§ 3.1 轮轨系统动力分析研究概述.....	29
§ 3.2 建模思路及振动模型.....	30
§ 3.3 坐标及符号说明.....	40
§ 3.4 钢轨梁的有限单元和无限单元.....	42
§ 3.4.1 钢轨梁有限单元的单元矩阵.....	43
§ 3.4.2 钢轨梁无限单元的单元矩阵.....	46
§ 3.5 系统动能、弹性势能的一阶变分及阻尼力虚功.....	51
§ 3.6 蠕滑力虚功.....	56
§ 3.7 轮轨系统中其它各种力的虚功.....	61
第四章 模型的求解与校验.....	65
§ 4.1 振动方程的求解方法.....	65
§ 4.2 程序编制.....	69
§ 4.3 计算参数选择.....	73
§ 4.4 移动模型与定点模型比较.....	77
§ 4.5 本文模型与稳态曲线通过模型比较.....	79
§ 4.6 本文模型与单边模型比较.....	79

§ 4.7 计算模型边界条件影响.....	81
§ 4.8 本文模型计算结果与实测数据比较.....	82
第五章 轮对粘滑振动及其形成条件.....	83
§ 5.1 轮对粘滑振动的概念及比拟分析.....	83
§ 5.2 曲线地段轮对的粘滑振动.....	87
§ 5.3 曲线地段轮对的其它振动形式.....	100
§ 5.4 轮对弯曲和扭转振动在形成粘滑振动中的作用.....	105
§ 5.5 控制轮对粘滑振动形成的因素.....	106
§ 5.6 轮对发生粘滑振动时的参数组合.....	109
第六章 钢轨波磨的形成及发展.....	112
§ 6.1 波磨形成和发展的必要条件—轨道不平顺.....	112
§ 6.2 波磨形成及发展的必要条件—某一车速占优势.....	118
§ 6.3 波磨形成及发展的必要条件—某种车型占优势.....	122
§ 6.4 波磨发展速率与既有波深的关系.....	123
§ 6.5 长波和中长波磨耗的成因及发展过程.....	126
第七章 影响波磨的因素及预防减缓措施.....	128
§ 7.1 轨道弹性和阻尼.....	128
§ 7.2 走行部构造特性对波磨的影响.....	134
§ 7.3 曲线半径的影响.....	136
§ 7.4 关于波磨影响因素的总结.....	138
§ 7.5 波磨的预防减缓措施.....	140
§ 7.5.1 波磨的预防措施.....	140
§ 7.5.2 波磨的减缓措施.....	141
§ 7.5.3 波磨减缓措施的实施效果.....	145
第八章 结论.....	147
§ 8.1 本文的主要工作及特点.....	147
§ 8.2 主要研究结论.....	148
致谢.....	152
主要参考文献.....	153

第一章 钢轨波形磨耗研究资料综述

§ 1.1 概 述

1. 波磨的现象及定义

滚滑接触表面，如铁路钢轨和车轮表面、公路路面及滚滑接触的机械零件表面，经常出现一种不均匀的表面波状变形现象，这种波状变形（不均匀磨损、不均匀塑性变形、或两者的综合效应）称之为波形磨耗（corrugations），简称波磨。

公路路面上的“搓板”是容易注意到的波形变形现象之一。研究表明 [21] [80] [123]，这种“搓板”现象是由重载汽车制动、路面热稳定性差的结构层产生滑动等原因造成的。往往以单个不平顺开始，逐渐发展成一连串的波形，波谷处表面撕裂，致使路面损坏。

滚滑接触的机械零件表面，如轴承、齿轮等，以及切削加工件的表面也经常出现波形磨耗，其主要形成原因 [101] 是机械的颤振效应。

钢轨波形磨耗，指轨头顶面或侧面波浪形不均匀的磨损或塑性变形 [135]，有关其成因、影响因素及预防减缓措施等是本文研究的对象。

2. 钢轨波磨的分类

通常依据波长将钢轨波磨划分为两大类 [76] [82]：波长在 30~80mm、波深 0.1~0.5mm 的波磨称为短波磨耗，又称波纹磨耗或响轨（roaring rail）；波长 150~600mm 及以上、波深 0.5~5mm 的波磨称为长波磨耗，又称波浪磨耗（rail corrugations）。

① 短波磨耗

国际铁路联盟（UIC）颁布的关于钢轨损伤和断裂、铁路维修业务备忘录中，短波磨耗的编号为 2201，特性说明如下：

2201. 1：钢轨轨面上光亮的波峰和黑暗的波谷规则地排列着，波峰间距约 30~80mm；

2201. 2：某些电气化铁道上，轨面波峰和波谷几乎都是光亮的。

② 长波磨耗

UIC 对编号为 2202 的长波磨耗特性说明如下：

钢轨表面上波浪界线分明但不规则、不均匀。波峰间距一般在 250~1500mm 之间变化，个别的还要长些，波峰与波谷有均匀的光泽。

关于波磨的波长成分，文献中存在相反的两种观点，有的认为波磨波长是随机的 [117]，也有认为波长是有限个波长的混合 [23] [93]。

两类波磨的外观、发生发展特点存在差别，一般认为它们的形成机理也不相同^[82]，许多文献将两类波磨分别予以研究，但也有人认为两类波磨的成因没有本质的区别^[103]。

此外，本文为了叙述方便，参照各种文献中对波磨特征的描述，依据波磨形成和发展过程中，轨头是磨损还是塑性变形，将钢轨波磨分为三类。即：

- (1) 磨损型波磨：波磨主要成分是轨头不均匀磨损。
- (2) 塑流型波磨：波磨主要成分是轨头不均匀塑性变形。
- (3) 混合型波磨：波磨成分是轨头不均匀磨损和不均匀塑性变形。

3. 波磨出现的普遍性

1892年，在印度铁路上首先发现钢轨波磨现象，随后，世界各国铁路相继发现波磨。1958年，马德里国际铁路会议指出，波磨轨总延长约占整个路网的20%。二战后西德铁路对高速行车地段的统计表明，S49型钢轨发生波磨病害高达40%^[135]。

前苏联、美国、德国、英国、日本、法国、印度、澳大利亚、加拿大、南非以及中国等，几乎世界所有的主要铁路线上都不同程度地发生过波磨。随着行车速度和轴重增加，波磨轨出现更加普遍和频繁。因此波磨是世界铁路所关注的问题，也是一个世界性难题^[116]。

我国大约六十年代发现波磨钢轨，七十年代后，发展迅速且分布广泛。据不完全统计，在石太、丰沙、京广、京九、沪杭、陇海、宝成、宝兰、成昆、成渝、贵昆、广深等线上的一些区段及北京地铁上，都曾发生过不同程度的钢轨波磨。尤其在运煤专线上，如石太、丰沙线，极为普遍和严重。不仅43kg/m轨、50kg/m轨发生波磨，而且60kg/m轨上波磨有增无减，可以预见，正在试铺的75kg/m轨也无法摆脱波磨的侵扰。

4. 波磨发生的特点及影响因素

波形磨耗主要出现在重载运输线上，尤其在运煤运矿专线上特别严重，在高速客运专线上也不同程度的发生，城市地铁上也较为普遍。

列车速度较高的铁路上（如西德、法国等），主要发生短波磨耗，且主要出现在直线和制动地段。在车速较低的重载运输线（如加拿大、澳大利亚、南非的矿山铁路及我国的重载铁路）上主要发生长波磨耗，且一般在曲线地段^{[67][94]}。

影响钢轨波磨发生发展的因素很多，涉及到钢轨材质、线路及机车车辆条件等多个方面，例如^{[76][135]}：

① 波磨形成明显地与钢轨材质和冶炼方法有关。如碱性转炉钢轨，硬化的索氏体易于出现波磨（占波磨轨的50.7%），而平炉钢轨则较少产生波磨（占波磨轨的29.6%）。

② 钢轨的化学成分有较大影响，锰和硅可能推迟波纹的出现，而氮则会促进波纹的出现。

③ 经辊式矫直的钢轨，因残余应力的影响，易出现波磨。经加热至600°C热处理后的钢轨，残余应力被释放不易形成波磨。

④ 重型钢轨比轻型钢轨易出现波磨。

⑤ 线路纵坡较大、曲线半径较小、道床脏污板结及路基刚度较大的地段易产生波磨。

⑥ 大轴重及电力牵引会加速波磨形成。

对各种影响因素的作回归分析，发现波磨的成因中：钢轨化学成分约占15~20%，钢轨热处理方法约占15%，运营条件约占30%。

5. 波磨的危害

钢轨波磨致使轮轨系统剧烈振动，急剧缩短机车车辆和轨道部件使用寿命，显著地增加运营投入，明显地降低行车舒适度，严重时危及行车安全 [3] [66]。

① 加剧轮轨系统各种振动，致使轨道及机车车辆各部件承受过大的动载荷，显著缩短轨道和机车车辆部件的使用寿命。如许多地段上钢轨3~5年就因波磨到限下道，波磨严重地段，钢轨使用1~2年就因波磨到限而换下，使用寿命降低了6~9倍。

② 波磨轨道造成的振动降低了旅客的乘坐舒适度，深度超过一定量值时，还会给行车安全造成威胁。

③ 增加运营投入。波磨缩短了换轨周期，增加了更换钢轨的费用。轮轨剧烈振动造成扣件松动、轨枕开裂、道床粉化坍塌与板结，加速路基翻浆冒泥，加快了走行部零部件破损，增加了大量的养护维修费用。此外波磨增大列车运行阻力 [22]，一方面增大能耗，另一方面影响行车速度和牵引重量。

6. 波磨的研究历史及现状

1895年，B. L. Baldwin在其论文^[135]中最先谈到波磨问题。一个多世纪以来，国内外许多专家学者对波磨成因进行了广泛的研究，掀起了一个又一个波磨研究高潮。波磨发现初期出现了一个研究高潮，但人们很快认识到，其成因并不如想象的那样简单，从而转入对波磨整治措施的研究。50年代研制出了钢轨打磨车对波磨进行打磨，人们一度乐观地认为波磨问题已得到圆满解决。但随着铁路运输向高速重载发展，波磨问题越来越严重，打磨费用也越来越高。许多地段波磨在打磨后2~3个月内又重新出现，人们开始怀疑打磨的有效性，意识到只有找到波磨成因以图预防才是根本的出路。于是在80年代初又出现了波磨的研究高潮，到90年代这一高潮有增无减。世界范围内研究者们表现出顽强攻克波磨难题的势头，有关的研究文献浩如烟海，提出了数十种波磨成因的解释，涉及到系统动力学、材料微观组织和性能、材料的塑性变形过程、残余

应力、磨耗特性、以及钢轨内部的振动波和超声波的传递特性等诸多领域。

国内自80年代初开始系统地研究钢轨波磨问题，在十多年的研过程中，进行了大量前期探索，积累了较丰富的现场观测数据，吸收了国外的研究成果并有一定的发展。在轮轨接触共振、轮对扭转张弛振动、轮对弯曲张弛振动、轨头塑性变形及磨耗特性等方面进行了大量的理论研究和试验工作。

但因波磨问题的复杂性，关于其成因，迄今尚未取得共识。由于在有效预防波磨的措施方面未取得突破性进展，因此离波磨成因问题的解决还相去甚远。但这些大量的研究提供了众多的成果，为更深入一步研究波磨成因及预防减缓措施提供了良好的基础。

§ 1.2 波磨成因理论及分类

关于钢轨波磨形成和发展的机理有数十种解释，其中部分解释有一定的理论依据，也有一些解释尚处于推测阶段，为叙述方便，本文中统称为波磨成因理论。波磨成因理论归结起来大致可分为两类，第一类称为动力类成因理论，波磨是由振动引起的；第二类称为非动力类成因理论，波磨成因归结于冶金或材质性能、应力及变形特性等。

动力类成因理论认为，轮轨作用力因振动而出现波动，在一定条件下钢轨就会产生波磨，波磨可能是不均匀磨耗、不均匀塑性变形或两种成分的混合。而非动力类成因理论则认为，即使轮轨作用力为常值，也会因为不均匀塑性变形及磨损等原因形成波磨^[134]。

动力类成因理论又可分为自激振动、共振和反馈振动三类。顾名思义，自激振动理论注重轮轨系统中的自激因素、振动形式和形成条件，将它与波磨联系起来，解释波磨的成因。波磨的形成和发展受同一振动形式控制，波磨的发展程度对自激振动强度和波磨发展速率影响不大。所谓反馈振动，是指在重复荷载条件下，振动逐步加强的激化过程。由“不平顺—振动—更大的不平顺—更强的振动”构成波磨形成及发展的恶性循环，波磨越严重，其发展速率越大。而共振理论则注重分析轮轨系统中周期性变化的因素对振动和波磨形成的影响。对于一种振动形式，当满足自激振动条件时表现为自激振动；当存在周期性因素激扰时可发生共振；既满足自激条件又受周期激扰时，仍表现为自激振动，周期激扰提供振动能量并激化自激振动；既不满足自激条件又无周期激扰时，表现为反馈振动。

在对波磨波长的看法上，动力类与非动力类存在明显的差异。动力类一般认为，波磨的波长决定于振动特性，是有限个波长的混合，与轮轨系统中某一种或几种振动形式相关。解释波磨成因时，也总是从实际波磨波长分析出发，寻找与之对应的振动形式。而非动力类一般认为，波磨的波长是随机分布的。

依据上述分类思路，可将现有波磨成因理论归纳如下：

动力类成因理论:

- 轮轨接触共振理论（共振、反馈）
- 轮轨系统垂向振动理论（反馈、共振）
- 轮对横向振动理论（共振、自激）
- 轮对振动 { 轮对弯曲振动理论（自激、反馈）
 { 轮对扭转振动理论（自激、反馈）
- 磨耗功波动理论（自激、反馈、共振）
- 声波效应理论（共振）

非动力类成因理论:

- 钢轨冶金性能理论
- 残余应力理论
- 不均匀磨损及锈蚀理论
- 不均匀塑流理论
- 接触疲劳理论
- 应力限值理论
- 轮轨廓形匹配理论

§ 1.2.1 动力类成因理论**1. K. L. Johnson的接触共振理论 [51] [74] [137]**

1957年，英国学者Johnson等通过圆盘试验机和计算机模拟对波磨所进行的研究表明：接触共振使滚动体表面产生波磨。在低阻尼高负荷情况下，共振使圆盘表面产生塑性变形（共振），并在下一次滚动时激起更大幅度的振动（反馈），形成塑流型波磨。当接触应力较小而有一定相对滑动时，由不均匀磨损造成磨损型波磨。

当黄铜圆盘与钢质圆盘接触滚动时，只要表面存在不平顺，就会发展成波磨。而对于两铜质圆盘相匹配的情况，则需要有一定的相对滑动方能产生波磨。说明波磨的生成与两圆盘的硬度匹配有关。

波磨来源于表面上存在的单个不平顺或随机表面粗糙度，其形成为一渐进过程。单个不平顺使系统受瞬时激振，足够大的振幅在激振点前方造成一系列衰减的塑性压痕，其间距取决于接触共振频率。在随机粗糙表面情况下，系统对粗糙度频谱中接近接触共振频率的部分产生放大作用，接触共振使特定的波长得到加强，在下一次载荷通过时激化更强的振动，从而逐渐形成波磨。

影响波磨生成的主要因素是载荷、阻尼和表面粗糙度。如阻尼系数 $\zeta < 0.02$ ，任何载荷下都会产生波磨；如 $\zeta \approx 0.1$ ，载荷接近屈服限才会产生波磨；如 $\zeta > 0.1$ ，则任何载荷下都不会产生波磨；在 $\zeta < 0.1$ 的范围内，表面再光滑也不可能完全消除波磨。增加系统的阻尼、减小接触压力及改变弹性可有

效减缓波磨。改变圆盘滚动速度和滚动方向可使已有波磨消失，但会出现波长不同的新的波磨。

很明显，接触共振理论具有共振和反馈振动两重特性。对于单个不平顺激振，属反馈振动；对于随机表面粗糙度激振，具有共振特性。

接触共振理论的实验依据来源于圆盘机实验，但这类实验因存在两种缺陷使其说服力大为削弱。首先，两圆盘接触滚动的过程中，圆盘周边上各点的受力条件具有良好的重复性，线路上的钢轨受力在每一次列车通过时却不一定有重复性；其次，圆盘实验机中存在有规律的机械颤振，这种颤振可能影响波磨的形成。

2. 轮轨系统垂向振动理论

轮轨系统垂向振动成波理论在各种文献中的提法有一些差别，但要点是相同或相似的，下面列出其中的几种提法。

(1) 轮轨系统垂向共振理论^{[11] [22] [93] [94] [95]}

该理论认为：轮轨系统垂向共振是长波磨耗成因中一个不可忽略的因素。钢轨表面存在波长随机分布的不平顺，垂向共振将与垂向振动固有频率相对应的波长成分放大，逐渐滤掉与固有频率相差较大的波长成分，随机不平顺的带宽逐渐减小，与固有频率相对应的波长最终占据优势，垂向振动被激化。波磨的统计波长与垂向共振频率、车速存在对应关系，波磨是由于相同的列车以相同的速度行驶，由共振产生的轮轨振动附加力导致轨头表面塑性变形造成的，且曲线和直线上波磨成因相同。波磨形成的必要条件是系统垂向共振和轨头塑性变形。认为轨道阻尼已不可能再加大，因而预防减缓波磨的措施是提高钢轨屈服极限。

(2) Y. Suda 轮轨系统垂向“自激”振动理论^{[129] [130]}

该理论认为，波磨的形成可分成两个阶段，第一阶段是波磨的产生，第二阶段是波磨的发展。波磨的产生是随机振动所引起的钢轨表面塑性变形的结果，而波磨的发展却与波磨频率和轮轨系统垂向振动的固有频率有关，只有当既有波磨的激振频率小于系统的共振频率时波磨才会发展，反之就不会发展。

这实际上是一个反馈振动成波模型，所谓的“自激”是波磨发展中的一个渐进过程，已存在的波磨是波磨进一步发展时激发振动的原因，并不是真正的自激振动。

试验研究表明：随着波深增加，波磨向前移动，波长增加。

预防波磨可以从两个方面着手。一是预防波磨产生，减小轨面原始不平顺、增大系统阻尼等。二是预防波磨发展，根据存在的波磨波长，选择适当的车速和系统的固有频率来消除波磨，有效的办法是提高车速，但这又会产生新的波磨。综合来看，减缓波磨最有效的办法是提高系统阻尼。

(3) 钢轨表面原始不平顺理论^[135]

这是一个与垂向“自激”理论相类似的理论，只是将波磨产生的过程代之以钢轨表面存在的原始不平顺。

前苏联、英、美等国均提出：钢轨上道时轨面存在几何不平顺，车轮经过时产生附加力作用，使轨面产生塑性变形积累，形成波磨（长波）。特别是当同一类型的机车车辆以同样速度通过不平顺时，振动对既定钢轨点的重复作用促成波磨。

(4) 轮轨系统高频振动理论^{[1] [48] [144]}

该理论认为：轮轨系统的高频振动是钢轨波纹磨耗的成因。

波磨是车轮/轨道系统高频（钢轨的Pined-pined频率附近）瞬态振动作用下磨耗过程的反馈效应。轨头表面的原始不平顺激起高频振动，又反过来影响轨头表面形状，当一定数量的车轮通过后，某些波长的不平顺被过滤，最后形成了波磨。波磨主要依赖于钢轨原始不平顺，是间断支承轨道 - 车轮系统共振峰值的直接反应。采用连续支承轨道可消除共振峰值，预防波磨的形成。

(5) 轨枕弯曲振动理论^[57]

该理论认为，波磨波长与轨枕弯曲振动频率有密切联系，波磨是由于轨枕的弯曲振动产生的。Clark^[85]等分析了轨道中0~3000Hz的各种振动，结果指出，列车速度对轨枕振动的影响较大，轨枕低频共振时，枕端位移可达到激振幅度的3~4倍，轨枕振动对道床的危害和对波磨形成的作用都是值得注意的。波长与枕间距无关，但却与轨枕类型有关的现象支持这一理论。

轨枕的一次弯曲共振频率即轮轨系统同向共振频率。木枕的二次弯曲共振频率在500Hz以上，混凝土枕的弯曲共振频率更高，对长波磨耗的影响较小。

3. 轮对振动理论

(1) R. A. Clark 轮对横向振动理论^{[82~87] [96]}

该理论认为：刚性或伴有一次轴弯曲振动的轮对，运行于间断支承的钢轨上，由于曲线轨道横向和垂向弹性不均匀，在一定车速下轮对发生横向共振或次共振，发生共振的车轮枕间通过频率约为15~30Hz。共振或次共振时，可产生长波磨耗，也可产生短波磨耗，取决于蠕滑力特性曲线。不同钢种对波磨的敏感性不同，文中推断为钢轨冶金性能对蠕滑力曲线的影响。蠕滑力饱和后如没有负斜率段，则轮对横向共振或次共振产生长波磨耗（长波模型、共振）。蠕滑力饱和后如出现负斜率段，轮对产生横向张弛振动（短波模型、自激振动）。内轨与车轮间的相对横移曲线上，于波峰处迭加有高频成分。轨枕附近因轮轨相对滑动速度加剧而出现高磨损区，从而形成波磨，波长为轨枕间距的分数或整数倍。

直线轨道上，因同一轮对上两轮不平行或轮径不同，引起车轮横向蠕滑，同样可形成轮对横向张驰振动，引起波纹磨耗。即所谓的“小提琴模”，轮对相当于弓而钢轨相当于弦。

有效的减缓措施是：加大扣件弹性以降低轨枕间断支承引起的轨道横向刚度不均匀性，减小簧下质量、减小轮对定位刚度及增大悬挂阻尼。此外，文[74]中提到的加密轨枕（将轨枕数量从1310根/公里加大到1965根/公里）对减缓波磨有明显的效果。

(2) 轮对弯曲振动理论^[15~20]

该理论认为：轮轨间的横向蠕滑力波动比纵向蠕滑力大，且更易引起轨头塑性变形，因此轮对弯曲振动是波磨成因中最主要的一个因素。轮对在一阶弯曲固有频率处的振动引起长波磨耗，波长约为160mm；而三阶固有频率处的振动引起短波波磨，波长约为39mm。轮对弯曲振动可表现为自激振动，也可表现为反馈振动，两种振动形式都可能产生波磨。曲线轨道上由于横向作用力较大，因此波磨也较严重。减小轨面不平顺、采用刚度尽可能大的轮轴、加大轨道弹性和阻尼、以及采用调整胶垫使内外轨刚度不均匀，将有助于抑制波磨形成。

(4) 轮对扭转振动理论^{[33][114][124]}

该理论属轮对扭转反馈振动。该理论认为：波磨波长同系统的垂向和水平振动频率无密切联系，而与轮对扭转振动的频率相关。同时，以轨面无滑动且无严重磨损迹象否定粘滑振动的存在，认为轮轨间纵横向蠕滑力周期性波动是波磨的成因。从波峰至波谷蠕滑力逐渐加大，轮对扭转是蠕滑力波动的原因。文[124]中还分析了轮对扭转与钢轨纵向的耦合振动情况，认为不平顺和轮径差等引起的轮对扭转与轨道纵向振动是波磨形成的原因。

(5) 轮对扭转张驰振动理论^{[4][116~118][137]}

该理论认为：波磨形成的机理是轮对的扭转自激振动。

轮轨接触面上蠕滑力与蠕滑率的关系通常是非线性的，有正梯度段和负梯度段，分别对应于系统吸收和释放能量，二者达到平衡时可形成稳定的摩擦自激振动，包括近似正弦振动和张弛振动。就轮对而言，车轴作为扭转弹性体，时而储存能量，时而释放能量；与此相对应，轮轨接触面间时而粘着，时而滑动，钢轨踏面出现不均匀滑动，由此形成波磨。波长取决于蠕滑率差所对应的轮周长，约为40mm。波磨较动载荷波动超前一个相位角，通常在0~90°之间，即载荷峰值出现在波峰后，致使波谷磨损（包括塑流）速度较波峰高，峰谷高差加大，波磨加重。

波磨波长呈随机分布，波长在直线及大半径曲线上略短，小半径曲线上略长。长波和短波磨耗具有相同的成因，长波由短波发展而成。在波磨形成过程中，制动起着决定性作用，而在波磨发展过程中，垂向振动的作用逐渐增强。

增加轨下基础的弹性、减小转向架菱形变形，采用不同车轴刚度不同辐板刚度的轮对，使自激振动频率各不相同，将减缓波磨。且支持文[57]和[114]中关于外轨侧涂油可减缓内轨波磨的说法。

文[4]中还采用了单自由度模型考虑了钢轨纵向振动与轮对扭转振动共同作用下的粘滑振动和拟正弦振动。指出在大气潮湿的地段，蠕滑力曲线上易出现负斜率段，自激振动和波磨易于形成。

4. 磨耗功波动理论^{[13][14][41][108]}

该理论认为：波磨不是单一原因、而是多个原因引起的。轮轨间的磨耗功（或摩擦功、蠕滑功）的波动反映了轮轨系统中多种振动形式的综合影响，钢轨磨损速率同磨耗功成正比。对于磨损型波磨，磨耗功的波动是形成波磨的原因。磨耗功大的地方对应波磨波谷，磨耗功小的地方则为波峰。多数短波磨耗及淬火轨上的长波磨耗属于磨损型波磨，可以通过研究轮轨间磨耗功的办法寻找其成因，亦可用磨耗功变化模拟波磨的发展过程。由于磨耗功包含多种振动形式，其中有些是自激振动，有些是反馈振动，因此以磨耗功分析波磨成因的模型是一种包括多种形式和振动性质的综合振动模型。但磨耗功理论难以解释塑流型波磨的成因。

文[13][14]中发展了一个线性模型，适用于小半径曲线上轮轨间总处于滑动的运行状态。先将转向架在曲线上的运动简化为准静态的，求解出稳态的轮对横移量和轮轨冲角。然后在不考虑轮轨系统横向和纵向振动的情况下，分析在轮轨垂向振动、轮对扭转和轮对弯曲三种振动形式共同作用下，磨耗功的变化规律。求出磨耗功与轨面垂向不平顺间的传递函数，在频域内作出磨耗功的图形，分析振动特性与轨面不平顺间的对应关系。结果认为50~80Hz的轮对扭转和弯曲振动是形成波磨的根源，这种扭转和弯曲振动将轨面原始不平顺中对应的波长逐渐放大，最后形成波磨。

5. 声波效应

(1) Krabbendan驻波理论^[103]

该理论认为：轮重使钢轨产生垂向振动，并以很高的频率沿钢轨纵向传播，返回后形成驻波，钢轨与车轮的锤击作用使波磨形成。驻波波长86mm，频率35KHz。

(2) 车轮弯曲弹性波理论^[84]

波长30~70mm的波磨与车轮轮箍弯曲振动有关，该振动形成两种弯曲波沿轮周传播，一种波沿车轮旋转方向，另一种波以相似频率逆车轮旋转方向，两种波频率的差异引起车轮对钢轨的锤击。频率差异与车速成正比，某一车速时，锤击频率与轮轴弯曲振动的固有频率相同，产生共振。一定的线路条件下，若某种车轮经常发生这种共振，就会出现波磨。

(3) K. Werner表面超声波理论^[53]

钢轨表面的波磨有两个重要特征：1) 表面出现密集的疲劳斑点的同时，出现周期分布的体积为疲劳斑点的3~4倍的方形凹坑，并逐渐发展成波磨；2) 表面存在平行的几列而非一列波形。由于钢轨及车轮表面存在密集的超声波

场，超声波的传播、反射及重复经过接触区引起轮轨接触表面沿双向的拍打，形成与超声波场相似的波磨。

§ 1.2.2 非动力类成因理论

1. F. Birmann的钢轨冶金性能理论^[117]

F. Birmann发现，当钢轨受到列车作用发生振动时，振动波形上的两个波幅的间隔和钢轨波磨波峰（或波谷）的间隔没有明显的相关性。如果波磨是由振动引起的话，那么每根钢轨迟早都会出现波磨，但从现场调查情况看，转炉钢比平炉钢更容易出现波磨，由此，Birmann认为，材质具有明显的作用，振动只对波磨的形成起促进作用。

2. J. Eisenmann的残余应力理论^[38]

J. Eisenmann认为：钢轨在生产过程中形成残余应力，在列车荷载下残余应力发生变化，轨头表层逐渐形成三向残余压应力场。残余应力量值对轮载作用次数具有累加效应，据测试，轨头表面下2mm处的纵向残余应力可达到600~800MPa。轨头边缘附近区域产生局部的塑性流动，因塑流区两侧的纵向压力、塑流区下方的有效残余压应力以及材料的粘弹性效应，在车轮滚过瞬间，轨头塑流区凸起，形成波磨的波峰，同时波峰附近发生残余应力放散，出现波谷。

在波磨形成以后，车轮只与波峰相接触，形成黑白相间典型的波纹磨耗。黑斑相当于波谷，不再接触到车轮。波峰在列车荷载作用下，压缩残余应力随着塑流和硬化的发展急剧增加，在相邻区域纵向压力作用下，波峰波谷高度差（即波深）继续增大，最后稳定在0.2~0.4mm左右。

Eisenmann进行了钢轨的微观结构观察，提出了该理论的试验依据：波峰处钢轨表层很细的马氏体出现破裂，且裂纹宽度随着荷载重复而加大，而波谷处裂纹是闭合的。

塑流区相当于波峰，在一般轮荷载和车轮直径的情况下，隆起部分的长度约为25mm，峰峰间距为50mm，与实际轨道上波纹磨耗的波长范围30~80mm较吻合。

对波磨的有效预防措施：对新钢轨进行打磨，消除残余应力集中区。

我国使用滚轮矫直机矫直钢轨，矫直后确实留下有原始不平顺和较大的残余应力，原始不平顺的波长约2米，广深线上曾出现过波长2.3米的长波磨。美国将新轨用磨轨车研磨一次，对防止波磨起到了极好的效果。说明矫直钢轨留下的波形及残余应力对波磨形成有重要的影响。

3. 不均匀磨损和锈蚀理论

(1) H. G. Feller的磨损及锈蚀理论^[29]

H. G. Feller进行了波磨轨表层分析，认为振动导致不同区域轮载不同，高轮载区域易硬化，产生较高的强度和抗磨能力，形成“波峰”，低轮载区域硬化较小，出现较低的强度和抗磨能力，形成“波谷”。

波磨出现初期，波谷是由磨损引起的，而后锈蚀起着主要作用。锈蚀产生的铁氧化物被钢轨踏面的振动带走，使波谷加深，从而产生进一步的锈蚀。

表面“白层”不是马氏体，而是细粒渗碳体，波峰渗碳体晶粒细化，硬度强度增大，支持大约90%的轮载。粗略估计，峰与峰的间距约为35mm。

(2) L. E. Daniels的液体动力磨损理论^[117]

该理论认为，水和油等液体浸入轨面的毛细裂纹，在车轮高压下形成剥离，而后发展成波磨。

(3) Turner的车轮跳动理论^[84]

Turner认为，钢轨波磨起因于车轮在钢轨上的跳动。与车轮相接触的点上，钢轨受到冷加工而硬化且较为干燥，未接触的地方较软且较潮湿，较软且较潮湿处比硬的干燥处容易生锈，便形成了波磨的波谷。他提出车轮直径的均匀度、制动作用及钢轨的化学成分是影响波磨的几个因素。

4. 不均匀塑性变形理论

(1) 塑性压溃理论

普碳钢轨波磨的波谷位置有明显的飞边、压宽等变形现象，而波峰处塑性变形相对较小。经波峰、谷处钢轨表面及内部金相组织观察比较，波谷处金相变形量大，晶粒的碎细程度大，位错密度高，硬度值高^[66]。由于轮轨间切向力作用降低了钢轨的安定极限，列车荷载的最大接触应力瞬时超过安定极限而产生塑性变形压痕，随着变形的累积而形成波磨。

我国鞍钢钢轨的拉伸强度和屈服极限比攀钢钢轨等要高，这是攀钢钢轨易发生波磨的原因^[66]。碱性转炉中熔炼的钢比平炉钢更易出现脆性非金属夹杂物，破坏了金属的连续性，降低了钢轨强度，这是碱性转炉钢更易出现波磨的原因。

因此钢轨的强度在波磨形成中起着重要的作用，提高钢轨强度、降低切向力和法向力是减缓波磨的根本措施。

R. I. Mair^[95]也认为：长波波磨发展的必要条件是：大的塑性变形和轮轨共振。直线与曲线轨道上波磨的成因是一样的，曲线上波磨是由于较大的接触应力而引起的塑性变形，直线上波磨首先出现于钢轨材质的薄弱处。因此，减轻轮轨荷载或加大钢轨强度将有助于抑制波磨发展。

波磨轨的形成中，磨损和塑性变形都可能起到重要作用。我国波磨轨中相当一部分还出现在淬火轨上，且淬火轨在防止及减缓波磨方面并未显出比普碳轨有多大优势。相反，有人认为强度、硬度低，延性、韧性好的钢轨不易出现波磨^[76]。

(2) 塑性鼓包理论^[138]

该理论认为：在轮轨间法向接触应力、轨头内压应力、残余压应力和轮轨间的摩擦力联合作用下，使轨头内最大塑性区向前上方运动。一方面，轨头内部材料向两边挤动，由于旧轨轨头边缘约束区较小，轨头被压宽，形成波谷；另一方面，轨头内部材料沿纵向蠕动，晶体位错向前移动，位错密度增加，蓄积内能，当内能蓄积到一定程度时，材料被加工硬化，强度提高，可支持车轮通过包顶，形成波峰^[139]。

该理论认为波磨产生是轮轨接触点上的力和负蠕滑率的联合作用，波磨呈锯齿状，波峰位置随运营时间向前移动，迎车面坡缓于送车面坡，波长与行车速度成正比。

5. J. Kalousek接触疲劳理论^[42]

J. Kalousek认为：波磨是由随机的踏面摩擦力及钢轨表面疲劳裂纹引起的不均匀磨损所造成的。表面热处理后的钢轨，自然磨损速率减小，而接触疲劳机率增加。重复荷载作用下，轨头亚表层剪应力与硬度比值最大处首先出现剪切疲劳裂纹，而后扩展至钢轨表面。裂纹密集处磨损加大，形成凹坑，即为波磨的波谷。

液态脏物渗入裂纹，在车轮压力下于裂纹尖端处形成三向静水压力，加速裂纹扩展，裂纹密集处始终密集，波磨的峰谷位置被固定下来。

可采用适当增大自然磨损率、降低接触应力等措施减缓波磨。

6. M. Srinivasan应力限值理论^[74]

该理论来源于圆盘实验机的结果，波磨仅在剪应力（222.6~258 MPa）及压应力（742~860MPa）处于一定范围时产生，高于或低于这个应力范围，波磨都不会产生。

另一篇文章也指出^[61]，当轮轨接触应力比安定极限大很多时，发生连续的塑性变形和压溃，不易产生波磨；当接触应力比安定极限小很多时，也不易产生波磨；只有当接触应力比安定极限小且又比较接近时，如果由于某种原因使轮轨系统振动受到激励，例如接触共振，使钢轨多次周期性过载，那么轨头表层将产生间断性的塑性变形点，这就是塑流型波磨的开始。

7. 轮轨廓形匹配理论^[43]

该理论认为：轮轨踏面间的良好吻合是波磨发生的一个重要原因。

J. Kalousek和K. L. Johnson在研究加拿大温哥华客运线上的钢轨波磨后指出：提高轨道质量（如减少轨距误差），改进车辆性能（如引进自导向转向架），反而会有助于波磨的形成。因为它们使车轮每次都与轨头某一部位接触，轨头磨耗后与车轮踏面形成良好的吻合面。这种良好的吻合接触使轮轨接区为一长椭圆，由于旋转蠕滑的作用，促使轮对粘滑振动形成，在接触面上形成间隔均匀的横向磨损，触发波磨的发生。

在轮轨踏面上使用一种特制的固体润滑剂，以改变轮轨蠕滑力特性曲线，使得轮轨间出现滑动时，蠕滑力不是降低而是提高，可有效抑制粘滑振动和波磨的形成。

在发表的众多研究文献中，波磨的成因往往同时包含上述所列的几种成因理论，本文为叙述方便，将一些典型的文章选出并进行归类，还有一大批文献无法分类，但提出的观点基本上已包含在上列各种理论中，不再逐一叙述。

§ 1.3 关于波磨成因理论的讨论

波磨的非动力成因理论中，许多理论只能用于解释短波磨耗的成因，如残余应力理论、塑性鼓包理论、驻波、弹性波及超声波理论等。短波磨耗对道床和路基的影响不很显著，且通常不是换轨的控制因素。短波磨耗的主要问题，在于激发轮轨接触区局部的高频振动，形成噪音污染。只有当噪音成为主要问题、需要进行控制的情况下，预防及减缓短波磨耗才成为迫切的问题。短波磨耗在我国铁路上并不普遍，因此不是本文所要研究的重点。

非动力成因理论中，有一些观点令人费解，如车轮跳动理论和轨面锈蚀理论。但由于没有见到过这类波磨（短波纹），其说法是否成立，很难从研究资料中进行推断。

此外，非动力类成因理论中，有些理论是对波磨形成的具体过程所进行的描述，如不均匀磨损和不均匀塑性变形理论。有些理论是强调波磨的影响因素，如：冶金性能理论强调钢轨材料的冶金性能对波磨形成的影响，接触疲劳和液体动力磨损理论强调疲劳和裂纹在波磨形成中的作用，应力限值理论强调轨头应力值对波磨形成的作用，轮轨廓形匹配理论则着重说明廓形的良好匹配易于诱发轮对横向自激振动。

总的来看，由于非动力类成因理论未涉及到轮轨系统的动力作用，无法解释波磨出现的地段、位置、波长和表面特征的差异，对波磨发展过程的描述也大多不够明确。事实上，波磨一经产生，就激化轮轨系统中的各种振动，波磨是进一步发展还是被抑制，与动力作用不无关系。由于波磨是若干个车轮重复作用的结果，波磨的形成和发展是一个渐进过程，不可能将形成过程和发展过程截然分开，因此，无法解释波磨发展过程的成因理论也就难以成立。况且，非动力类成因所形成的初始不平顺对轮轨振动的影响，未必有轮轨系统中其它不平顺（如钢轨接头、轨面擦伤等）的影响大。可见，单独依靠非动力类成因理论不可能完整地解释波磨，也难以寻找到切实可行的预防减缓措施。正因为如此，研究者们已逐渐将更多的注意力放在了对动力类成因理论的研究上。

从最近几年来关于波磨的研究资料中，已经能够看到动力类成因理论在解决波磨问题中的希望。研究者们的认识已逐渐统一：波磨的成因是轮轨系统中

的振动，短波磨耗对应高频振动，长波磨耗对应低频振动，轮轨系统中的非动力因素的作用，在于加速或延缓波磨的发生发展过程。

在揭示波磨生成和发展的振动条件时，动力类成因理论是必不可少的。要解决如何选择轮轨结构参数才能避免或延缓波磨的问题，就应当进行轮轨系统的振动研究。

但现有动力类成因理论还存在一些问题，主要表现在以下几个方面。

(1) 现有成因理论多数只注重单一的振动形式，忽略了相关振动的影响。如接触振动理论只考虑轮轨接触弹性和局部参振质量；轮对扭转振动和弯曲振动仅分析轮对的振动，对轮轨系统垂向、横向和纵向振动对轮对振动的影响考虑不够；轮对横向共振理论中，只分析了刚性轮对在定值垂向荷载下的横向振动；在轮对扭转和轨道纵向耦合振动模型中，同样将轮轨垂向力视为定值，虽然也从理论上推导了轮轨垂向、纵向及轴扭转的耦合振动求解方程[124]，但并未得到分析结果。

(2) 现有理论在振动自由度的考虑上偏于简单，忽略了许多本不应该忽略的因素。如：只考虑车轮和轨道垂向振动的两自由度模型[130]；考虑刚性轮对横向振动的单自由度模型[82]；考虑单个轮对扭转振动的两自由度模型[4][11]；考虑单个轮对弯曲振动、且将轨道简化为集总质量考虑轨道垂向和横向振动的10自由度模型[20]；在忽略垂向振动的刚性轨道条件下，考虑多个轮对扭转的多轮对扭转振动模型[117]；忽略横向振动下考虑单个轮对扭转、钢轨分别有一个纵向和垂向自由度的模型[124]；以及忽略横向振动，在转向架准静态曲线通过的基础上，考虑单个轮对的扭转和弯曲、双层叠合梁轨道的垂向振动的线性模型[27]。振动模型的过度简化，可以突出问题的本质，在定性分析中能使结论更加明确，但计算结果势必与实际情况差距较远。

(3) 现有理论无法分析轮轨系统中数种振动形式发生耦合且相互激化的情况。轮轨系统中不乏振动频率接近的振动形式，多种振动形式耦合后会发生什么样的情况尚不清楚，因此必须分析可能致使波磨形成的各种振动形式的耦合情况。

(4) 现有理论基本上未涉及轮轨系统中结构参数变化的影响。一般是从理论推导入手，采用简单的模型找到与波磨频率对应的振动形式，就以为万事大吉了。但轮轨参数的离散性很大，如道床弹性，从刚清筛过的道床到严重板结的道床，其弹性系数可相差一个数量级，这种参数大范围变动时情况又如何呢？分析模型的结论未能与实际参数挂上钩，是现有成因理论难以完善解释波磨并有效地指导预防减缓波磨的重要原因。

但值得注意的是，最近发表的有关文献中，已不再研究单一的振动形式。逐步发展到综合研究二至三种相关振动对波磨形成和发展的影响，以轮轨间磨

耗功这一综合参量为研究对象，探讨波磨的成因^[154]。这种研究思路是应当肯定的。但分析模型仍存在上述各种缺陷，考虑因素不够全面、模型偏于简单、没有处理好轮轨系统三向振动的耦合关系、忽略非线性因素以及对参数变化缺乏研究等问题。以致于研究结果不能与实际波磨情况相吻合，或不能反映实际波磨的多样性。

§ 1.4 本文进一步研究波磨成因的思路

钢轨波磨的型式多种多样，发生发展规律和表面特征也不尽相同。从波长区分，有长波磨耗和短波纹；从波磨成分区分，有磨损型、塑流型以及混合型波磨；从发生地段分，有重载货运线波磨、高速客运线波磨和地铁线波磨；从发生位置分，又有曲线与直线、曲线外轨与内轨的不同。另一方面，影响波磨形成及发展的因素众多，几乎涉及到轮轨系统中的所有因素。各研究者依据特定的波磨型式、从不同侧面着手开展研究，因此提出了如前所述的数十种波磨成因理论。

各种条件下出现的不同型式的波磨，其成因可能是不一样的。因此进一步研究波磨成因的正确思路，应当是针对具体的波磨，深入研究其特定成因和影响因素，将波磨成因理论发展到能够具体指导预防和减缓波磨的实用程度。如对于长波磨耗，应当偏重于动力类成因研究；对于磨损型波磨，应当注重对磨耗功的研究；对曲线地段波磨，应当注重轮轨横向和纵向振动研究等。

现有波磨成因理论中，有些理论有一定的试验依据，根据有关研究结果所提出的减缓措施，在实践中也收到了一定成效。但也有些成因理论只是依据某种波磨现象和简单模型的计算结果所进行的推论或假说，尚未形成较完善的理论体系。无论如何，已有的成因理论是进一步研究的基础。

由于波磨成因问题已经过一百多年的研究，研究人员遍布世界各地，研究领域也已涉及到与轮轨系统有关系的所有领域。现有成因理论的覆盖面已相当的宽广。虽然还有新的成因理论不断提出，但多数是对现有理论的发展。且研究思路已逐渐统一。如能在现有成因理论的基础上进一步作工作，则解决波磨成因问题的前景看好。不必一定要开辟新的研究领域，创造出完全不同的成因理论。

因此，关于波磨成因理论的进一步研究工作，应当着眼于完善现有理论，将一些彼此分离的理论联系起来，解决现有成因理论的各种不足，构成更为完善的成因理论。

我国铁路上出现最为普遍的是曲线地段的长波磨耗，且随着重型钢轨的应用，曲线地段逐渐铺设了淬火轨，波磨也由以前的普碳轨上塑流性波磨为主，逐渐转变为以淬火轨上磨损型波磨为主。

因此，本文的研究将针对曲线地段淬火轨上的磨损型波磨，兼顾塑流型波磨。在对现场波磨进行详细调查和测试的基础上，总结出波磨的特征及发生发展规律。结合本章中对现有波磨成因理论的归纳，综合垂向振动、接触共振、轮对横向振动、轮对扭转振动和轮对弯曲振动理论，建立“轮轨系统垂向-横向-轮对扭转和弯曲非线性空间耦合振动时变模型”。分析轮轨磨耗功这一综合参量，寻找波磨的形成原因。研究轮轨系统中各种因素对波磨形成和发展的影响，考察参数变化与波磨型式的对应关系。最后提出波磨的预防减缓措施，总结各种措施在现场观测试验段上的效果，说明这些措施的有效性。

第二章 钢轨波磨特征及发生发展规律

关于波磨的成因如前述之众多，各文献对波磨特征的描述差别极大，对于不同类型的波磨，其成因可能是不一样的，因此研究波磨的成因问题应当针对具体的波磨进行。为此，结合石太线，对波磨进行了全面的现场调查，并对典型地段进行了重点测试。

在重点调查的波磨多发地段上，进行了以下几项观察测试：（1）测量列车速度；（2）用自制波磨测量仪对钢轨波磨进行详细测量；（3）对钢轨波磨的表面特征进行仔细观察；（4）详细记录重点调查地段的线路条件、运营条件及轨道状态。

现将调查中所得到的有关钢轨波磨的表面特征、波磨与线路条件和线路其它病害的关系，以及波磨的发生发展规律等要点归纳于下。

§ 2.1 波磨多发地段的线路及运营特点

1、波磨一般出现在曲线地段

曲线半径越小，波磨出现和发展速率越快。从半径270m至4500m的曲线上都发现波磨，但大半径曲线上波磨的出现时间晚，发展速率慢。半径小于1000m的曲线上波磨较为突出。

直线地段很少出现波磨。

2、制动地段波磨严重

小半径曲线地段，无论列车运行工况如何（牵引、制动、惰行），均产生波磨。半径稍大的曲线地段，波磨出现取决于列车运行工况，制动地段波磨较容易发生，波磨较严重。

3、轨道弹性对波磨的发生发展影响较大。石质路基上波磨较土质路基上严重；波磨地段道床均有不同程度的板结，抬道及道床破底清筛后，波磨情况大为缓和；木枕地段的波磨明显较混凝土枕地段轻微；当钢轨内出现核伤而用夹板加固后，夹板使钢轨刚度加大，波磨极易从夹板处始发（如K25处23号轨）。

§ 2.2 波磨的发生特点

一、波磨分类及发生特点

石太线上波磨按其波长、波磨特征及出现部位不同大致可分为三类。

波纹磨耗：波长小于100mm。

中长波磨耗：波长100~200mm

长波磨耗：波长大于200mm

现将各种波磨的特点及出现情况分别描述如下：

1. 长波磨耗

无论曲线几何参数如何，波长200~700mm的长波磨耗总是出现在曲线外轨上，与文[93]所述情况相似。长波又分为均匀长波和非均匀长波。

(1) 均匀长波：均匀长波的波长和波深都特别均匀，波长约为 $250 \pm 10\text{mm}$ 。一根钢轨上波磨分为三段，第一段始发于前一根钢轨送车端接头内一至两个转向架（货车转向架，下同）长度处，接头两侧波磨的波深和波长无明显差别，接头处无马鞍形磨耗，接头处波深并无明显加深，波磨延伸7~8m后突然消失；第二段始发于内轨接头（错接接头）前方一个转向架长度处，延伸一段后消失；第三段在靠近下一接头处开始。

(2) 非均匀长波

非均匀长波的波长主要分布于200~700mm。对于错接接头，无论接头有无鞍形磨耗，波磨总是从距接头约一个转向架处开始，波长逐渐加长，波深先加深而后变浅，在距接头两个转向架范围内波磨平息而后又开始加深。在正对内轨接头的外轨上，出现波长600~700mm的凹坑，在前方一个转向架距离处出现波磨，少数情况下也有从凹坑直接发展成波磨的。

当钢轨对接时，非均匀长波一般从接头马鞍形磨耗开始，波长渐长，波深先深（马鞍）、后浅、再深、渐浅的发展。

2. 中长波磨耗

个别地段，在缓和曲线（对应的圆曲线半径较小）的外轨上发现波长150mm且波深波长非常均匀的中长波，观察表明，这种中长波的波长不会增大，没有向长波磨耗发展的迹象。

3. 短波磨耗

曲线内轨上出现波长约80mm且波长和波深均匀的短波纹。在石太下行轻车上线上K170及K183等处曲线内轨上发现短波磨耗。对应的曲线外轨有较严重的长波磨耗（波深约1.2mm）。内轨短波纹最大波深不超过0.5m，发展到一定程度后渐趋稳定，目前尚无因波纹而换轨的情况。

短波纹不但在波长上明显不同于长波，在始发症状上也有明显的差异。短波总是在轨条中部始发，随机地出现一个或多个黑色光斑，光斑有两种方向，一种与行车方向垂直，另一种与行车方向约成45度角，随着波磨的发展，45度方向的光斑也逐渐变成垂直于行车方向，最后形成以黑色区域为波谷、光亮区域为波峰的波纹磨耗。

外轨上的部分长波磨耗是由中长波磨耗发展成的。其出现的先兆为明暗相间的光斑，光斑间距约为100~130mm，发亮的是波峰，发暗的是波谷。但外轨长波与内轨短波出现前的光斑有所不同，长波出现前的光斑是波峰和波谷不在同

一平面上造成的反光效果，在远处才可见到，近处观察时，波峰和波谷颜色一样。短波光斑则不一样，近处也可明显地看到发暗的波谷和发亮的波峰，且波谷处有明显的车轮擦痕。

二、波磨在同一条曲线上的情况

1. 缓和曲线上波磨始发点距ZH点一定的距离。通过测定这一距离，并依据缓和曲线长和圆曲线半径等可以计算波磨出现的临界半径，但测试数据离散较大，初步推断该临界半径为 $1500 \sim 2500m$ 。

2. 在同一条曲线的不同部位，波磨出现的早迟及发展快慢存在较大差异。

(1) 曲线进口处波磨明显地比出口处严重。

波磨总是从距ZH点某一距离的缓和曲线上始发，而后逐渐向HY点、圆曲线中段、YH点及出口一端的缓和曲线上发展。因此，曲线进口一端的钢轨总是因波磨先到限而下道。

(2) 同一条曲线上，圆曲线上波磨比缓和曲线上严重。

(3) 曲线进口处的ZH点和曲线出口处的HZ点附近没有波磨。

三、波磨与轨枕位置的关系

调查中没有发现波磨与轨枕位置有关系。波磨的波长和轨枕跨距没有明显关系。波磨的波峰和波谷位置与轨枕位置间没有明显关系。

§ 2.3 波磨的表面特征

一、外轨上的波磨是“磨”出来的

石太线上曲线超高几乎全部设置为欠超高，外轨承受较大偏载。但由于曲线外轨使用了淬火轨，钢轨头部硬度有较大提高，调查中没有发现外轨头部出现明显的塑性压溃现象。

(1) 实测了K5、K18和K25处曲线外轨的轨头形状，每处各测取6个断面，典型的外轨轨头廓形如图2-1所示。从实测轨头廓形看，外轨没有塑性压溃的

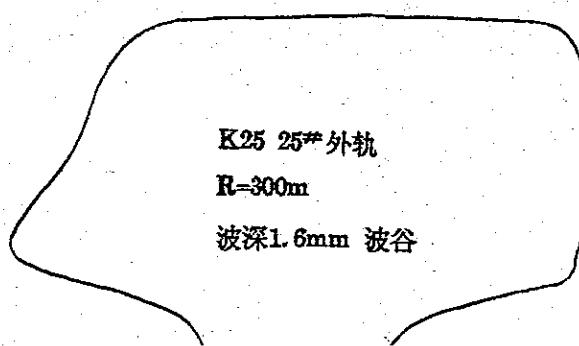


图2-1 波磨轨头实测廓形 (K25, R=300m, 外轨, 波谷)

迹象。而内轨因为是普通碳素轨，虽然受载较外轨小，但仍有不同程度的轨头压宽。

(2) 轨头光带相当光滑，波谷处没有因表面塑性拉伸形成的疲劳斑点，波峰处没有因表层金属堆挤而出现的折皱，只在轨距角处发现因涂油稍微过量而形成的接触疲劳斑点。

(3) 波谷和波峰的表面颜色没有差异，远处所见波峰与波谷明暗相间的现象，是因峰谷不在同一平面上造成的反光效果。这说明波谷与波峰处车轮与钢轨的作用机理是完全一样的。

(4) 波谷和波峰处钢轨表面存在明显的磨损痕迹。用放大镜观察发现，表面有铁灰色光亮的磨屑，呈散乱分布。能清晰看见因磨损留下的划痕，划痕长度不等，大约与车轮滚动方向成 $10\sim30$ 度角。

腑视轨面时，能发现轨头光带宽度呈规律性地变化，波峰处光带较窄而波谷处光带较宽，这是因轨头弧形所致，如图2-2所示。

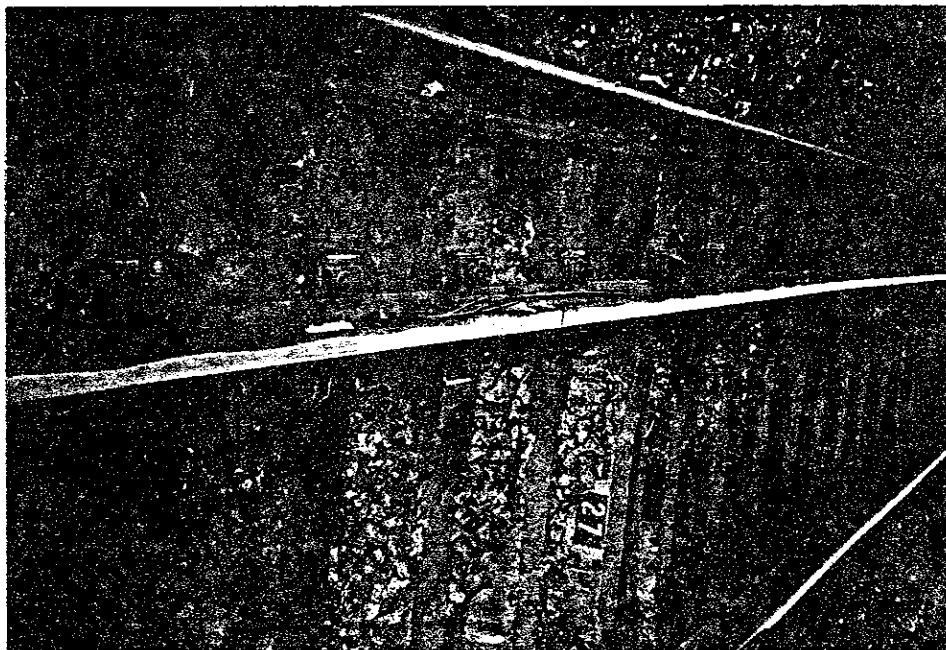


图 2-2 波磨轨腑视照片

二、沿轨头宽度范围内波磨的变化情况

在K18处随机选取多个一米长度进行测量，每一米内测量三列（距轨头外侧10mm、30mm和50mm）轨顶纵向轮廓线，图2-3中给出测量结果。

从图2-3中可以看到：

(1) 沿轨顶宽度范围内，波磨纵向轮廓线完全相似，波峰和波谷出现在同一钢轨横断面上，各列波形不存在相位差。

(2) 沿轨顶宽度范围内, 各列波形的波深差异不明显, 靠轨距角一侧波深略微大。 (该测试段在现场观测时, 发现轨头外侧波深比内侧波深大得多, 测试结果表明这是由于视觉误差所致)。

(3) 曲线超高大或轨底坡不足的地段, 光带未布满整个轨顶, 而是偏向轨距角一侧, 则波磨波深靠轨距角一侧较大, 这是显然的。

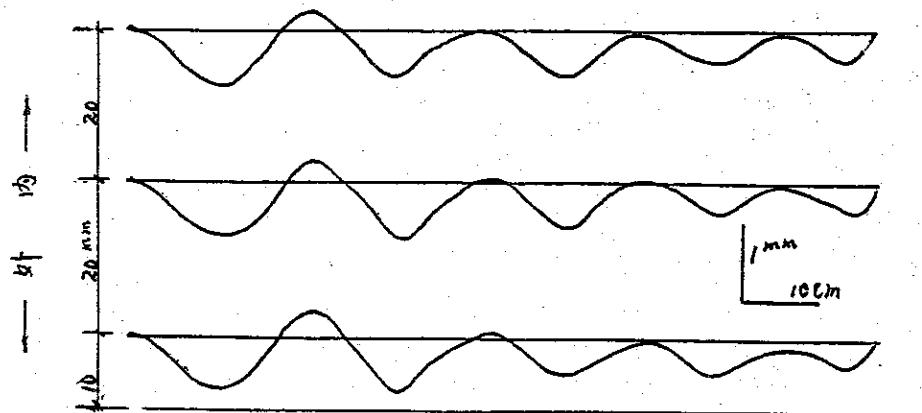


图2-3 任选1米的轨头纵向轮廓 (K18, R=500m)

三、波峰和波谷的形状

1. 短波磨耗、中长波磨耗、均匀长波磨耗

波峰和波谷本身是对称的, 波峰在两波谷正中, 波谷在两波峰正中。

但波谷与波峰不对称。以二分之一波深画水平线, 就能发现波谷区比波峰区长。对不同发展阶段波磨的调查测试发现, 波磨的发展过程如图2-4 所示。

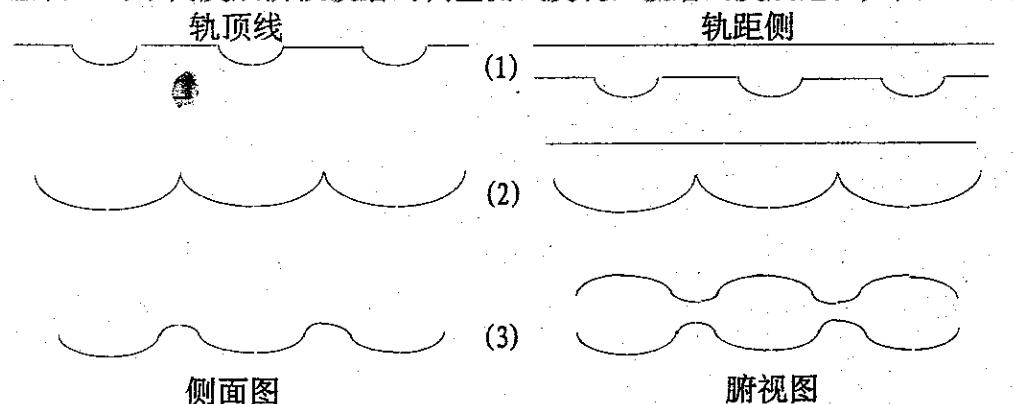


图2-4 波磨发展过程的侧面和俯视示意图

2. 非均匀长波

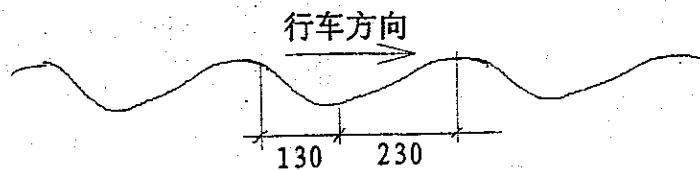


图2-5 不对称波磨示意图

非均匀长波除波长不均匀以外，波峰和波谷也不对称，波峰向行车方向偏斜，波峰前端短且陡，后端长且缓，而波谷正好相反，如图2-5。

一些波长特长的波磨，侧面呈碟状（如图2-6c），是由于两个或多个波谷逐渐发展而形成的；其发展过程如图2-6所示。

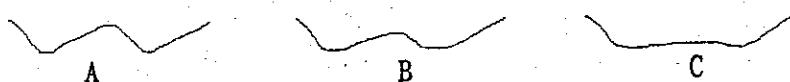


图2-6 碟状波谷的发展过程

肉眼看不出在长波的波峰或波谷处迭加有短波纹，测试数据也表明，长波上未迭加短波纹，波磨的波峰和波谷位置极易确定。

§ 2.4 波磨与曲线半径的关系

1. 波磨波长与曲线半径无关

重点测量了曲线半径为300、500和1000m三段曲线上的波磨情况。三处曲线线路条件相近，平均车速差异不超过10%（约50km/h）。测量波磨时，用磁性表座将一米基尺架于轨顶，百分表沿基尺滑动，每隔25mm读一个数据。然后对测量数据进行谱分析。图2-7~2-10给出了几段典型的波长谱图。

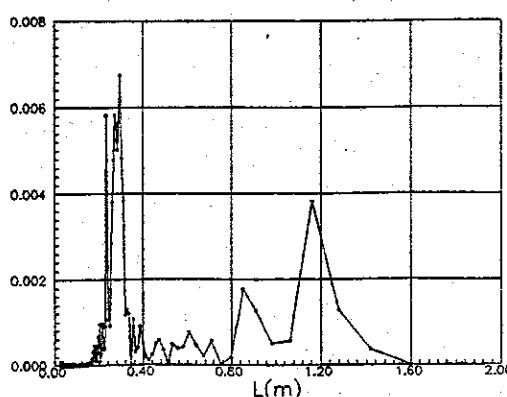


图2-7 1000m半径上的波磨
(K5, R=1000, PC枕, 384点)

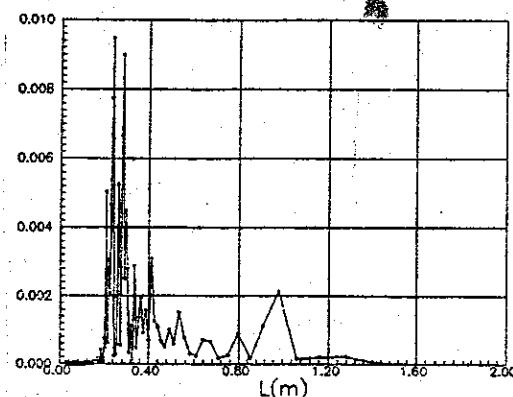


图2-8 500m半径上的波磨
(K18, R=500, PC枕, 328点)

从图中可以看到，波磨的波长谱上，波长250mm占绝对优势，且三种半径的曲线地段上情况相同，说明波磨的波长与线路曲线半径之间没有相关性。

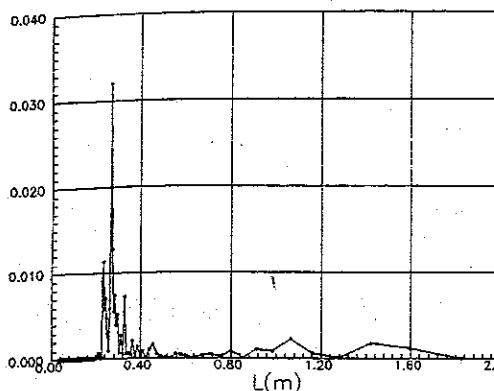


图2-9 300m半径上的波磨
(K18, R=300, 12#轨, PC枕, 408点)

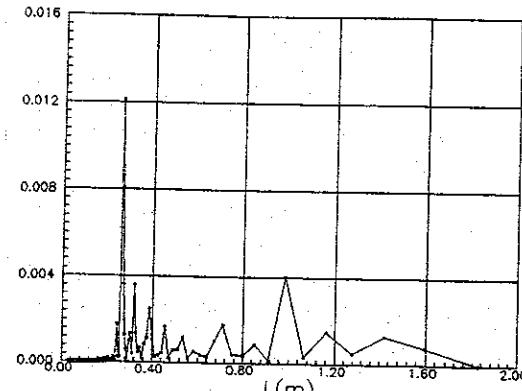


图2-10 300m半径上的波磨
(K18, R=300, 23#轨, PC枕, 519点)

2. 波磨发展速率与曲线半径有关

半径小于600m的曲线上，有一半以上的换轨是由波磨到限控制。统计了半径自270m至600m的曲线共计79条。依据90年至94年间换轨时记录的最大波深值，计算最大波深发展速率，表2-1和图2-11给出了结果。

由表2-1中的统计数据可以看到，随半径加大，波磨发展速率明显降低。而在半径特别小的曲线地段，因快速的钢轨侧磨影响，波磨发展速率反而有所降低。曲线半径300~350m左右的曲线上波磨发展速率最大。

表2-1 波深发展速率 (mm/月)

曲线半径(m)	统计曲线个数	波磨发展速率
< 299	20	0.0752
300~349	27	0.1057
350~399	8	0.0483
400~449	8	0.0688
450~499	5	0.0511
500~549	7	0.0567
550~599	2	0.0680
> 600	2	0.0208

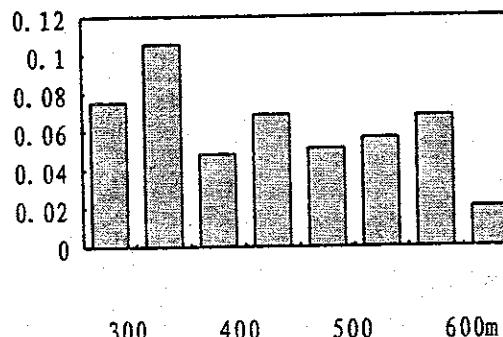


图2-11 波磨发展速率直方图

值得注意的是，上述关于波磨在半径300~350m曲线上发展速率最快的统计结果，只适用于淬火轨的条件。在普碳轨上，钢轨侧磨较快，波磨发生最严重的曲线半径可能要大一些。

§ 2.5 木枕地段与混凝土枕地段的波磨比较

1. 木枕地段波磨略轻于混凝土枕地段

石太线因运行重载运煤列车，为保持线路横向稳定，半径300m的曲线地段也已铺设了混凝土轨枕，只是在桥上还能见到木枕。

桥上及护轨梭头木枕地段上的波磨明显地轻于混凝土枕地段。K25桥头12#轨，一半位于木枕上，而另一半位于混凝土枕上。对该钢轨上的波磨进行了全面测量，在米格纸上点画出轨顶表面轮廓线后，量取波磨的波深，每一米长范围内取一个最大波深进行统计。

混凝土枕一端波磨最大波深为1.6mm，木枕一端的最大波深为1.45 mm，混凝土枕地段约大10%。混凝土枕一端的波磨平均波深为1.06mm，木枕一端的平均波深为0.87mm，混凝土枕地段约大20%。

木枕地段的波深比混凝土枕地段小，但测试结果并没有现场观测时显著。这是因为木枕地段波磨波长较大，现场观测的视觉误差所致。

2. 木枕地段波磨波长大于混凝土枕地段

本次测量结果与我们以往的调查和测量结果相似[62][134]，木枕地段波磨的波长明显大于混凝土枕地段波磨的波长。

图2-12为K25曲线12#轨木枕端波磨波长谱图，占绝对优势的波长为400mm，比图2-7至图2-10中的250mm大。

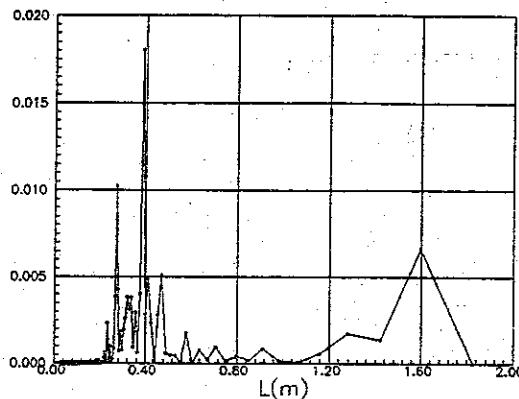


图 2-12 300m半径上的波磨
(K18, R=300, 12#轨, 木枕, 584点)

§ 2.6 其它情况

1. 国产淬火轨抵抗波磨的能力优势不大

石太线重车方向（上行线）的曲线外轨全部采用淬火轨（内股采用普碳轨），其中绝大部分是包钢生产的普碳轨而后经保定淬火基地进行淬火处理的淬火轨，少量淬火轨是从英国进口的。

国产淬火轨在小半径曲线上一般7个月内出现波磨，严重地段2~3个月波磨就清晰可见。如K39附近半径300m的反向曲线上，曲线外轨自8月15日换轨至10月27日的70多天内，波磨已清晰可见（波深已达到0.1~0.2 mm）。

K183处重车线上半径300m的曲线外轨铺设英国进口的淬火轨，钢轨侧磨达到7~8mm时调边使用，至调查时已达四年之久，仍未出现波磨，且轨面光滑无剥离等病害。

2. 打磨及换轨情况

(1) 换轨情况。最大波深达到1.5mm时布置备用钢轨，最大波深达1.8~2.0mm时换轨。石家庄工务段93年以前每年更换钢轨20公里以上，其中约一半是因为波磨到限。

(2) 打磨情况。目前钢轨打磨车数量太少，难以按照经济打磨限（波深约0.3~0.5mm^[143]）进行打磨。

波深越大，打磨后波磨重新出现的时间越短。波深超过1.0mm时，打磨以后2~3个月重新出现；波深0.5~1.0mm时，打磨后约4~5个月重新出现；波深小于0.5mm时，打磨后6~7个月波磨重新出现。

同一根钢轨的第二次打磨后至波磨第三次出现的时间，比第一次打磨至波磨第二次出现的时间要短得多。

§ 2.7 调查结论

1. 波磨一般出现在曲线地段，小半径及制动地段波磨发展较快，半径300—350m的曲线地段最为严重。
2. 直线地段波磨极少。
3. 波磨在曲线进口严重而出口较轻。波磨一般从接头附近始发，而后向钢轨小腰及大腰扩散。
4. 波磨可分为短波纹、中长波和长波三类，长波又分均匀长波和非均匀长波两种。长波出现在曲线外轨，中长波出现在缓和曲线外轨，短波纹出现在曲线内轨。
5. 短波、中长波及均匀长波的波峰和波谷是对称的，但波谷区比波峰区长。非均匀长波的波峰和波谷是非对称的，波峰偏向行车方向，前端短且陡，后端长且缓，波谷正好相反。波长特别大的蝶状波谷是两个及两个以上波形发展而成的。
6. 沿轨头宽度范围内各列波形完全相似，波深差别极小且各列波形不存在相位差。
7. 波磨波长是有限个波长的混合，优势波长十分明显。波长和曲线半径的相关性不大。
8. 木枕地段的波磨波长(400mm)较混凝土枕地段的波磨波长(250mm)大。木枕地段波磨较混凝土地段轻微。
9. 石太线上钢轨波磨主要是因轨头磨损而形成的，属磨损型波磨。
10. 国产淬火轨对波磨的抵抗能力优势不大。

§ 2.8 关于钢轨波磨特征的讨论

依据波磨的特征，可以将一些与波磨成因关系不大或不直接的因素先行剔除，使问题得以简化，有助于下一章中建立模型和以后的成因分析。因此在调查结论的基础上，针对波磨特征对其成因进行一些推测性的讨论是有益的。

波磨特征：直线地段几乎没有波磨。

推论1：直线上的各种轮轨振动形式都不是形成波磨的直接原因。

直线上轮轨的振动主要表现为垂向振动：如轮轨系统垂向振动、轮对弯曲振动、轮轨接触振动、轨枕与钢轨间的反向振动等。这些振动都不是波磨形成的直接原因，但可能加速波磨的形成和发展。

波磨特征：波磨一般出现在曲线地段（包括圆曲线和缓和曲线）。

推论2：造成波磨生成的振动形式在曲线地段被激化。

这使我们有理由将注意力放在曲线地段才被激化的振动形式上，这些振动形式主要包括轮轨横向振动和轮对扭转振动等。

波磨特征：缓和曲线上距直缓点一定距离内无波磨。

推论3：曲线半径超过某一临界半径后，波磨难以形成。

实测数据说明波磨出现的临界半径离散性较大，可能受到多种因素影响，但临界半径确实存在。当曲线半径大于临界值时，致使波磨生成的振动形式的振动强度已不足为患。

同一条曲线上，波磨在进口端较严重而在出口一端较轻微。说明列车进入缓和曲线后，随着曲线半径减小，某种致使波磨生成的振动在逐渐加剧，振动的激化程度与曲线半径直接相关。

波磨特征：淬火轨上的波磨属磨损型波磨，塑性变形的特征不明显。

推论4：轮轨系统中的各种因素，对钢轨磨损影响较大者，对波磨的影响也较大，反之亦然。

即使在波磨波深较大时，波磨轨轨头的塑性变形也不明显。因此，在分析波磨成因及影响因素的过程中，始终应当以钢轨磨耗功为研究对象。

波磨特征：波磨的出现位置总与钢轨接头有关。

推论5：接头等轨道不平顺在波磨发生发展过程中起决定性的作用。

长波磨耗的出现位置总与接头有关，其中又有三种情况。(1)波磨直接从接头马鞍形磨耗开始。(2)波磨在距马鞍形磨耗之后约一个转向架距离处开始。(3)波磨在距接头之前约一个转向架距离处开始。并且，不管接头处于外轨还是内轨，其结果都是在外轨上形成波磨。由此可见，钢轨接头等轨道不平顺对波磨有着重要的影响。

波磨特征：实测波磨的波长谱图上，含有限个峰值。某一波长占绝对优势，混凝土枕地段波长为250mm，木枕地段波长为400mm，且与线路曲线半径无关。

推论6：波磨的这种波长分布与波磨形成和发展中轮轨间磨耗功的波动频率相对应，合理的波磨成因理论应当能解释波磨的波长。

波磨特征：某些长波始发于轨面100~130mm的光斑。

推论7：某些长波磨耗是由中长波发展而成的。短波纹不会发展成为长波磨耗，而某些中长波磨耗可能发展成长波磨耗。

即某些长波波磨发展的过程中，初始波长较短，波深加大的同时波长逐渐变长，而后波长趋于稳定。

波磨特征：长波磨耗分为均匀长波和非均匀长波，但均匀长波只是个别现象，非均匀长波是普遍的。

推论8：均匀长波是长波磨耗的一种特例。

非均匀长波的波长、波深变化周期，一般与主型转向架固定轴距或其倍数相关。由此可以进行推断，均匀长波与非均匀长波的产生原因是相同的。由于各种参数的组合，使得转向架上前后两车轮振动的相位差发生变化，只有当相位差为某一特定值时才产生均匀长波磨耗。

上述各种推论，作者将在本文以后各章节中逐步加以证实并进一步说明。但因寻找参数组合的计算工作量很大，有个别推论未能得到证实，在此也一并列出，供今后进一步研究时参考。

第三章 轮轨系统非线性空间耦合振动模型

通过对现有波磨成因理论的总结以及对钢轨波磨的调查测试，作者认为，目前的波磨成因理论的主要问题在于分析模型过于简化，忽略了轮轨系统中许多对波磨形成和发展有显著影响的因素。因此，要将波磨成因理论向深入一步推进，必须将有关的振动形式综合考虑，建立一个更为完善的分析模型。为此，本章在概略总结现有轮轨系统振动分析模型的基础上，建立了一个侧重于轮对振动的“轮轨系统垂向-横向-轮对扭转和弯曲非线性空间耦合振动时变模型”，旨在解决曲线地段磨损型长波磨耗的形成原因、发展过程、影响因素及预防减缓措施等相关问题。

§ 3.1 轮轨系统振动分析模型概述

针对波磨成因问题所需建立的振动分析模型必须考虑列车和轨道两个部分，进行轮轨系统动力分析。合理有效的分析模型应当处理好三个方面的问题，一是机车车辆的振动特性，即机车车辆动力学的研究内容，二是轨道的振动特性，即轨道动力学的研究内容，三是机车车辆与轨道振动的耦合关系。

轨道动力分析可分为轨道垂向、横向及纵向动力分析三部分。轨道垂向动力分析已取得大量成果。早在四十年代，铁摩辛科和沙湖年慈^[145]就已开始探讨集总参数轨道模型在正弦和矩形波荷载作用下的轨道振动问题。后来，我国学者将集总参数模型加以改进，用于计算轮轨冲击力。集总参数模型简单、计算方便，但等效参数不易确定，计算结果与实际值有较大差距。

六十年代提出了连续弹性基础梁模型，于八十年代发展为连续弹性基础上无限长叠合梁模型。连续支承模型便于得到解析解，但不能反映轨道间断支承和轨枕失效时的振动特性。

七十年代，英国Derby 中心就轮轨系统的动力作用及响应进行了连续弹性基础梁与弹性点支承梁模型的比较，认为后者计算结果更接近于实测值，因此目前普遍采用弹性点支承欧拉梁模型^{[127] [146]}。

八十年代，随着计算机技术和有限单元法、模态法的发展，轮轨垂向耦合振动分析取得了明显进展，如采用有限元法和接头弹性铰假定研究轮轨在接头处的冲击振动，用有限元法建立了轮轨系统时变非线性随机振动模型^[6]，用模态法建立了车辆轨道垂向耦合振动分析模型^[140]等等。

但关于轮轨系统横向和纵向耦合振动的研究发展较慢，基本上仍是孤立地研究机车车辆或轨道的振动。在研究轨道横向或纵向振动特性时，通常将列车视为外部激励，即移动或固定的激振荷载^[141]。在研究机车车辆横向振动特性和曲线通过性能时，则通常采用刚性轨道的假定，将轨道不平顺和曲线超高

等作为外部激励[121]。轮轨系统纵向的振动通常认为是弱耦合关系，但在横向，轮与轨的耦合程度极高，孤立研究机车车辆或轨道的横向振动根本无法解决实际问题。尤其在重载或高速铁路上，轮轨系统横向动力分析水平直接关系到列车运行品质和行车安全，因此横向动力分析也越来越受到重视。

与轮轨垂向相比，研究轮轨横向耦合振动的难度要大得多。其中主要有两个方面的困难。其一，无法回避轮轨系统横向众多的非线性因素，如转向架各部件间的横向活动量、轮轨接触区内非线性蠕滑力以及道床横向非线性刚度等；其二，必须正确处理轮轨间存在的复杂的横向耦合振动关系，包括蠕滑力、轮缘贴靠和接触区域位置等。尽管如此，在非线性蠕滑理论、轮轨空间接触关系及机车车辆动态曲线通过理论等方面均取得了显著进展。同时，也将轨道的振动系统地纳入了分析模型，如将轨道处理为连续弹性点支承梁，分析机车车辆动态曲线通过时，轮轨系统的横向耦合振动[146][147]。这些研究成果，是本文建立轮轨空间耦合振动模型的重要基础。

§ 3.2 建模思路及振动模型

一、建模思路

对于中长波和长波磨耗，其形成的外因是某一种或某几种振动造成的轮轨间力的波动，而其内因则是轨头的磨损、塑性变形。波磨形成过程中，是磨损还是塑性变形起主要作用，决定于轮轨接触应力和钢轨材质的硬度等因素。对于普碳轨，波磨主要是轨头塑性流动，属塑流型波磨；对于淬火轨，则通常属磨损型波磨。因此解决磨损型波磨成因问题的关键，在于弄清轮轨系统振动条件下钢轨头部的磨损过程，即进行钢轨磨损的动力分析。

进行磨损动力分析的一般思路是[98][99]，建立系统的振动分析模型，求解影响磨耗的动力参数值，然后选择合理的钢轨磨耗指数，用磨耗指数的值对磨损进行分析。关于磨耗指数的研究很多，现有各种繁简不一的磨耗指数达十数种之多[100][125]，分别适用于不同的分析目的。英国Derby中心的研究和试验数据表明，磨损速率与磨耗功成正比，这一结论已逐渐为研究者们所接受。因此本文在分析钢轨磨损时采用轮轨踏面间的磨耗功值作为衡量钢轨磨损速率的量值，即磨耗功大的地方钢轨磨损较快，反之宜然。

为此，需要建立一个包含多种振动形式的轮轨系统空间耦合振动分析模型，用于计算钢轨磨耗功的量值，对照分析各振动参量、磨耗功及波磨的频率成份，判定致使波磨产生的振动形式。进一步进行结构参数分析，弄清形成波磨的各种可能的参数组合及振动激化的原因，从改变结构参数等方面入手寻找预防及减缓波磨的措施。

二、模型中考虑的振动形式

如前所述，波磨一般出现在曲线上。因此分析模型应当考虑曲线地段轮轨系统中各种振动形式，如轮轨系统垂向、横向和纵向振动，轮对扭转和弯曲振动等。为了建立一个波磨成因的综合分析模型，试图将第一章动力类成因中提到的所有频率相近的振动形式纳入本文的分析模型。但为了使计算得以简化，忽略两个方面的次要因素。其一，主要针对长波磨耗，因此忽略高频振动；其二，低频振动中，忽略振动量值明显小得很多的振动形式。

在石太线上进行了波磨地段轨道动力测试，结果表明，与钢轨垂向和横向位移相比，钢轨纵向位移是微小的。实测钢轨垂向位移平均值为3.7mm，最大值4.9mm，轨头横向位移平均值为2.6mm，最大值4.3mm，而钢轨纵向位移的平均值为0.45mm，最大值为1.2mm。钢轨纵向位移仅为另外两向位移的1/6~1/8。可见，分析模型中考虑轨道纵向振动而忽略横向振动的简化^[124]是不合理的，轨道的纵向振动可作为次要因素不予考虑。

轮轨系统垂向振动并不是在曲线地段才被激化，直线上也存在，但直线上却很少生成波磨，说明单独的轮轨垂向振动——无论是系统垂向振动、接触振动，还是轨枕弯曲振动——都不会形成波磨。但垂向振动造成轮轨间垂向力的波动，影响轮轨间粘着、滑动等一系列作用关系，从而制约着轮轨横向和纵向的振动。横向和纵向振动是被抑制还是被激化，与垂向振动不无关系，因此必须将轮轨垂向振动考虑到分析模型中。

在波磨易发地段，木枕线路也出现波磨，只是发展较慢且波长较大，说明木枕和混凝土枕在波磨生成机理上并没有本质的区别。因此只分析混凝土枕线路不失一般性。对于混凝土枕，其弯曲变形相对于道床沉降是可以忽略的因素，因此轨枕的弯曲振动可以不考虑。

轮轨系统中当然远不止上述几种振动形式，这里所讨论的振动形式是在现有文献中研究过、且认为对波磨生成有影响的振动形式。

综上所述，本文所要建立的模型包含轮轨系统垂向振动、轮轨接触振动、轮对弯曲振动、轮轨系统横向振动、轮对扭转振动等振动形式。

三、道床横向弹性非线性问题

轨道横向非线性来源于道床弹性，但非线性程度究竟如何，在建立振动模型时必须加以考察。

道床横向非线性弹性表现在两个方面。其一，施加在轨枕上的横向力与轨枕横向位移间存在非线性。其二，道床横向刚度与轨枕作用在道床上的垂向力相关。这两种非线性均来自于轨枕在道床上的移动。

要使轨排发生横移，横向力须要达到某一量值。按照法国高速铁路上的试验数据^[148]，轮轨横向力至少要达到($P/3+1$)吨力(P 为轴重)时，轨排才发生横移。对于机车和车辆，横向力分别要达到约87kN和80kN。从表3-1、2(石太线上半径300m曲线、外轨波深1.3mm，导向轮下横向力的实测统计值)可见，车辆一般不会使轨排发生横移，而机车则有可能使轨排发生横移。由于

机车横向力大时垂向力也很大，横向水平力系数并不很大，平均横向水平力系数在0.6左右，因此只有个别车轮能使轨排在道床上发生横移。

表 3-1 SS1机车横向力(kN)实测值

测 点	H ₁	H ₂	H ₃
平均值	74.1	79.7	67.3
统计列车数	31	40	38
均方差	15.1	16.1	18.3
最大可能值	111.9	120.0	113.1

表 3-2 车辆横向力(kN)实测值

测 点	H ₁	H ₂	H ₃
平均值	40.3	47.7	32.3
统计列车数	38	45	46
均方差	12.0	12.9	13.7
最大可能值	70.3	80.0	66.6

在动态情况下，轨道横向动刚度与垂向力的相关性如何呢？试验中在同一钢轨断面上布置了轮轨垂向力、横向力和轨头横移测点，对测试数据进行统计分析，结果发现（如图3-1所示），轨道横向动刚度与垂向力间几乎不存在相关性。

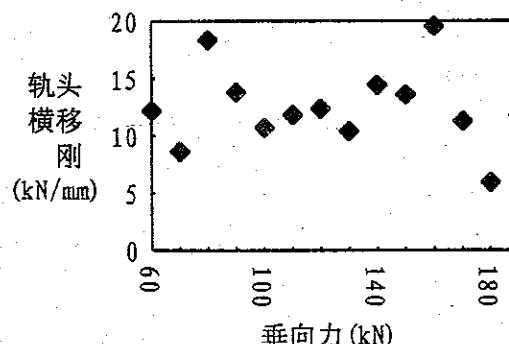


图3-1 各种垂向力下轨头横移刚度

动态情况下轨道横向动刚度的非线性并不如想象的那么大。实测得到不同轨头横移量值下轨道横向动刚度值如图3-2所示，轮轨横向力与轨头横向位移的关系如图3-3所示。从图3-3中可以看到，小于20kN的横向力不能使轨头产生横移，但轨头一旦出现横移，横向力与横向位移间基本上呈线性关系。

综上所述，轨道横向仍可以作线性简化。

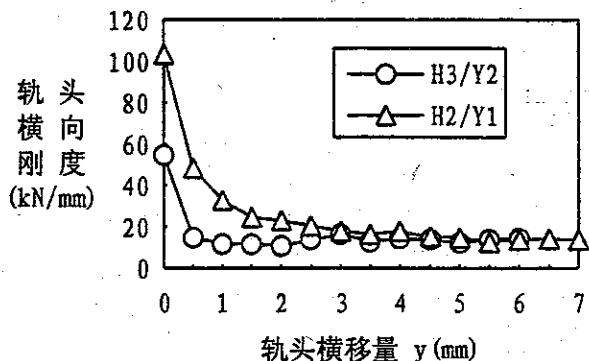


图3-2 轨道横向动刚度与轨头横移量的关系

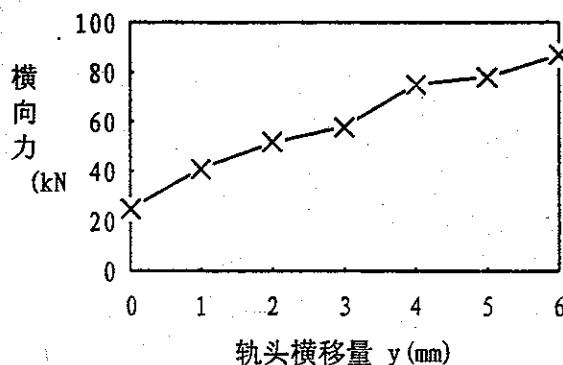


图3-3 轨头横向力与轨头横向位移的关系

四、振动模型及振动自由度

1. 求解方法

在建立振动模型时，求解方法要预先确定，因为求解方法的选择直接关系到模型的可解性和繁简程度。在振动模型求解方法中，目前最常用的为有限单元法、振型模态法和传递矩阵法。有限单元法在处理结构细部构造时极为方便，如钢轨接头、钢轨扭转及轨枕空吊等，但因自由度多占用的计算机内存较大，运算速度受到损失；振型模态法可以依据分析的频率范围和精度选择适当数量的振动模态，可有效地控制自由度数，加快运算速度，但对结构细部处理不如有限单元法方便；采用传递矩阵法求解自由度特别多的振动系统时，其致命的弱点是累计误差难以有效地控制。考虑到所建模型今后的进一步发展，以及计算机内存和速度迅速提高的趋势，作者选用了有限单元法来求解振动模型。

2. 振动模型

车体振动因频率较低，对波磨的影响是可以忽略的。但因振动模型是非线性的，静平衡位置对振动有影响，为程序设计方便，仍考虑车体垂向位移一个

自由度。车体在曲线上的未被平衡离心力以等效离心力和力矩施加于转向架二系悬挂点上。

轮对上的车轴作为一个连续弹性体，其扭转振动和弯曲振动都存在无穷多个自振频率。就长波磨耗而言，所关心的是轴扭转和弯曲的一阶振动频率，轴扭转和弯曲的二阶频率已较高^[20]，本文模型中不予考虑。

道床及路基的参振对轮轨间的作用力有一定影响，但比起道床和路基的弹性与阻尼，参振质量的影响要小得多。况且道床和路基的参振质量极难确定，尤其在轮轨横向振动中的参振质量，既难确定又难以识别。作者以为，不应当将道床参振问题纳入波磨分析模型，以突出重点。

轨枕间断支承效应不应当忽略。轨道受定点激振的研究表明^[105]，仅在Pined-pined频率（约1000~1400Hz）附近，轨枕间断支承的影响才显著，在其它频段内间断支承的影响都可以不考虑。但对于移动荷载，且分析垂向及横向耦合的多种振动形式，我们更注重车轮的枕间通过频率。就我国铁路上行车速度来看，车轮的枕间通过频率一般在20~40Hz（车速40~80km/h），这一频段正是可能影响波磨生成的各种振动形式的频段。且一些文献中将波磨成因归结为轨枕间断支承效应^[82]。因此本文分析模型中，考虑轨枕的间断支承效应。但忽略钢轨断面的剪切和旋转效应，钢轨作为弹性点支承上双向可弯的Euler梁。

由此得到了本文所建立的“轮轨系统垂向—横向—轮对扭转和弯曲非线性空间耦合振动时变模型”，主要情况如图3-4中所示。

振动模型由半个车体、一个转向架及无限长轨道组成。轨道中部N-1个枕跨为轨道计算段，采用连续弹性点支承双向可弯梁有限单元。在计算段的两端，为消除边界效应，采用了连续弹性支承半无限长双向可弯梁无限单元。振动模型总单元数为：车辆 $3N+2$ ，机车 $3N+3$ ；自由度数为：车辆 $11N+26$ 个，机车 $11N+36$ 个。

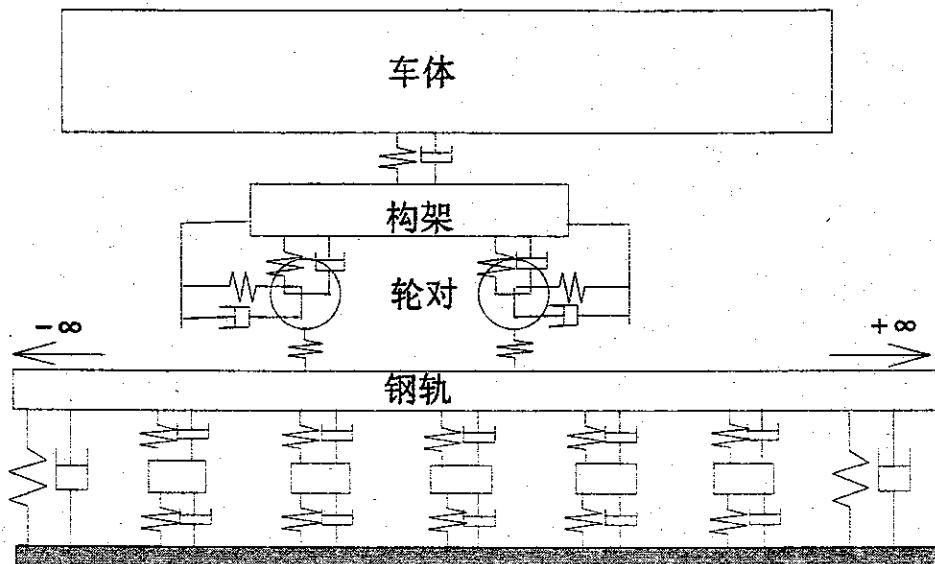
3. 自由度及其排列顺序

(1) 自由度

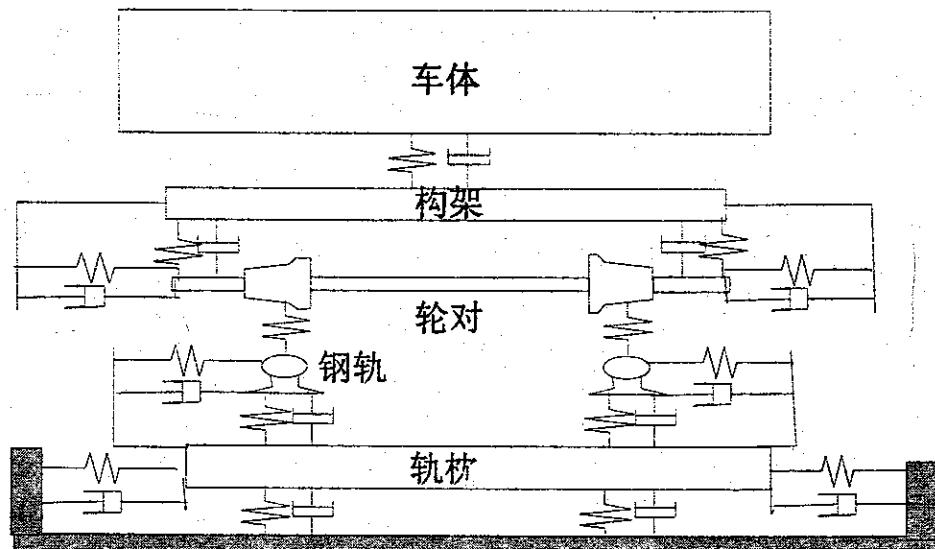
车体有垂向位移1个自由度。转向架构架与车体间设有二系弹簧和阻尼元件。构架具有横移、沉浮、摇头、侧滚及点头5个自由度。

轮对与构架间设有一系弹簧及阻尼元件，轮对受三向弹性约束。每一个轮具有横移、沉浮、摇头、侧滚自由度各1个，轮对扭转及弯曲振动自由度各2个，每一轮对总计自由度8个。

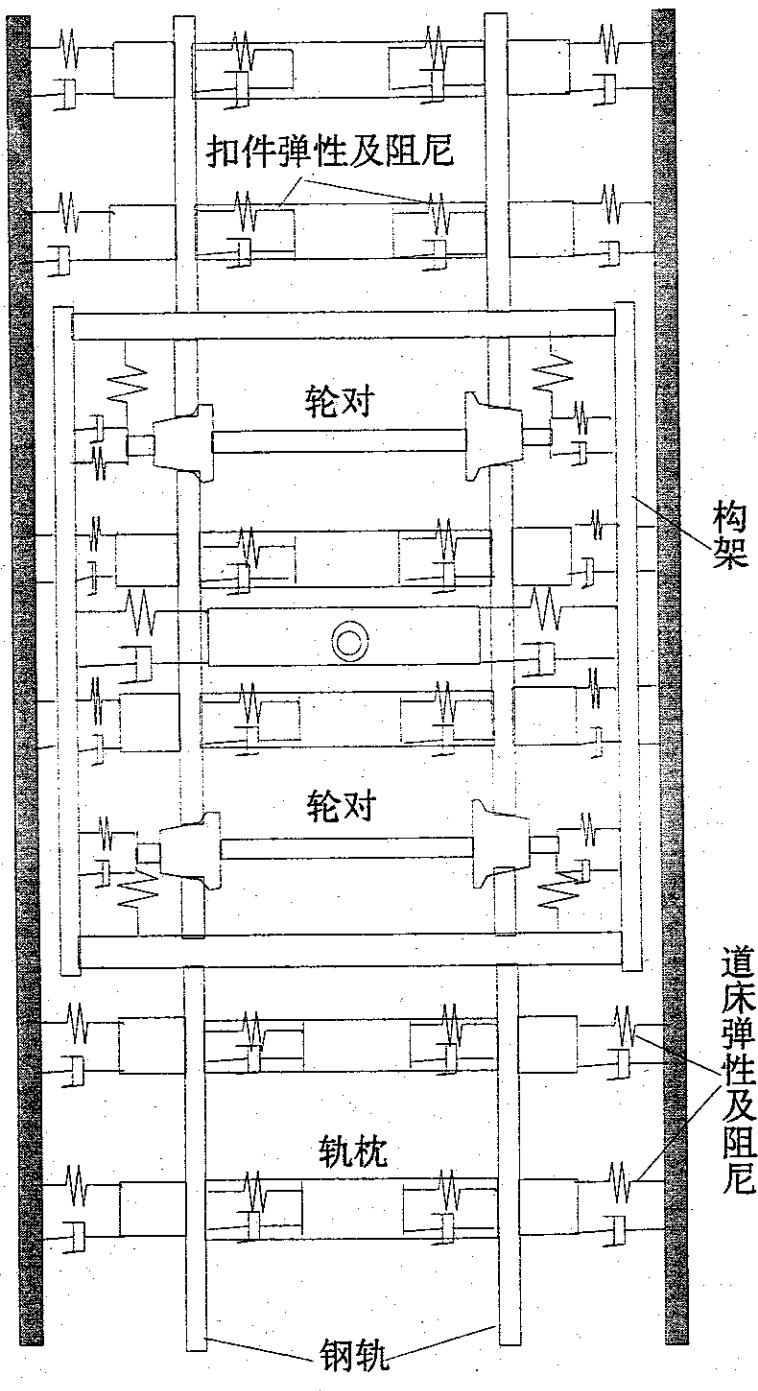
轮轨间依据非线性赫兹接触弹簧或接触力、非线性轮轨踏面蠕滑力、轮缘力及轮缘摩擦力取得耦合，将轮轨振动联系起来。关于轮轨间的非线性耦合关系，将在本章的振动方程推导中分别叙述。



A) 系统模型纵面

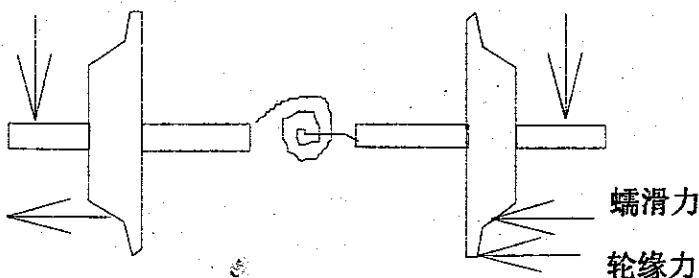


B) 系统模型横断面

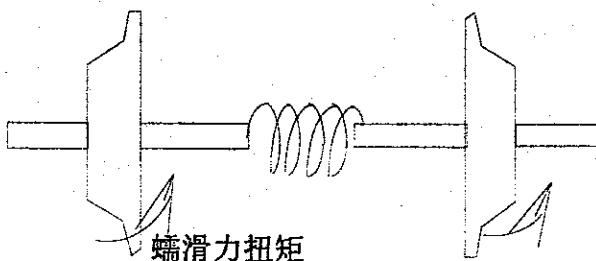


c) 系统模型平面图

垂向力



D) 轮对弯曲振动模型



E) 轮对扭转振动模型

图 3-4 空间耦合振动模型图示

轮轨间设置4个轮缘力未知变量。当轮缘贴靠钢轨时，轮缘力未知量列入方程，同时引入轮轨横向位移协调条件，而当轮轨不贴靠时，总刚中与轮缘力对应的主元赋大值。

轨道取N-1个枕跨作为计算段，钢轨为连续弹性点支承梁，采用有限单元。两股钢轨均为双向（垂向及横）可弯梁，每一枕跨为一个梁单元，具有位移和转角共8个自由度。计算段端部的四个单元采用无限元，以消除端部边界效应，无限单元为半无限连续弹性支承梁。钢轨依双向弹簧及阻尼元件（扣件）与轨枕联结。轨枕视为刚性质量块，具有垂向、横向及侧滚位移3个自由度。轨枕受下部双向弹簧及阻尼元件（道床）约束。

(2) 自由度排列顺序

模型单元编号及自由度排列顺序如表3-3所列，其中车轮编号及坐标参见图3-5。

由于列车是运动的，转向架自轨道上某一点开始运行，每行进一步，振动方程就发生变化。轮轨间的垂向接触力与轮轨相对压缩量间服从赫兹接触关系，轮轨踏面间蠕滑力遵从Johnson曲线，轮缘力要依据轮轨贴靠逐步判断确定取舍，同时计人轮缘摩擦力影响，上述几种力均具有强非线性特性。（为简化起见，对轮轨系统中其它非线性因素，在分别进行考察后，均作为线性处理）。因此，本文所建的振动分析模型为一多自由度时变强非线性模型。

表3-3 单元编号及自由度排列顺序

单元编号	节点编号	节点位移	列阵中位置	节点位移特性
曲线外轨单元 1~N-1	N	Y1	1	横向位移
		Z1	2	垂向位移
		θ_{z1}	3	断面绕Z轴的转角
		θ_{y1}	4	断面绕Y轴的转角
		YN	4N-3	横向位移
		ZN	4N-2	垂向位移
曲线内轨单元 N~2N-2	2N	$\theta_{z(N+1)}$	4N-1	断面绕Z轴的转角
		$\theta_{y(N+1)}$	4N	断面绕Y轴的转角
		YN+1	4N+1	横向位移
		ZN+1	4N+2	垂向位移
		$\theta_z(N+1)$	4N+3	断面绕Z轴的转角
		$\theta_y(N+1)$	4N+4	断面绕Y轴的转角
轨枕单元 2N-1~3N-2	3N	Y2N	8N-3	横向位移
		Z2N	8N-2	垂向位移
		θ_{z2N}	8N-1	断面绕Z轴的转角
		θ_{y2N}	8N	断面绕Y轴的转角
		Ys1	8N+1	横向位移
		Zs1	8N+2	垂向位移
2N-1~3N-2	3N	ϕ_{s1}	8N+3	侧滚(绕X轴)
		Ys1	11N-2	横向位移
		Zs1	11N-1	垂向位移
		ϕ_{s1}	11N	侧滚(绕X轴)

续表3-3 单元编号及自由度排列

第一 轮 对 单 元 3N-1	3N+1 3N+2	Yw1	11N+1	轮对横移
		Zw1	11N+2	轮对垂移
		ϕ_w1	11N+3	轮对摇头
		ψ_w1	11N+4.	轮对侧滚
		θ_w1	11N+5	轮1扭转角(绕Y轴)
		θ_w2	11N+6	轮2扭转角
		β_w1	11N+7	轮1偏转角(绕X轴)
		β_w2	11N+8	轮2偏转角
第二 轮 对 单 元 3N	3N+3 3N+4	Yw2	11N+9	轮对横移
		Zw2	11N+10	轮对垂移
		ϕ_w2	11N+11	轮对摇头
		ψ_w2	11N+12.	轮对侧滚
		θ_w3	11N+13	轮3扭转角(绕Y轴)
		θ_w4	11N+14	轮4扭转角
		β_w3	11N+15	轮3偏转角(绕X轴)
		β_w4	11N+16	轮4偏转角
构 架 单 元 3N+1	3N+5	Yb	11N+17	横向位移
		Zb	11N+18	垂向位移
		ϕ_b	11N+19	摇头
		ψ_b	11N+20	侧滚
		ξ_b	11N+21	点头
车 体 单 元 3N+2	3N+6	Zb	11N+22	垂向位移
轮 缘 力		F1	11N+23	轮1轮缘力
		F2	11N+24	轮2轮缘力
		F3	11N+25	轮3轮缘力
		F4	11N+26	轮4轮缘力

§ 3.3 坐标及符号说明

1. 坐标体系说明

方程推导时所用的坐标体系如图3-5所示。每一单元一个坐标系，车体及转向架上坐标系随转向架前进同步平移和转动。各坐标原点取为系统不受任何力（包括外力和内力）时各单元所处的位置。

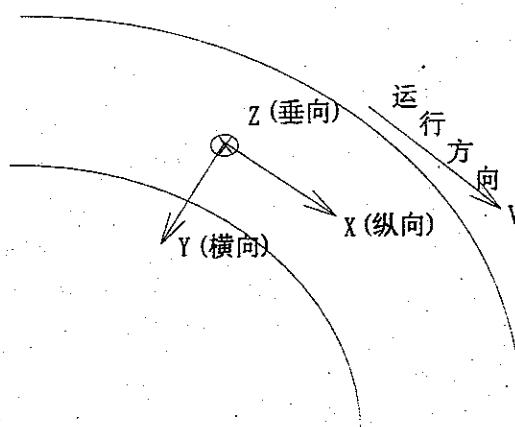


图 3-5A) 坐标体系

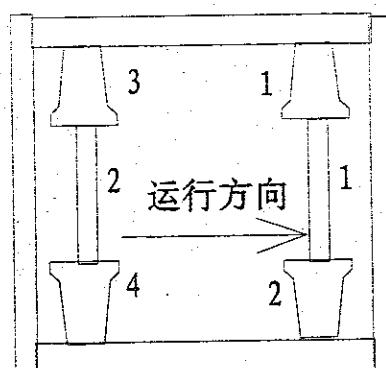


图3-5B) 轮对及车轮编号

图3-5 坐标体系及车轮编号

纵向坐标X以转向架前进方向为正。

横向坐标Y以向曲线内侧为正。

垂向坐标Z以向下为正。

摇头角 ϕ 以转向架在曲线上的整体转动方向为正。

侧滚角 ψ 以向曲线内侧转动为正。

点头角 ξ 以前端降低后端升高为正。

车轮扭转角 θ 以车轮滚动方向为正。

车轮弯曲角 β 以车轮平面向曲线内侧转动为正。

轮轨之间作用力以作用在轮上的力的方向确定正负。

2. 符号说明

(1) 走行部:

V, W	列车速度及轴重
M_C, Z_C	车体质量及车体垂向位移
K_{2x}, K_{2y}, K_{2z}	二系悬挂三向刚度
C_{2x}, C_{2y}, C_{2z}	二系悬挂三向阻尼
$K_{2\phi}, K_{2\psi}, K_{2\xi}$	二系悬挂三向角刚度
$C_{2\phi}, C_{2\psi}, C_{2\xi}$	二系悬挂三向阻尼矩
$M_b, J_{b\phi}, J_{b\psi}, J_{b\xi}$	构架质量及摇头、侧滚、点头惯量
$Y_b, Z_b, \phi_b, \psi_b, \xi_b$	构架横移、沉浮、摇头、侧滚、点头位移
K_{1x}, K_{1y}, K_{1z}	一系悬挂三向刚度
C_{1x}, C_{1y}, C_{1z}	一系悬挂三向阻尼
$M_w, J_{w\phi}, J_{w\psi}$	轮对质量及摇头、侧滚惯量
$J_{w\theta}$	车轮扭转振动时车轮绕Y轴的转动惯量
$J_{w\beta}$	车轮弯曲振动时车轮绕X轴的转动惯量
E	钢的弹性模量
$K_w\theta, K_w\beta$	车轴扭转刚度和弯曲刚度
$Y_{wi}, Z_{wi}, \phi_{wi}, \psi_{wi} (i=1-2)$	轮对横移、沉浮、摇头、侧滚位移
$\theta_{wj}, \beta_{wj} (j=1-4)$	车轴扭转和弯曲时车轮的旋转角
L_1	转向架固定轴距之半
b_1	一系悬挂横向距之半
H_1	车体质心至二系悬挂点的高度
H_3, H_4	构架质心至二系和一系悬挂点的高度
r_0, λ	车轮名义滚动半径、轮踏面锥度
q	未被平衡超高引起的轮载偏载系数
L_β	轴承中心至车轮名义滚动圆之水平距
(2) 轮轨之间	
δ	轮轨活动量(或称游间)之半

γ_{1j} 、 γ_{2j} 、 ω_{3j} ($j=1-4$)	轮轨间纵向、横向及自旋蠕滑率
f_{11} 、 f_{22} 、 f_{23} 、 f_{33}	蠕滑力系数
T_{1j} 、 T_{2j} 、 M_{3j} ($j=1-4$)	纵向横向蠕滑力及自旋蠕滑力矩
F_j ($j=1-4$)	轮缘力
μ_1 、 μ_2	轮缘摩擦系数及踏面摩擦系数
(3) 轨道	
R 、 H 、 S	轨道曲线半径、外轨超高及轨距
b	两股钢轨中心距之半
a	钢轨单元长度(即枕跨距)
$N-1$	轨道计算段枕跨数
E 、 I_z 、 I_y	钢轨钢弹性模量及钢轨截面绕Z轴和Y轴的惯性矩
M_r 、 M_s 、 J_s	钢轨单位长度质量、轨枕半质量及轨枕转动惯量
K_{1r} 、 K_{2r} 、 K_{1s} 、 K_{2s}	扣件及道床横向和垂向刚度
C_{1r} 、 C_{2r} 、 C_{1s} 、 C_{2s}	扣件及道床横向和垂向阻尼
Z_r 、 θ_y	钢轨梁单元节点变量, 垂向位移及绕Y轴的转角
Y_r 、 θ_z	钢轨梁单元节点变量, 横向位移及绕Z轴的转角
Z_s 、 Y_s 、 ϕ_s	轨枕垂向、横向位移及侧滚角
η_j ($j=1-4$)	轨面不平顺(下凹)函数, 单波取为余弦型
$\eta_j(x) = \Delta / 2 [1 - \cos(2\pi x / \Omega)]$	(3-1)

Δ 为波深, Ω 为波长。连续波取为正弦型

$$\eta_j(x) = \Delta / 2 \times \sin(2\pi x / \Omega) \quad (3-2)$$

其它未作说明的下标r代表右轨(即内轨)或右侧车轮, 1代表左轨(外轨)或左侧车轮。

§ 3.4 钢轨梁的有限单元和无限单元

采用变分形式的最小势能原理建立钢轨单元的振动方程并推导单元质量、刚度和阻尼矩阵。

无论是轮轨系统还是钢轨单元, 振动能量满足哈密尔顿原理:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = 0 \quad (3-3)$$

式(3-3)中: T—系统总动能

U—系统总势能

W—系统内保守力和非保守广义力 Q_i 在广义位移 q_i 上所作的虚功, 且有:

$$\delta W = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i \quad (3-4)$$

只要分别求出钢轨梁单元振动的动能、势能及外力作功，依据式(3-3)可以导出梁单元的单元矩阵。同样，应用式(3-3)也可导出整个轮轨系统的振动方程组。

在现有轮轨振动分析模型中，轨道总是截取有限长度。截取处的边界条件或取为固定端或取为自由端，与实际情况存在较大差异。因此边界条件的影响较大，靠近边界相当长的一段轨道上的计算数据是失真的。本文模型为消除截取有限轨道长度所带来的边界效应，采用有限单元与无限单元相结合的求解方法。在轨道计算段中采用有限单元，在计算段的两端，采用长度为半无限长的无限梁单元。

§ 3.4.1 钢轨梁有限单元的单元矩阵

每一双向可弯梁单元有两个节点，每一节点有垂向、横向位移及绕X、Z轴的转角，形成梁单元节点未知量列阵：

$$\{u_j\}^e = [Y_j, Z_j, \theta_{zj}, \theta_{yj}, Y_{j+1}, Z_{j+1}, \theta_{z(j+1)}, \theta_{y(j+1)}]^T \quad (3-5)$$

梁单元上任意点处的位移可表达成位移形函数与节点未知量列阵的积：

$$\begin{Bmatrix} Y_j \\ Z_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \{u_j\}^e \quad (3-6)$$

其中 $N_1 \sim N_4$ 为梁单元形函数。

由于梁单元的垂向和横向位移相互不耦合，所以单元矩阵可按单向弯曲梁推导，并按节点位移顺序组建。

单向可弯梁的节点位移列阵、形函数及单元内任意一点的位移为：

$$\begin{aligned} \{q\}^e &= [w_j, q_j, w_{j+1}, q_{j+1}]^T \\ [N] &= [N_1, N_2, N_3, N_4] \\ w(x) &= [N]\{q\}^e \end{aligned} \quad (3-7)$$

形函数在赫米特(Hermite)插值函数中选择[88]。m个离散点上包含位移的第0~N阶导数的赫米特插值函数的通式为：

$$w(x) = \sum_{j=1}^m [H_{0j}^{(N)}(x)w(x) + H_{1j}^{(N)}w'(x) + \dots + H_{Nj}^{(N)}w^{(N)}(x)] \quad (3-8)$$

对于两节点梁单元， $m=2$ ，要求节点处梁的位移及转角（一阶导数）连续，因此 $N=1$ ，赫米特一阶插值函数为：

$$w(x) = \sum_{j=1}^2 [H_{0j}^{(1)}(x)w(x) + H_{1j}^{(1)}w'(x)] \quad (3-9)$$

且有：

$$H_{0j}^{(1)}(x) = [1 - 2f'_j(x_j)(x - x_j)][f_j(x)]^2 \quad (3-10)$$

$$H_{1j}^{(1)}(x) = (x - x_j)[f_j(x)]^2$$

其中的拉格朗日插值函数为：

$$f_j(x) = \frac{L(x)}{(x - x_j)L'(x)} \quad (3-11)$$

$$L(x) = (x - x_1)(x - x_2)$$

取 $x_1=0$ 、 $x_2=a$ ，经推导可得到形函数为（其中 x 为单元上各点至该单元起点的坐标）：

$$N_1 = 1 - 3\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{a}\right)^3$$

$$N_2 = x\left[1 - 2\left(\frac{x}{a}\right) + 2\left(\frac{x}{a}\right)^2\right] \quad (3-12)$$

$$N_3 = \left(\frac{x}{a}\right)^2\left[3 - 2\left(\frac{x}{a}\right)\right]$$

$$N_4 = x\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{x}{a}\right)\right]$$

梁单元振动时的动能：

$$\begin{aligned}
 T &= \int_0^a \frac{1}{2} m_r w^2(x) dx \\
 &= \frac{1}{2} \{q\}^{eT} \left[\int_0^a m_r [N]^T [N] dx \right] \{q\}^e \\
 &= \frac{1}{2} \{q\}^{eT} [m]^e \{q\}^e
 \end{aligned} \tag{3-13}$$

从而得到钢轨梁单元的单元质量矩阵如式(3-14), 其中 $A=M_r a/420$.

$$[m]^e = \begin{bmatrix} 156A & & & & & & \\ 0 & 156A & & & & & \\ 22Aa & 0 & 4Aa^2 & & & & \\ 0 & 22Aa & 0 & 4Aa^2 & & & \\ 54A & 0 & 13Aa & 0 & 156A & & \\ 0 & 54A & 0 & 13Aa & 0 & 156A & \\ -13Aa & 0 & -3Aa^2 & 0 & -22Aa & 0 & 4Aa^2 \\ 0 & -13Aa & 0 & -3Aa^2 & 0 & -22Aa^2 & 0 & 4Aa^2 \end{bmatrix} \tag{3-14}$$

梁单元振动时的弯曲应变能为:

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \int_0^a \frac{1}{2} EJ [w''(x)]^2 dx \\
 &= \frac{1}{2} \{q\}^{eT} \int_0^a EJ [N'']^T [N''] dx \{q\}^e \\
 &= \frac{1}{2} \{q\}^{eT} [k_1]^e \{q\}^e
 \end{aligned} \tag{3-15}$$

可得到梁单元的单元刚度矩阵如式(3-16), 其中 $C=EJ_z/a^3$, $D=EJ_y/a^3$.

$$[k_1]^e = \begin{bmatrix} 12C & & & & & & & \\ 0 & 12D & & & & & & \\ 6Ca & 0 & 4Ca^2 & & & & & \\ 0 & 6Da & 0 & 4Da^2 & & & & \\ -12C & 0 & -6Ca & 0 & 12C & & & \\ 0 & -12D & 0 & -6Da & 0 & 12D & & \\ 6Ca & 0 & 2Ca^2 & 0 & -6Ca & 0 & 4Ca^2 & \\ 0 & 6Da & 0 & 2Da^2 & 0 & -6Da & 0 & 4Da^2 \end{bmatrix} \quad (3-16)$$

§ 3.4.2 钢轨梁无限单元的单元矩阵

对于无限梁单元，轨道简化为连续弹性支承，将轨枕质量按跨距分布后加于钢轨上，扣件及道床的垂向及横向弹性、阻尼按串联组合。

对于图3-6A) 中所示的无限梁单元，选取适当的映射函数，可以映射成图3-6B) 中的三节点有限梁单元，作这种映射处理的无限元叫做映射无限元[77]，图3-6A) 称为子单元（无限元），图3-6B) 称为母单元（有限元）。

无限元与有限元间的坐标转换可采用标准的插值函数：

$$x(\zeta) = \sum_{j=1}^2 M_j(\zeta) x_j \quad (3-17)$$

其中 $M_j(\xi)$ 为映射函数，依据子单元坐标 $x=x_1, x_2, \infty$ 对应母单元坐标 $\xi=-1, 0, 1$ 的映射关系及：

$$\sum_{j=1}^2 M_j = 1 \quad (3-18)$$

的性质，确定映射函数为：

$$M_1 = -2\xi / (1-\xi), \quad M_2 = (1+\xi) / (1-\xi) \quad (3-19)$$

子单元的坐标极点（或原点）可在单元体外任意选取。为方便起见，选取 $x_1=a$ 、 $x_2=2x_1=2a$ ，得到子单元和母单元的坐标变换关系为：

$$x = \frac{2a}{1-\zeta}, \quad \zeta = 1 - \frac{2a}{x} \quad (3-20)$$

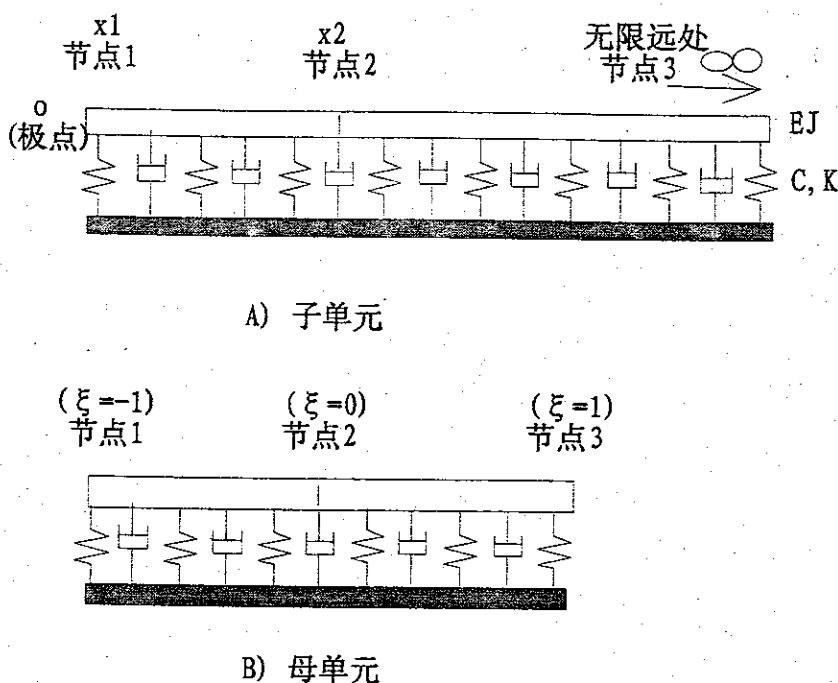


图3-6 无限元与有限元的映射关系

首先分析母单元的情况。与前述两节点有限梁单元的情况类似，先分析单向可弯梁，双向可弯梁可按节点位移顺序组建单元矩阵。

图3-6B所示为一个三节点弹性地基梁单元。根据赫米特插值通式(3-8)可以确定三节点($m=3$)的一阶赫米特插值多项式为其形函数，将式(3-9)中的求和符号改为 $j=1 \sim 3$ 即为三节点梁单元的位移表达式，插值函数的形式仍为式(3-10)，只是式(3-11)拉格朗日插值函数中的 L 变为：

$$L(\zeta) = (\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2)(\zeta - \zeta_3) \quad (3-21)$$

通过推导得到母单元的6个形函数为式(3-22)，应用坐标变换将式(3-22)所列的关于坐标 ζ 形函数转变为关于坐标 x 的形函数，可得到子单元的位移表达式如式(3-23)。

$$\begin{aligned}
 N_1(\zeta) &= H_{01}^{(1)}(\zeta) = \frac{1}{4}(4+3\zeta)\zeta^2(\zeta-1)^2 \\
 N_2(\zeta) &= H_{11}^{(1)}(\zeta) = \frac{1}{4}(\zeta+1)\zeta^2(\zeta-1)^2 \\
 N_3(\zeta) &= H_{02}^{(1)}(\zeta) = (1-4\zeta)(\zeta+1)^2(\zeta-1)^2 \\
 N_4(\zeta) &= H_{12}^{(1)}(\zeta) = \zeta(\zeta+1)^2(\zeta-1)^2 \\
 N_5(\zeta) &= H_{03}^{(1)}(\zeta) = \frac{1}{4}(4-3\zeta)\zeta^2(\zeta+1)^2 \\
 N_6(\zeta) &= H_{13}^{(1)}(\zeta) = \frac{1}{4}(\zeta-1)\zeta^2(\zeta+1)^2
 \end{aligned}$$

(3-22)

$$w(x) = \sum_{j=1}^6 N_j q_j = [N] \{q\}^e \quad (3-23)$$

其中位移列阵:

$$\{q\}^e = [w_1, \theta_1, w_2, \theta_2, w_3, \theta_3]^T \quad (3-24)$$

子单元的第3节点处于无限远处, 位移和转角均应为零, 式(3-23)变为:

$$w(x) = \sum_{j=1}^4 N_j q_j = [N]_4 \{q\}_4^e \quad (3-25)$$

其中:

$$[N]_4 = [N_1, N_2, N_3, N_4] \quad (3-26)$$

$$\{q\}_4^e = [w_1, \theta_1, w_2, \theta_2]^T$$

因此, 无限梁单元的单元质量矩阵、单元阻尼矩阵以及由地基弹性产生的单元刚度矩阵分别为:

$$\begin{aligned}
 [m]^e &= m_{eq} \int_{x_i}^{\infty} [N]_4^T [N]_4 dx = m_{eq} [R] \\
 [c]^e &= c_{eq} [R]
 \end{aligned}
 \quad (3-27)$$

$$[k_2]^e = k_{eq} [R]$$

其中 m_{eq} 、 c_{eq} 、 k_{eq} 分别为连续弹性支承的等效分布质量、分布阻尼及钢轨基础弹性系数。

引入坐标变换，有：

$$[R] = \int_{x_1}^{\infty} [N]_4^T [N]_4 dx = \int_{-1}^1 [N]_4^T [N]_4 / J / d\zeta \quad (3-28)$$

其中/J/为坐标变换的雅可比矩阵的行列式，对于一维坐标变换，雅可比矩阵只有一个元素J，且：

$$J = \frac{2a}{(1-\zeta)^2} \quad (3-29)$$

因此，

$$[R] = \int_{-1}^1 [N]_4^T [N]_4 \frac{2a}{(1-\zeta)^2} d\zeta \quad (3-30)$$

将式(3-22)所示的形函数代入式(3-30)，通过复杂的积分推导得到：

$$[R] = a \begin{bmatrix} 0.2286 \\ 0.0333 & 0.0064 \\ 0 & -0.0254 & 4.0635 \\ 0.0762 & 0.0254 & -1.0159 & 0.4064 \end{bmatrix} \quad (3-31)$$

双向可弯无限梁单元的单元矩阵分别如式(3-32)~(3-34)，其中C₁、C₂分别为连续支承轨道横向和垂向的分布阻尼，k₁、k₂分别连续支承轨道横向和垂向的分布刚度。

$$[m]^e = m_r a \begin{bmatrix} 0.23 \\ 0 & 0.23 \\ 0.033 & 0 & 0.0064 \\ 0 & 0.033 & 0 & 0.0064 \\ 0 & 0 & -0.025 & 0 & 4.06 \\ 0 & 0 & 0 & -0.025 & 0 & 4.06 \\ 0.076 & 0 & 0.025 & 0 & -1.02 & 0 & 0.41 \\ 0 & 0.076 & 0 & 0.025 & 0 & -1.02 & 0 & 0.41 \end{bmatrix} \quad (3-32)$$

$$[C]^e = a \begin{bmatrix} 0.23C_1 & & & & & & & \\ 0 & 0.23C_2 & & & & & & \\ 0.033C_1 & 0 & 0.0064C_1 & & & & & \\ 0 & 0.033C_2 & 0 & 0.0064C_2 & & & & \\ 0 & 0 & -0.025C_1 & 0 & 4.06C_1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & -0.025C_2 & 0 & 4.06C_2 & & \\ 0.076C_1 & 0 & 0.025C_1 & 0 & -1.02C_1 & 0 & 0.41C_1 & \\ 0 & 0.076C_2 & 0 & 0.025C_2 & 0 & -1.02C_2 & 0 & 0.41C_2 \end{bmatrix} \quad (3-33)$$

$$[k_1]^e = a \begin{bmatrix} 0.23k_1 & & & & & & & \\ 0 & 0.23k_2 & & & & & & \\ 0.033k_1 & 0 & 0.0064k_1 & & & & & \\ 0 & 0.033k_2 & 0 & 0.0064k_2 & & & & \\ 0 & 0 & -0.025k_1 & 0 & 4.06k_1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & -0.025k_2 & 0 & 4.06k_2 & & \\ 0.076k_1 & 0 & 0.025k_1 & 0 & -1.02k_1 & 0 & 0.41k_1 & \\ 0 & 0.076k_2 & 0 & 0.025k_2 & 0 & -1.02k_2 & 0 & 0.41k_2 \end{bmatrix} \quad (3-34)$$

由无限梁单元弯曲产生的梁单元刚度矩阵为:

$$[k_2]^e = \int_{x_1}^{\infty} EJ[N'']_4^T [N'']_4 dx = \int_{-1}^1 EJ[N'']_4^T [N'']_4 / J / d\zeta \quad (3-35)$$

由于形函数是坐标 ξ 的显函数、坐标 x 的隐函数，所以式(3-35)中形函数对坐标 x 的导数必须转化为对 ξ 的导数，依据隐函数的求导法则得到：

$$N''_j = \frac{d^2N}{dx^2} = \frac{1}{J^3} \left(\frac{d^2N}{d\xi^2} J - \frac{dN}{d\xi} \frac{dJ}{d\xi} \right) \quad (3-36)$$

将式(3-36)代入式(3-35)并通过复杂的推导，可得到：

$$[k_2]^e = \frac{E}{a} \begin{bmatrix} 73.8J_z & & & & & & & \\ 0 & 73.8J_y & & & & & & \\ 45.2J_z & 0 & 34.1J_z & & & & & \\ 0 & 45.2J_y & 0 & 34.1J_y & & & & \\ -241.5J_z & 0 & -135.6J_z & 0 & 828.6J_z & & & \\ 0 & -241.5J_y & 0 & -135.6J_y & 0 & 828.6J_y & & \\ 46.3J_z & 0 & 24.9J_z & 0 & -163.8J_z & 0 & 32.4J_z & \\ 0 & 46.3J_y & 0 & 24.9J_y & 0 & -162.8J_y & 0 & 32.4J_y \end{bmatrix} \quad (3-37)$$

双向可弯梁单元刚度矩阵为 $[k_1]^e$ 与 $[k_2]^e$ 的和。

组建系统总质量矩阵、总刚度矩阵及总阻尼矩阵时，对于轨道计算段两侧边界单元，以式(3-32)、(3-33)、(3-34)+(3-37)作为单元矩阵。

本文所采用的映射无限单元，由于无限单元矩阵与有限元单元矩阵的阶数相同，在程序中组建系统振动方程组时，可将无限单元与有限单元一样对待，处理方法也完全相同，应用极为方便。

§ 3.5 系统动能、弹性势能的一阶变分及阻尼力虚功

1. 系统动能及其一阶变分

图3-4所示的轮轨系统振动模型的总动能为：

$$\begin{aligned} T = & 1/2 \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ \dot{\bar{u}}_i \right\}^e T \left[M_i \right] \left\{ \dot{\bar{u}}_i \right\}^e + 1/2 \sum_{i=N+1}^{2N-1} \left\{ \dot{\bar{u}}_i \right\}^e T \left[M_i \right] \left\{ \dot{\bar{u}}_i \right\}^e \\ & + 1/2 \sum_{i=1}^N [M_s \dot{Z}_{si}^2 + M_s \dot{Y}_{si}^2 + J_s \dot{\Psi}_{si}^2] \\ & + 1/2 \sum_{i=1}^2 [M_w \dot{Y}_i^2 + M_w \dot{Z}_y^2 + J_{w\phi} \dot{\Phi}_{wi}^2 + J_{w\psi} \dot{\Psi}_{wi}^2] \\ & + 1/2 [M_b \dot{Z}_b^2 + M_b \dot{Y}_b^2 + J_{b\phi} \dot{\Phi}_b^2 + J_{b\psi} \dot{\Psi}_b^2 + J_{b\xi} \dot{\zeta}_b^2 + M_c \dot{Z}_c^2] \end{aligned}$$

$$+1/2 \sum_{i=1}^4 J_{w\theta} \dot{\theta}_i^2 + 1/2 \sum_{i=1}^4 J_{w\beta} \dot{\beta}_i^2 \quad (3-38)$$

应用分部积分对动能进行变分运算，如：

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} T dt &= \int_{t_1}^{t_2} M \dot{Y} \delta \dot{Y} dt \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} M \ddot{Y} \delta Y dt + M \dot{Y} \delta Y \Big|_{t_1}^{t_2} \end{aligned} \quad (3-39)$$

由于对应 t_1 、 t_2 两已知时刻，振动是确定的，变分为 0，所以有：

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = \int_{t_1}^{t_2} -M \ddot{Y} dt \quad (3-40)$$

$$\delta T = -M \ddot{Y} \delta Y$$

因此：

$$\begin{aligned} -\delta T &= \sum_{i=1}^{N-1} \{\delta u_i\}^{eT} [M_i] \left\{ \dot{u}_i \right\}^e + \sum_{i=N+1}^{2N-1} \{\delta u_i\}^{eT} [M_i] \left\{ \dot{u}_i \right\}^e \\ &\quad + \sum_{i=1}^N [M_s \ddot{Z}_{si} \delta Z_{si} + M_s \ddot{Y}_{si} \delta Y_{si} + J_s \ddot{\psi}_s \delta \psi_{si}] \\ &\quad + \sum_{i=1}^2 [M_w \ddot{Y}_{wi} \delta Y_{wi} + M_w \ddot{Z}_{wi} \delta Z_{wi} + J_{w\phi} \ddot{\phi}_{wi} \delta \phi_{wi} + J_{w\psi} \ddot{\psi}_{wi} \delta \psi_{wi}] \\ &\quad + [M_b \ddot{Z}_b \delta Z_b + M_b \ddot{Y}_b \delta Y_b + J_{b\phi} \ddot{\phi}_b \delta \phi_b + J_{b\psi} \ddot{\psi}_b \delta \psi_b] \\ &\quad + J_{b\xi} \ddot{\xi}_b \delta \xi_b + M_c \ddot{Z}_c \delta Z_c \\ &\quad + \sum_{i=1}^4 J_{w\theta} \ddot{\theta}_i \delta \theta_i + \sum_{i=1}^4 J_{w\beta} \ddot{\beta}_i \delta \beta_i \end{aligned} \quad (3-41)$$

依据式(3-41)由计算机对号入座形成总质量矩阵 $[M]$ 。

2. 应变能及其一阶变分

系统总应变能包括钢轨梁单元、弹性支承、转向架各悬挂变形位能（未包含轮轨接触弹簧的应变能），总应变能的表达式为：

$$\begin{aligned}
U = & 1/2 \sum_{i=1}^{N-1} \{u_i\}^e T [K_i]^e \{u_i\}^e + 1/2 \sum_{i=N+1}^{2N-1} \{u_i\}^e T [K_i]^e \{u_i\}^e \\
& + 1/2 \sum_{i=1}^N K_{lr} [(Y_{si} - Y_{ri})^2 + (Y_{si} - Y_{r(N+i)})^2] \\
& + 1/2 \sum_{i=1}^N K_{2r} [Z_{si} - b\psi_{si} - Z_{ri}]^2 + (Z_{si} + b\psi_{si} - Z_{r(N+i)})^2 \\
& + 1/2 \sum_{i=1}^N [2K_{ls} Y_{si}^2 + K_{2s} (Z_{si} - b\psi_{si})^2 + K_{2s} (Z_{si} + b\psi_{si})^2] \\
& + 1/2 \sum_{i=1}^4 K_{ly} [Y_b + (-1)^{(i-1)/2} \phi_b L_1 - H_4 \psi_b - \frac{L_1^2}{2R} - Y_{w(1+\frac{i-1}{2})}]^2 \\
& + 1/2 \sum_{i=1}^4 K_{lx} [(-1)^{i+1} \phi_{w(1+\frac{i-1}{2})} b_1 + (-1)^{(3i+1)/2} \frac{b_1 L_1}{R} - (-1)^{i+1} \phi_b b_1]^2 \\
& + 1/2 \sum_{i=1}^4 K_{lz} [Z_b + (-1)^{\frac{i-1}{2}} \xi_b L_1 + (-1)^i \psi_b b_1 - Z_{w(1+\frac{i-1}{2})} \\
& - (-1)^i b_1 \psi_{w(1+\frac{i-1}{2})} - (-1)^i L_b \beta_i]^2 \\
& + 1/2 K_{2z} (Z_c - Z_b)^2 + 1/2 K_{2\phi} \dot{\phi}_{bb}^2 + 1/2 K_{2\psi} \dot{\psi}_b^2 + 1/2 K_{2\xi} \dot{\xi}_b^2 \\
& + 1/2 K_{2y} Y_b^2 + 1/2 \sum_{i=1}^2 K_{w\theta} (\theta_{2i-1} - \theta_{2i})^2 + 1/2 \sum_{i=1}^2 K_{w\beta} (\beta_{2i-1} - \beta_{2i})^2 \quad (3-42)
\end{aligned}$$

对应变能表达式进行一阶变分，得到：

$$\begin{aligned}
\delta U = & \sum_{i=1}^{N-1} \{\delta u_i\}^e T [K_i]^e \{u_i\}^e + \sum_{i=N+1}^{2N-1} \{\delta u_i\}^e T [K_i]^e \{u_i\}^e \\
& + \sum_{i=1}^N K_{lr} [(Y_{si} - Y_{ri})(\delta Y_{si} - \delta Y_{ri}) + (Y_{si} - Y_{r(N+i)})(\delta Y_{si} - \delta Y_{r(N+i)})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^N K_{2r} [(Z_{si} - b\psi_{si} - Z_{ri})(\delta Z_{si} - b\delta\psi_{si} - \delta Z_{ri}) \\
& + \sum_{i=1}^N K_{2r} (Z_{si} + b\psi_{si} - Z_{r(N+i)})(\delta Z_{si} + b\delta\psi_{si} - \delta Z_{r(N+i)}) \\
& + \sum_{i=1}^N [2K_{ls} Y_{si} \delta Y_{si} + K_{2s} (Z_{si} - b\psi_{si})(\delta Z_{si} - b\delta\psi_{si})] \\
& + \sum_{i=1}^N K_{2s} (Z_{si} + b\psi_{si})(\delta Z_{si} + b\delta\psi_{si}) \\
& + \sum_{i=1}^4 K_{ly} [Y_b + (-1)^{(i-1)/2} \phi_b L_1 - H_4 \psi_b - \frac{L_1^2}{2R} - Y_{w(1+\frac{i-1}{2})}] \\
& \times [\delta Y_b + (-1)^{(i-1)/2} L_1 \delta \phi_b - H_4 \delta \psi_b - \delta Y_{w(1+\frac{i-1}{2})}] \\
& + \sum_{i=1}^2 K_{lx} [(-1)^{i+1} \phi_{w(1+\frac{i-1}{2})} b_1 + (-1)^{(3i+1)/2} \frac{b_1 L_1}{R} - (-1)^{i+1} \phi_b b_1] \\
& \times [(-1)^{i+1} \delta \phi_{w(1+\frac{i-1}{2})} b_1 - (-1)^{i+1} \delta \phi_b b_1] \\
& + \sum_{i=1}^4 K_{1z} [Z_b + (-1)^{\frac{i-1}{2}} \xi_b L_1 + (-1)^i \psi_b b_1 - Z_{w(1+\frac{i-1}{2})} - (-1)^i b_1 \psi_{w(1+\frac{i-1}{2})} \\
& - (-1)^i L_\beta \beta_i] \times [\delta Z_b + (-1)^{\frac{i-1}{2}} \delta \xi_b L_1 \\
& + (-1)^i \delta \psi_b b_1 - \delta Z_{w(1+\frac{i-1}{2})} - (-1)^i b_1 \delta \psi_{w(1+\frac{i-1}{2})} - (-1)^i L_\beta \delta \beta_i] \\
& + K_{2z} (Z_c - Z_b) (\delta Z_c - \delta Z_b) \\
& + K_{2\phi} \phi_b \delta \phi_b + K_{2\psi} \psi_b \delta \psi_b + K_{2\xi} \xi_b \delta \xi_b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + K_{2y} Y_b \delta Y_b + \sum_{i=1}^2 K_{w\theta} (\theta_{2i-1} - \theta_{2i}) (\delta \theta_{2i-1} - \delta \theta_{2i}) \\
 & + \sum_{i=1}^2 K_{w\beta} (\beta_{2i-1} - \beta_{2i}) (\delta \beta_{2i-1} - \delta \beta_{2i})
 \end{aligned} \tag{3-43}$$

依据式(3-43)可对总刚度矩阵[K]的各元素赋值。

3. 阻尼力虚功

各单元间阻尼元件的阻尼力所作的虚功表达式为:

$$-\delta W_t = \sum_{i=1}^N C_{lr} [(\dot{Y}_{si} - \dot{Y}_{ri})(\delta Y_{si} - \delta Y_{ri}) + (\dot{Y}_{si} - \dot{Y}_{r(N+i)}) (\delta Y_{si} - \delta Y_{r(N+i)})]$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i=1}^N C_{2r} [(\dot{Z}_{si} - b \dot{\psi}_{si} - \dot{Z}_{ri}) (\delta Z_{si} - b \delta \psi_{si} - \delta Z_{ri}) \\
 & + \sum_{i=1}^N C_{2r} (\dot{Z}_{si} + b \dot{\psi}_{si} - \dot{Z}_{r(N+i)}) (\delta Z_{si} + b \delta \psi_{si} - \delta Z_{r(N+i)})]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i=1}^N [2C_{ls} \dot{Y}_{si} \delta Y_{si} + C_{2s} (\dot{Z}_{si} - b \dot{\psi}_{si}) (\delta Z_{si} - b \delta \psi_{si})] \\
 & + \sum_{i=1}^N C_{2s} (\dot{Z}_{si} + b \dot{\psi}_{si}) (\delta Z_{si} + b \delta \psi_{si})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i=1}^4 C_{1z} [\dot{Z}_b + (-1)^{\frac{i-1}{2}} \dot{\xi}_b L_1 + (-1)^i \dot{\psi}_b b_1 - \dot{Z}_{w(1+\frac{i-1}{2})} \\
 & - (-1)^i b_1 \dot{\psi}_{w(1+\frac{i-1}{2})} - (-1)^i L_\beta \dot{\beta}_i] \times [\delta Z_b + (-1)^{\frac{i-1}{2}} \delta \xi_b L_1 \\
 & + (-1)^i \delta \psi_b b_1 - \delta Z_{w(1+\frac{i-1}{2})} - (-1)^i b_1 \delta \psi_{w(1+\frac{i-1}{2})} - (-1)^i L_\beta \delta \beta_i]
 \end{aligned}$$

$$+ C_{2z} (\dot{Z}_c - \dot{Z}_b) (\delta Z_c - \delta Z_b) \tag{3-44}$$

$$+ C_{2\phi} \dot{\phi}_b \delta \phi_b + C_{2\psi} \dot{\psi}_b \delta \psi_b + C_{2\xi} \dot{\xi}_b \delta \xi_b + C_{2y} \dot{Y}_b \delta Y_b$$

依据式(3-44)在计算机中自动对总阻尼矩阵[C]赋值。

§ 3.6 蠕滑力虚功

一、轮轨间蠕滑力的表达式

1. 轮轨间纵向、横向及自旋蠕滑率依定义为^[121]:

$$\begin{aligned}\gamma_{1j} &= \frac{V'_{xj} - V_{xj}}{V} \\ \gamma_{2j} &= \frac{V'_{yj} - V_{yj}}{V} \\ \omega_{3j} &= \frac{\Omega'_{3j} - \Omega_{3j}}{V}\end{aligned}\quad (3-45)$$

式中角标j=1~4, 为四个车轮的编号, 1、3和2、4分别表示曲线外轨与外侧车轮、内轨与内侧车轮间的蠕滑率, 1轮为导向轮(参见图3-5)。钢轨在轮轨接触点处的速度分量为:

$$\begin{aligned}V'_{xj} &= V + (-1)^{j+1} \frac{bV}{R} + (-1)^{j+1} b \dot{\phi}_{w(l+\frac{j-1}{2})} \\ V'_{yj} &= \dot{Y}_j \\ \Omega'_{3j} &= 0\end{aligned}\quad (3-46)$$

车轮在轮轨接触点处的速度分量为:

$$\begin{aligned}V_{xj} &= \frac{r_j V}{r_0} + \dot{\theta}_j r_j \\ V_{yj} &= V \phi_{w(l+\frac{j-1}{2})} - \dot{Y}_{w(l+\frac{j-1}{2})} - (-1)^j r_0 \dot{\beta}_j \\ \Omega_{3j} &= (-1)^{j+1} \dot{\theta}_0 \sin[\delta_j + (-1)^{j+1} \varepsilon_j] - (\dot{\alpha} + \dot{\phi}_w)\end{aligned}\quad (3-47)$$

式(3-47)中, δ_j 为各车轮与钢轨踏面间的接触角, ε_j 是因轮对横移、侧滚及摇头造成的轮轨踏面接触角的变化量, $\dot{\alpha}$ 为转向架在曲线轨道上整体转动的角速度, 且:

$$\dot{\alpha} = V/R \quad (3-48)$$

$\dot{\theta}_0$ 是轮对滚动角速度, 对于锥形轮踏面, 可作近似处理:

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_0 &= V/r_0 \\ \varepsilon_j &= 0 \\ \delta_j &= \lambda\end{aligned} \quad (3-49)$$

则有:

$$\Omega_{3j} = (-1)^{j+1} \frac{V\lambda}{r_0} - \left(\frac{V}{R} + \dot{\phi}_{w(l+\frac{j-1}{2})} \right) \quad (3-50)$$

因此轮轨间的纵向蠕滑率可写为:

$$\gamma_{1j} = 1 + (-1)^{j+1} \frac{b}{R} + (-1)^{j+1} \frac{b}{V} \dot{\phi}_{w(l+\frac{j-1}{2})} - \frac{r_j}{r_0} - \frac{r_j}{V} \dot{\theta}_j \quad (3-51)$$

式(3-51)中, r_j 表示各车轮的瞬间滚动半径, 且有:

$$r_j = r_0 + (-1)^j \lambda Y_{w(l+\frac{j-1}{2})} + (-1)^{j+1} \lambda Y_j + (-1)^{j+1} r_0 \lambda \beta_j \quad (3-52)$$

将式(3-52)代入式(3-51)即可得到纵向蠕滑率。

轮轨间的横向蠕滑率为:

$$\gamma_{2j} = -\frac{\dot{Y}_j}{V} + \frac{1}{V} \dot{Y}_{w(l+\frac{j-1}{2})} - \dot{\phi}_{w(l+\frac{j-1}{2})} - \frac{r_0 \beta_j}{V} \quad (3-53)$$

自旋蠕滑率为:

$$\omega_{3j} = (-1)^j \frac{\lambda}{r_0} + \frac{1}{R} + \frac{1}{V} \dot{\phi}_{w(l+\frac{j-1}{2})} \quad (3-54)$$

2. 蠕滑力

已知蠕滑率, 可依据蠕滑力系数求得作用在车轮上的蠕滑力和力矩:

$$\begin{aligned}T_{1j} &= -f_{11j} \gamma_{1j} \\ T_{2j} &= -f_{22j} \gamma_{2j} - f_{23j} \omega_{3j} \\ M_{3j} &= f_{23j} \gamma_{2j} - f_{33j} \omega_{3j}\end{aligned} \quad (3-55)$$

式(3-55)中的蠕滑力系数 f_{1mj} ($l, m=1 \sim 3, j=1 \sim 4$)，可在每一步计算中根据轮轨垂向接触力 P_j 计算接触区域尺寸，依据Kalker方法[121] (式3-56)计算得到。

$$\begin{aligned} f_{11j} &= E a_j b_j C_{11j} \\ f_{22j} &= E a_j b_j C_{22j} \\ f_{23j} &= E (a_j b_j)^{3/2} C_{23j} \\ f_{33j} &= E (a_j b_j)^2 C_{33j} \end{aligned} \quad (3-56)$$

式(3-56)中 a_j 、 b_j 为各接触椭圆的长半轴和短半轴，可由赫兹接触理论计算得到， C_{1mj} 为无量纲的系数，与泊桑比及 a_j/b_j 有关。计算时，考虑到轮轨间实际的蠕滑力系数比理论值低，将式(3-56)理论计算值折半[137]。

3. 磨耗功

依据式(3-51)~(3-55)计算得到蠕滑率和蠕滑力后，轮轨踏面间的磨耗功可以从式(3-56*)中得到。

$$W_j = |T_{1j}\gamma_{1j}| + |T_{2j}\gamma_{2j}| + |M_{3j}\omega_{3j}| \quad (3-56*)$$

由于磨耗功值综合反映了轮轨系统中所有动力因素对钢轨磨损的影响，因此，本文在对钢轨波磨成因和发展过程的研究中，始终以磨耗功为研究对象。磨耗功大的地方钢轨磨损大，磨耗功小的地方钢轨磨损小。磨耗功的波动频率与波磨波长相对应。影响磨耗功的因素即为影响钢轨波磨的生成和发展的因素。减缓波磨的措施也即是降低磨耗功波动值的措施。

二、蠕滑力饱和判断及饱和后的曲线型式

当合成蠕滑力未超过库仑静摩擦力时，轮轨间没有相对滑动；当合成蠕滑力等于或大于库仑摩擦力时，蠕滑力达到饱和，轮轨粘着被破坏而出现滑动，蠕滑力即成为摩擦力。

首先计算合成蠕滑力：

$$T_{Rj} = \sqrt{T_{1j}^2 + T_{2j}^2} \quad (3-57)$$

当 T_{Rj} 小于或等于 $3\mu_2 P_j$ 时，采用Johnson三次曲线[137]对蠕滑力进行修正迭代：

$$T'_{Rj} = T_{Rj} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{T_{Rj}}{\mu_2 P_j} \right) + \frac{1}{27} \left(\frac{T_{Rj}}{\mu_2 P_j} \right)^2 \right] \quad (3-58)$$

当 T_{Rj} 大于 $3\mu_2 P_j$ 时，轮轨间出现滑动。一般情况下，因动摩擦力小于最大静摩擦力，且随着相对滑动速度和加速度的增加，动摩擦力进一步减小。因此，合理选取饱和后蠕滑力～蠕滑率曲线必须考虑到动滑动摩擦力的特性。

关于滑动摩擦力与滑动速度和加速度的关系，许多研究者进行过大量的研究，文[69]中总结了一些研究成果。摩擦力表达式中一般只包含滑动速度，而将加速度的影响划分为加速滑动段和减速滑动段两部分。摩擦力与滑动速度的一般关系为：

$$\begin{aligned} F_{k1} &= F_{k\min} + (F_s - F_{\min}) e^{-\gamma V_r^{\delta}} \\ F_{k2} &= F_{k\min} + (F_0 - F_{\min}) e^{-\gamma V_r^{\delta}} \end{aligned} \quad (3-59)$$

式(3-59)中：

F_{k1} 、 F_{k2} —— 分别为加速滑动和减速滑动段的摩擦力

$F_{k\min}$ —— 因滑动致使摩擦力下降到的最小摩擦力值

F_s —— 最大静摩擦力

F_0 —— 减速滑动段最大摩擦力

V_r —— 滑动速度

γ 、 δ —— 试验常数

由于 F_0 与 $F_{k\min}$ 相差较小，一般认为两者相等，式(3-59)变为：

$$\begin{aligned} F_{k1} &= F_{k\min} + (F_s - F_{\min}) e^{-\gamma V_r^{\delta}} \\ F_{k2} &= F_{k\min} \end{aligned} \quad (3-60)$$

如将式(3-60)中的第一式进行泰劳级数展开，就能得到更为常用的关于滑动速度的一次或二次多项式。

为了将式(3-60)的摩擦与滑动速度的关系应用于蠕滑力饱和阶段，须对其中各种系数逐项确定。关于指数 δ ，西蒙斯[69]试验测得钢对钢接触时， $\delta = 1/2$ 。常数 $\gamma = 1/V_x$ ，依据Bell和Burdekin的试验， $V_x = V_{r\max}$ （最大滑动速度），可由对各种半径的曲线上轮轨滑动速度的估算得到。最小滑动摩擦力 $F_{k\min}$ 的取值变化范围较大，各种试验资料也反映出很大的离散性，比值 $F_{k\min}/F_s$ 从0.1到0.8都有。即最小的滑动摩擦力可以下降到最大静摩擦力的10~80%。本文计算中除作个别说明外，均采用 $F_{k\min}/F_s = 0.5$ 。

轮轨相对滑动速度 V_r 与蠕滑率的关系为：

$$V_r = (\gamma - \gamma_c) V \quad (3-61)$$

其中 V 为列车前进速度, γ_c 为轮轨间蠕滑力达到饱和时的蠕滑率, 根据前述蠕滑力饱和的判断准则有:

$$\gamma_c = 3\mu_2 P/f$$

其中 P 为轮轨垂向力, f 为蠕滑力系数。

鉴于上述讨论并参照文[20]中饱和蠕滑力公式, 本文在蠕滑力饱和前后采用式(3-62)对蠕滑力进行修正迭代。为进行对比, 同时考察了蠕滑力饱和后的四种变化情况, 即(1)蠕滑力非线性下降; (2)蠕滑力直线下降; (3)蠕滑力不降低; (4)蠕滑力骤降。除特别说明外, 本文采用式(3-62)中式(1)作为饱和后的蠕滑力曲线。

式(3-62)中, μ_d 为摩擦力降到最小值时的滑动摩擦系数, μ_d 越小蠕滑力可能下降的量越大; S 为蠕滑力饱和后下降段的形状系数, S 越大蠕滑力下降曲线越陡。本文以后除特别说明外, 均取 $\mu_d=0.5\mu_2$, $S=3.0$ 。

$$T'_{Rj} = \begin{cases} T_{Rj} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{T_{Rj}}{\mu_2 P_j} \right) + \frac{1}{27} \left(\frac{T_{Rj}}{\mu_2 P_j} \right)^2 \right] & T_{Rj} \leq 3\mu_2 P_j \\ (1) \mu_d P_j + (\mu_2 - \mu_d) P_j e^{-\frac{1}{S} \left(\frac{T_{Rj}}{\mu_2 P_j} - 3 \right)^{1/2}} & T_{Rj} > 3\mu_2 P_j \\ (2) T_{Rj} \left[1 - \left(\frac{T_{Rj}}{\mu_2 P_j} - 3 \right) S \right], & \mu_d P_j \\ (3) \mu_2 P_j & T_{Rj} > 3\mu_2 P_j \\ (4) \mu_d P_j & T_{Rj} > 3\mu_2 P_j \end{cases} \quad (3-62)$$

当轮载取为105kN、轮轨粘着系数取为0.2时, 蠕滑力与蠕滑率的关系曲线(或称蠕滑力特性曲线)如图3-6所示。

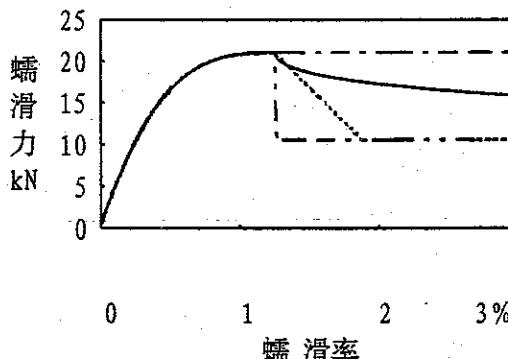


图3-6 蠕滑力与蠕滑率的关系曲线

三、蠕滑力虚功

蠕滑力所作的虚功可表示为:

$$\begin{aligned}\delta W_2 = \sum_{j=1}^4 [T_{2j} \delta Y_{w(1+\frac{j-1}{2})} + (-1)^{j+1} T_{1j} b \delta \phi_{w(1+\frac{j-1}{2})} - T_{2j} \delta Y_j + \\ M_{3j} \delta \phi_{w(1+\frac{j-1}{2})} - T_{1j} r_0 \delta \theta_j + (-1)^{j+1} T_{2j} r_0 \delta \beta_j - T_{2j} r_0 \delta \psi_{w(1+\frac{j-1}{2})}] \quad (3-63)\end{aligned}$$

按式(3-63)可以对总荷载列阵赋值。计算中蠕滑力以稳态值启步，在以后各时间步长中，蠕滑力以前一时刻计算值作为初值，依据式(3-63)进行反复迭代，直至前后两次濡滑力值之差小于给定值时，迭代完成。

§ 3.7 轮轨系统中其它各种力的虚功

一、轮缘力及轮缘摩擦力虚功

轮缘与钢轨是否贴靠，计算中要逐步进行判断。轮缘与钢轨贴靠判断的条件为：

$$I = (-1)^j Y_{w(1+\frac{j-1}{2})} + (-1)^{j+1} r_0 \beta_j + (-1)^{j+1} Y_j - \delta \quad (3-64)$$

$I < 0$ ，不贴靠

$I = 0$ ，临界状态

$I > 0$ ，贴靠

如某一轮缘与钢轨贴靠，对应的轮缘力作为未知变量，式(3-64)作为轮轨横向位移协调方程，协调方程的各项分别放于总刚、总荷载列阵中对应的行。如轮缘不贴靠钢轨，将总刚中对应的主元赋大值(如 10^{10})。

规定轮缘力压力为正向，且大于或等于0。轮缘力和轮缘摩擦力所作的虚功为：

$$\begin{aligned}-\delta W_3 = \sum_{j=1}^4 (-1)^{j+1} F_j [N_{1j}] \{\delta u_j\}^e + \sum_{j=1}^4 (-1)^j F_j \delta Y_{w(1+\frac{j-1}{2})} \\ + \sum_{j=1}^4 (-1)^j F_j \mu_1 b \delta \phi_{w(1+\frac{j-1}{2})} + \sum_{j=1}^4 (r_0 + \Delta r) \mu_1 F_j \delta \theta_j \\ - \sum_{j=1}^4 (-1)^j (r_0 + \Delta r) F_j \delta \beta_j + \sum_{j=1}^4 (-1)^{j+1} F_j r_0 \delta \psi_{w(1+\frac{j-1}{2})} \quad (3-65)\end{aligned}$$

式(3-65)中, Δr 为轮轨踏面接触点与轮缘接触点间的垂向距离, $[N_{1j}]$ 为钢轨单元横向弯曲形函数。依据式(3-65)可以将轮缘力和轮缘摩擦力的影响加入总刚中。

二、曲线上未被平衡的离心力所作的虚功

曲线上因外轨超高与列车速度不相适应, 列车通过曲线时便产生未被平衡的离心力。该力分别作用于车体、转向架和轮对的质心。车体上未被平衡的离心力为;

$$F_c = M_c \left(\frac{gH}{S} - \frac{V^2}{R} \right) \quad (3-66)$$

但因未考虑车体横移自由度, 因此将车体所受未被平衡离心力加于转向架上。

作用在转向架上的离心力和力矩为:

$$F_b = (M_b + 0.5M_c) \left(\frac{gH}{S} - \frac{V^2}{R} \right) \quad (3-67)$$

$$T_b = 0.5(H_1 + H_3)F_c$$

作用于每一轮对上的未被平衡离心力为:

$$F_{wj} = M_w \left(\frac{gH}{S} - \frac{V^2}{R} \right) \quad (3-68)$$

由此可得到离心力所作虚功为:

$$\delta W_4 = \sum_{j=1}^2 F_{wj} \delta Y_{wj} + F_b \delta Y_b + 0.5 F_c [\delta Y_b - (H_1 + H_3) \delta \psi_b] \quad (3-69)$$

依据式(3-69)可以将未被平衡离心力加入总荷载列阵。

三、轮轨接触力虚功

为节省运算时间, 计算中的每一时间步长内, 轮轨接触的处理分为两个阶段。第一阶段中将轮轨接触处理为非线性弹簧, 弹簧只能受压不能受拉, 弹簧刚度依据赫兹接触中力与位移的关系经求导得到, 进行接触力迭代; 当接触力收敛后, 进入第二阶段运算, 轮轨接触处理为力, 且接触力始终大于或等于零。

当轮轨接触处理为弹簧时, 要在总应变能中加入接触弹簧的应变能。接触弹簧应变能的一阶变分为:

$$\delta U_c = \sum_{j=1}^4 K_{ej} [(Z_{w(1+\frac{j-1}{2})} + (-1)^j b \psi_{w(1+\frac{j-1}{2})} - Z_{ij} - \eta_j)]$$

$$\times (\delta Z_{w(1+\frac{j-1}{2})} + (-1)^j b \delta \psi_{w(1+\frac{j-1}{2})} - \delta Z_{\eta_j})] \quad (3-70)$$

式(3-70)中 K_{Cj} 为轮轨接触弹簧瞬时刚度,在接触力迭代过程中依据前一步计算出的接触力进行计算。轮轨接触力与接触弹簧压缩变形的关系为:

$$P_j = G^{-3/2} \rho_j^{3/2} \quad (3-71)$$

其中 ρ_j 为接触弹簧压缩量:

$$\rho_j = Z_{w(1+\frac{j-1}{2})} + (-1)^j b \psi_{w(1+\frac{j-1}{2})} - Z_{\eta_j} - \eta_j \quad (3-72)$$

G 为常数,可近似取为[6]:

$$G = 4.57 r_0^{-0.149} \times 10^{-6} \quad m/kN^{2/3} \quad (3-73)$$

将式(3-71)对位移求导即得到接触弹簧的瞬时刚度:

$$K_{Cj} = \frac{dP_j}{d\rho_j} = 1.5G^{-3/2} \rho_j^{1/2} \quad (3-74)$$

由于接触力收敛快而蠕滑力收敛慢,为节省运算量,接触力收敛后处理为常力,继续进行蠕滑力迭代。由于轨底坡及踏面锥度的存在,轮轨接触力可分解为法向反力和横向水平分力,水平分力为:

$$P_{yj} = (-1)^{j+1} P_j \operatorname{tg} \delta_j = (-1)^{j+1} P_j \lambda \quad (3-75)$$

接触力虚功为:

$$\begin{aligned} \delta W_s = & \sum_{j=1}^4 \{ P_j \delta Z_{\eta_j} + P_j \eta_j - P_j [\delta Z_{w(1+\frac{j-1}{2})} + (-1)^j b \delta \psi_{w(1+\frac{j-1}{2})}] \} \\ & + \sum_{j=1}^4 P_{yj} \delta Y_{w(1+\frac{j-1}{2})} - \sum_{j=1}^4 P_{yj} \delta Y_{\eta_j} - \sum_{j=1}^4 P_{yj} r_0 \delta \beta_j \\ & + \sum_{j=1}^4 P_{yj} b \phi_{w(1+\frac{j-1}{2})} \delta \phi_{w(1+\frac{j-1}{2})} - \sum_{j=1}^4 P_{yj} r_0 \delta \psi_{w(1+\frac{j-1}{2})} \end{aligned} \quad (3-76)$$

在不同的时间步长内, P_j 并非常量,所以式(3-76)中所包含的各项要在迭代过程中逐次加入总刚度矩阵和荷载列阵中。

四、重力所作的虚功

由于振动系统是非线性的,应计人重力的影响。重力的虚功为:

$$\delta W_6 = 0.5M_c g \delta Z_c + M_b g \delta Z_b + \sum_{j=1}^2 M_w g \delta Z_w \quad (3-77)$$

依据式(3-77)将重力影响加入总荷载列阵。

依据前述各种变分式,计算程序可自动对号入座,给总刚度阵、总质量阵、总阻尼阵及总荷载列阵逐次赋值,形成振动方程组。

第四章 模型的求解与校验

在上一章已建立了振动模型，并推导了振动方程。本章要解决的是振动方程求解和模型校验的问题。方程求解中，主要包括积分方法选择、程序实现、参数选择和精度控制。模型校验中，拟进行移动模型和定点模型、本文模型与稳态模型、本文模型与单边模型计算结果的比较，讨论轨道边界采用无限单元的效果，并将本文模型的计算结果与实测数据进行对比，对计算模型进行多方面的校验，以证明计算结果的可靠性。

§ 4.1 振动方程的求解方法

由于系统存在非线性因素，总刚矩阵和总荷载列阵不能采用上一章的变分式一次性赋值，而须在迭代过程中逐步赋值和反复重建，因此必须先确定非线性振动方程组的求解方法。

本文的非线性空间耦合振动模型的振动方程组形如：

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [C]\{\dot{u}(t)\} + \{F(t, u)\} = \{P(t, u, \dot{u})\} \quad (4-1)$$

式(4-1)中，弹性力及荷载列阵具有时变非线性特性。列车在轨道上运行，不同时刻车轮处于不同位置，钢轨表面不平顺值也不相同，荷载列阵发生变化。同时，荷载列阵中包含蠕滑力的影响，隐含有轮轨系统的振动位移、速度。轮轨接触力是波动的，而轮轨接触弹簧刚度具的非线性，瞬时接触刚度依赖于接触力。因此在每一时刻，要计算各车轮位置，根据一定的初始位移、速度和加速度及轮轨垂向力，计算蠕滑力及接触弹簧刚度，组建振动方程组并求解，进行轮缘与钢轨的贴靠判断、接触力迭代、蠕滑力饱和判断及蠕滑力迭代。在计算中的每一时间步长中及每一次迭代过程中都须反复组建和求解方程组。

1. 选择积分方法

由于方程(4-1)的非线性时变特性，且方程组阶数较高，不便直接用频域方法求解。本文采用直接积分法，得到各振动参量的时间历程，再经FFT变换得到振动的频域特性。

直接积分法不求解复杂的特征值问题，也不用将方程组解耦。而是将时间离散，假定振动位移、速度、加速度服从一定的变化规律，某一时刻的值可表达为以前各时刻值的线性组合。依次类推，可由初始条件求得振动方程组在所有时刻的解。关于变化规律的不同假定便导致了不同的积分方法。

选择积分方法的主要标准是解的稳定性、精度和“超调”现象。

解的稳定性是指，积分时间步长 Δt 选取后，位移、速度和加速度的积累误差不会随积分过程而增大。可分为条件稳定和无条件稳定，如在任何条件

下，对任意积分步长 Δt ，振动方程的解都是稳定的，则称该积分方法无条件稳定。

积分方法的精度一般以算法阻尼率和周期延长率为指标。积分步长越小，算法阻尼率和周期相对误差都将减小，计算精度增高。但步长取得越小，计算量越大。因此，应合理选取积分步长。

超调是指一定初始条件下受不连续荷载时，短时间内数值解出现剧烈波动的现象。应避免采用有超调现象的方法。

目前工程中应用较广的直接积分方法有：Houbolt方法、Hilber- α 方法、Collocation方法（含Wilson-θ法[50]、Newmark法[75]）、Park [47]方法等，都有比较理想的精度和稳定特性。经比较，Park方法有较好的低频精度，无超调现象，在非线性问题中无条件稳定，本文选用该方法求解振动方程。

Park方法是基于Gear [9] 的两步后差法和三步后差法建立起来的，其基本公式是：

$$\begin{aligned}\dot{\bar{u}}_{n+1} &= \frac{1}{6\Delta t}(10\bar{u}_{n+1} - 15\bar{u}_n + 6\bar{u}_{n-1} - \bar{u}_{n-2}) \\ \ddot{\bar{u}}_{n+1} &= \frac{1}{6\Delta t}(10\dot{\bar{u}}_{n+1} - 15\dot{\bar{u}}_n + 6\dot{\bar{u}}_{n-1} - \dot{\bar{u}}_{n-2})\end{aligned}\quad (4-2)$$

式(4-2)可写为：

$$\begin{aligned}\{\dot{\bar{u}}_{n+1}\} &= a_0\{\bar{u}_{n+1}\} + \sum_{j=1}^3 a_j\{\bar{u}_{n-j+1}\} \\ \{\ddot{\bar{u}}_{n+1}\} &= a_0\{\dot{\bar{u}}_{n+1}\} + \sum_{j=1}^3 a_j\{\dot{\bar{u}}_{n-j+1}\}\end{aligned}\quad (4-3)$$

且

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{10}{6\Delta t}, & a_1 &= -\frac{15}{6\Delta t} \\ a_2 &= \frac{1}{\Delta t}, & a_3 &= -\frac{1}{6\Delta t}\end{aligned}\quad (4-4)$$

将式(4-3)代入式(4-1)，得到：

$$\begin{aligned}[M]\{a_0^2\bar{u}_{n+1} + a_0B_0(\bar{u}_n) + B_0(\dot{\bar{u}}_n)\} \\ + [C]\{a_0\bar{u}_{n+1} + B_0(\bar{u}_n)\} + \{\bar{F}_{n+1}\} = \{P(\bar{u}_{n+1}, \dot{\bar{u}}_{n+1})\}\end{aligned}\quad (4-5)$$

其中：

$$B_0(u_n) = \sum_{j=1}^3 a_j u_{n-j+1}, \quad B_0(\dot{u}_n) = \sum_{j=1}^3 a_j \dot{u}_{n-j+1} \quad (4-6)$$

2. 处理非线性因素

振动系统中主要包含非线性接触刚度和非线性蠕滑力两种非线性因素。根据这两种非线性因素不同的特点，采用不同的迭代方法进行处理。

(1) 直接迭代法处理非线性蠕滑力

采用式(3-62)对非线性蠕滑力进行迭代和修正过程中，蠕滑力一般逐渐减小并最后稳定在真值附近。依据不动点迭代法的稳定性理论^[37]，蠕滑力的直接迭代过程是稳定和收敛的，数值试验也说明了这一点。对于每一次蠕滑力迭代，方程(4-5)中的荷载列阵变为常量。

$$\begin{aligned} & [M]\{a_0^2 u_{n+1} + a_0 B_0(u_n) + B_0(\dot{u}_n)\} \\ & + [C]\{a_0 u_{n+1} + B_0(u_n)\} + \{F_{n+1}\} = \{P\} \end{aligned} \quad (4-7)$$

(2) 牛顿迭代法处理非线性接触力

对于轮轨非线性接触力，由力与位移的关系特性所决定，并经收敛性分析和数值试验证实，直接迭代方法是发散的。由于迭代中非线性刚度取为切线刚度，因此改善迭代收敛性的最简化途径是采牛顿迭代法^[6]。将式(4-7)改写为：

$$\begin{aligned} \{\psi(u_{n+1})\} &= a_0^2 [M]\{u_{n+1}\} + a_0 [C]\{u_{n+1}\} + \{F(u_{n+1})\} \\ &- (\{P\}_{n+1} - a_0 [M]\{B_0(u_n)\} - [M]\{B_0(\dot{u}_n)\}) \\ &- [C]\{B_0(u_n)\} = 0 \end{aligned} \quad (4-8)$$

取静平衡位置作为位移列阵 $\{u_{n+1}\}$ 的迭代初值，则第*i*+1次迭代结果为：

$$\{u_{n+1}^{(i+1)}\} = \{u_{n+1}^{(i)}\} - [\{K_T\}_{n+1}^{(i)}]^{-1} \{\psi(u_{n+1}^{(i)})\} \quad (4-9)$$

定义位移增量列阵为：

$$\{\Delta u_{n+1}^{(i+1)}\} = \{u_{n+1}^{(i+1)}\} - \{u_{n+1}^{(i)}\} \quad (4-10)$$

则位移增量列阵的第*i*+1次迭代结果满足：

$$[\{K_T\}_{n+1}^{(i)}] \{\Delta u_{n+1}^{(i+1)}\} = -\{\psi(u_{n+1}^{(i)})\} \quad (4-11)$$

从方程组(4-11)中即可逐次求解出位移增量列阵。式(4-11)中，迭代雅可比阵 $[K_T]$ 为迭代误差列阵 $\{\psi\}$ 对位移列阵 $\{u_{n+1}\}$ 求偏导：

$$\begin{aligned}
 [K_T]_{n+1}^{(i)} &= \frac{\partial \{\Psi(u_{n+1}^{(i)})\}}{\partial \{u_{n+1}\}} \\
 &= [a_0^2[M] + a_0[C] + \frac{\partial \{F(u_{n+1}^{(i)})\}}{\partial \{u_{n+1}\}}]
 \end{aligned} \tag{4-12}$$

弹性力列阵中只含有接触力非线性项，其它弹性力均可表示为弹簧刚度与位移的乘积。式(4-12)中的偏导项包含两部分。一部分是系统中线性弹簧刚度组成的总刚中的元素，计算过程中是不变的；另一部分是对非线性接触力求偏导产生的总刚迭加项，可采用(3-74)式进行计算，在计算中的每一时间步长和每一次迭代中均是变化的。

3. 启步方法

Park方法是线性多步法，不能自动启步，需借助其它方法启步。自动启步的方法很多，本文选取最常用的Wilson-θ法。在启步过程中，将轮轨接触简化为线性弹簧，但仍考虑非线性蠕滑力因素。这样可以使启步运算比较简便，同时可避免该方法对于非线性方程不收敛的麻烦。

Wilson-θ法的表达式为：

$$\begin{aligned}
 \{u_{n+1}\} &= \{u_n\} + \frac{1}{\theta} (\{u_\theta\} - \{u_n\}) \\
 \{u_{n+1}\} &= \{u_n\} + \Delta t \{u_n\} + \frac{\Delta t}{2\theta} (\{u_\theta\} - \{u_n\}) \\
 \{u_{n+1}\} &= \{u_n\} + \Delta t \{u_n\} + 0.5 \Delta t^2 \{u_n\} + \frac{\Delta t^2}{6\theta} (\{u_\theta\} - \{u_n\})
 \end{aligned} \tag{4-13}$$

在启步阶段，由于将接触弹簧作线性处理，且非线性蠕滑力采用直接迭代法，在蠕滑力的每一步迭代中，方程组(4-1)变为：

$$[M]\{u(t)\} + [C]\{u(t)\} + [K]\{u(t)\} = \{P\} \tag{4-14}$$

将式(4-13)代入得到：

$$[A]\{u_\theta\} = \{B\} \tag{4-15}$$

其中：

$$\begin{aligned}
 [A] &= [M] + 0.5\theta\Delta t[C] + \frac{\Delta t^2}{6}\theta[K] \\
 [B] &= \{P\} - [K]\{u_n\} - [C]\{u_n\} - \theta\Delta t\{u_n\} \\
 &\quad - (0.5\theta\Delta t[C]\{u_n\} - \frac{1}{3}\theta\Delta t^2[K]\{u_n\})
 \end{aligned} \tag{4-16}$$

从式(4-15)中解出 $\{\ddot{u}_n\}$ 后代入式(4-13), 可得到n+1时刻的位移、速度和加速度列阵。

§ 4.2 程序编制

采用Fortran77编制的振动模型求解程序可在386及以上的微机上运算。程序包含一个主程序和15个子程序, 主要子程序的功能如下:

FORMKE——形成钢轨梁有限单元和无限单元刚度矩阵;

FORMME——形成钢轨梁有限单元和无限单元质量矩阵;

FORMC——形成钢轨梁无限单元阻尼矩阵;

FORMMM——组集总质量矩阵;

RWC——计算各车轮位置、车轮所在钢轨单元的形函数值以及各车轮下轨面不平顺值;

FORM1——处理各部弹簧及相关的常数项;

FORM2——处理各部阻尼及相关的常数项;

FORM3——处理曲线上求被平衡的离心力、重力、各轮轨间垂向力的水平分力及轨面不平顺;

FORM4——计算轮轨间的蠕滑力。

FORM5——判断轮缘与钢轨的贴靠状态, 处理轮缘力及轮缘摩擦力;

JOH——进行蠕滑力饱和判断, 采用式(3-62)对蠕滑力进行修正。

GS——用全主元高斯方法求解代数方程。

START——时间为0时计算各单元初始位置。

WILSON——第一、二步用Wilson-θ方法启步。

PARK——从第三步开始用PARK方法处理振动方程。

程序包含时间步长循环、轮缘贴靠状态判断循环、轮轨接触力迭代以及蠕滑力迭代等, 构成四重循环调用结构。

程序外层结构如图4-1所示。其中核心部分是用Park方法处理及求解振动方程, 每一时间步长内的程序框图如图4-2所示。

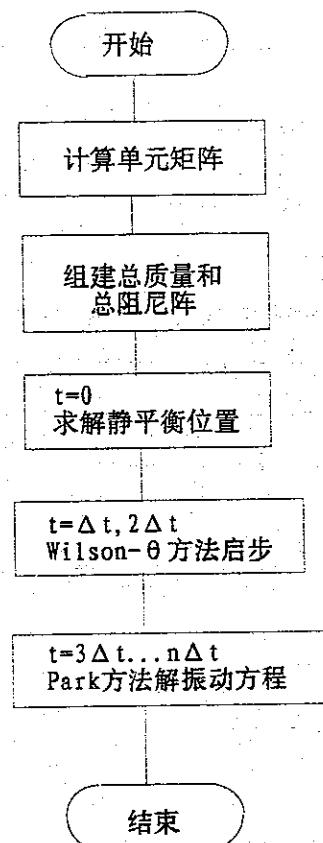


图4-1 程序外层结构框图

A: 计算各车轮位置及轮轨接
触点的钢轨单元形函数值

KP=1

B: KP=1
轮轨接触力取切线刚度
KP=2
轮轨接触力为常值

C: 组建轮轨系统
振动方程

D: 用Park方法处理
振动方程

E: 用高斯法解方程

F: KP=1
判断位移增量
平方和小于
给定值

是

G: 判
断轮缘贴
靠状态

是

H: KP=1
轮轨接触力计算

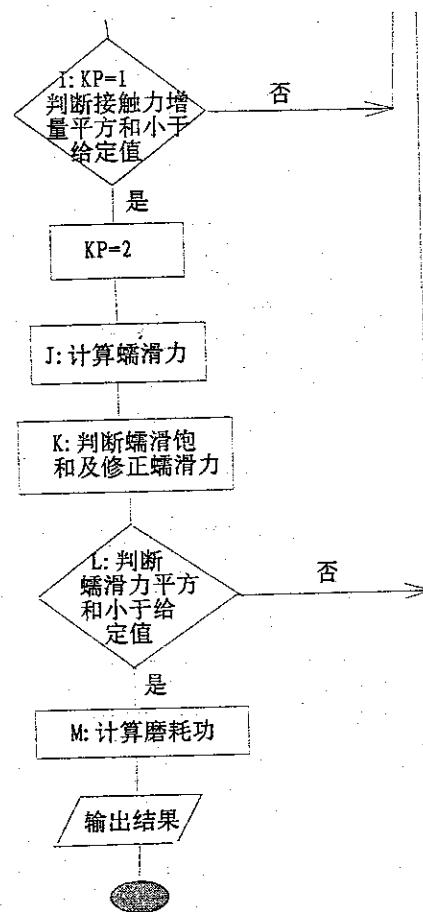


图4-2 Park方法求解振动方程程序段框图

程序适用于货车、客车和机车转向架通过曲线时，轮轨空间耦合振动（含轮对扭转和弯曲振动）的计算。线路曲线半径可任意选择，轨面的垂向不平顺可任意选择，内外轨不平顺形状可以不一样。运算结果输出为轮轨间蠕滑功、蠕滑力、轮轨垂向力、轮缘力，以及轮对扭转和弯曲振动、轨道振动的力、位移、速度和振动加速度。对于三轴机车，程序中加入了轮对横动量及二系复原力矩对振动的影响。程序除计算列车惰行工况外，还可以计算列车存在牵引、制动及坡道分力时的情况。

§ 4.3 计算参数选择

1. 结构参数

本文中除作特殊说明外，均采用表4-1~表4-4所列参数值，考察某一或某几个参数的影响时，其它参数取值仍如表中所列不变。表中参数符号的含义参见第三章。

表4-1 轨道主要计算参数取值

参数	取 值	单 位	参 数	取 值	单 位
R	300	m	H	0.1	m
a	0.545	m	N-1	20	跨
M _s	0.237	t	M _r	0.06064	t/m
K _{1r}	3.75×10^4	kN/m	C _{1r}	20.06	kN.s/m
K _{2r}	1.2×10^5	kN/m	C _{2r}	12.4	kN.s/m
K _{1s}	2.03×10^4	kN/m	C _{1s}	70	kN.s/m
K _{2s}	3.5×10^4	kN/m	C _{2s}	90	kN.s/m

注：轨道计算参数主要依据文[59][119]计算选取

表4-2 货车(新转8A)计算参数取值

参数	取 值	单 位	参 数	取 值	单 位
V	50	km/h	W	210	kN
M _c	76	t	M _b	2	t
J _b φ	2.66	t·m ²	J _b φ	1.36	t·m ²
J _b ξ	2.64	t·m ²	M _w	1	t
J _w φ	0.96	t·m ²	J _w β	0.0221	t·m ²
J _w θ	0.0441	t·m ²	δ	0.019	m
2L ₁	1.75	m	r ₀	0.42	m
2b ₁	1.944	m	L _β	0.283	m
K _{2y}	4.5×10^4	kN/m	K _{2z}	5.38×10^3	kN/m
C _{2z}	150	kN·s/m	K _{1z}	1.0×10^8	kN/m
K _{1x}	2.0×10^4	kN/m	K _{1y}	2.0×10^4	kN/m
K _w θ	4.8149×10^5	kN·m/rd	K _w β	6.3195×10^3	kN·m/rd
μ ₁	0.3		μ ₂	0.2	

注: 参数主要依据文[81][113]计算选取

表4-3 客车(202转向架)计算参数

参数	取 值	单 位	参 数	取 值	单 位
V	50	km/h	W	150	kN
M _c	47.6	t	M _b	3	t
J _b φ	3.2	t·m ²	J _b φ	1.6	t·m ²
J _b ξ	3.0	t·m ²	M _w	1.6	t
J _w φ	1.5	t·m ²	J _w β	0.0423	t·m ²
J _w θ	0.0846	t·m ²	δ	0.019	m
2L ₁	2.4	m	r ₀	0.46	m
2b ₁	2.0	m	L _β	0.268	m
K _{2y}	4.5×10^4	kN/m	K _{2z}	1.11×10^3	kN/m
C _{2z}	100	kN·s/m	K _{1z}	1.0×10^3	kN/m
K _{1x}	1.5×10^4	kN/m	K _{1y}	1.5×10^4	kN/m
K _w θ	3.38×10^3	kN·m/rd	K _w β	4.42×10^3	kN·m/rd
μ ₁	0.3		μ ₂	0.2	

注: 参数主要依据文[72][112]计算选取

表4-4 机车(韶山1型)主要参数取值

参 数	取 值	单 位	参 数	取 值	单 位
V	50	km/h	W	225	kN
M _c	76.328	t	M _b	13.037	t
J _b φ	83.0	t·m ²	J _b φ	5.34	t·m ²
J _b ξ	79.1	t·m ²	M _w	5.933	t
J _w φ	1.724	t·m ²	J _w β	0.127	t·m ²
J _w θ	0.254	t·m ²	L _β	0.2	m
2b ₁	2.11	m	K _{2z}	8182.4	kN/m
K _{2y}	3796.2	kN/m	K ₂ φ	4189.5	kN·m/rd
K ₂ φ	5392.7	kN·m/rd	K ₂ ξ	13422.8	kN·m/rd
K _{1x}	1.0×10^4	kN/m	K _{1y}	1.0×10^4	kN/m
K _{1z}	601	kN/m	C _{1z}	100	kN·s/m
K _w θ	1.196×10^4	kN·m/rd	K _w β	1.57×10^4	kN·m/rd
μ ₁	0.35		μ ₂	0.3	

注: 参数依据文[73]计算选取

2. 积分步长

Park方法是无条件稳定的,任意积分步长都能计算出结果。但步长增加时算法阻尼增大,步长太小耗费机时且增加舍入误差,因此必须根据求解的频率范围选择合适的步长。

根据Park方法算法阻尼与积分步长的关系^[6],对应振幅误差率小于2.5%的最高振型频率为 $0.1/\Delta t$ (Hz),对应振幅误差率小于15%的最高振型频率为 $0.15/\Delta t$ (Hz)。如积分步长取为0.001秒,则对应100Hz振型的振幅误差率为2.5%,对应150Hz的振型的振幅误率为15%。由于长波磨耗的激振频率一般小于200Hz,按数据处理的一般原则^[115],只要确保400Hz以内的振型具有足够的精度就可以得到满意的结果。如要求与400Hz对应的振型的振幅误差率小于2.5%,则积分步长应小于0.00025秒。

实际计算中,为节省机时,根据不平顺的长度和列车速度进行时间步长数值试验。步长从0.001秒开始反复折半,计算出2~3组结果,当前后两组结果的误差在5~10%以内时,认为步长是合适的。本文计算中的时间步长一般选择为0.00025或0.0005秒。

3. 迭代误差限

迭代误差限依据节省机时且又满足最终结果精度的原则而确定。在轮轨非线性接触力的迭代过程中，首先控制广义位移列阵（含位移、转角和轮缘力）中各元素的精度，使位移增量列阵的2-范数小于 10^{-8} ，即：

$$\sum_{j=1}^{18N+26} |du_j|^2 \leq 10^{-8} \quad (4-17)$$

相当于各位移、转角的精度为 $10^{-6} \sim 10^{-7}$ ，力的精度为 $10^{-4} \sim 10^{-5}$ 。当位移增量满足精度时，判断轮轨接触力的精度，如前后两次接触力值的相对误差小于1%，即：

$$\frac{\sum_{j=1}^4 (P_{j(k+1)} - P_{jk})^2}{\sum_{j=1}^4 P_{jk}^2} \leq 0.01 \quad (4-18)$$

则接触力迭代结束，接触力按常值处理，继续进行蠕滑力迭代循环。

蠕滑力迭代循环中，控制轮轨间纵向和横向蠕滑力的精度，如前后两次蠕滑力值的相对误差小于1%，即：

$$\frac{\sum_{j=1}^4 (T_{xj(k+1)} - T_{xjk})^2 + (T_{yj(k+1)} - T_{yjk})^2}{\sum_{j=1}^4 T_{xj(k+1)}^2 + T_{yj(k+1)}^2} \leq 0.01 \quad (4-19)$$

则蠕滑力迭代结束，进入下时间步长循环。

4. 轨道计算跨数选取

轨道计算段两端采用无限单元，基本上消除了模型的边界效应，轨道的截取长度只取决于不平顺的长度和车轮驶出不平顺后振动的持续距离。在波磨激振频率小于200Hz时，车轮驶出不平顺后2~3个周期内振动即衰减到可忽略的程度，因此，对于低频段振动，不平顺以外保留1~2米长的轨道就能取得足够的计算精度。

分别取轨道计算长度为20跨和25跨，将波长250mm、波深1mm的单波不平顺置于轨道中部，计算出一些主要参量进行比较。两种轨道长度下计算结果最大误差不超过5%，说明轨道取20跨可得到足够的精度。

§ 4.4 移动模型与定点模型比较

“移动模型”（或称时变模型）是指转向架在钢轨上走行、轨道不平顺以位置函数表达的计算模型。“定点模型”是指将转向架置于轨道上的固定位置、不平顺以时间函数表达的计算模型。定点模型是对移动模型的简化。

两种模型各有优缺点。移动模型能更好地模拟车轮行进在轨道上的各种振动，计算结果更接近实际况，且易于处理各种不平顺（如接头、离散的多个不平顺等），但计算量略大。定点模型中重组方程的计算量稍小，但某些振动量值可能与实际情况有差别，且轨道不平顺较复杂时不便转换为时间函数。

采用两种模型，计算了货车通过600m半径曲线时，轮轨系统中的一些主要振动参量。轨面存在一波深0.5mm波长250mm的单波垂向不平顺。图4-3~4-6是导向轮下各种力和位移的时间历程。

从图4-3~4-6可见，对于轮轨垂向力（其它垂向振动参量类似），两种模型的计算结果几乎完全重合。而轮轨横向振动参量的时间历程表现出明显的差异。

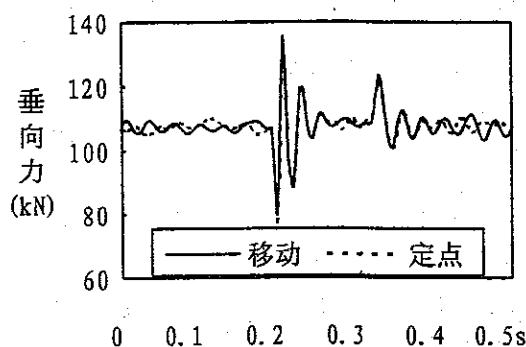


图4-3 垂向力时间历程

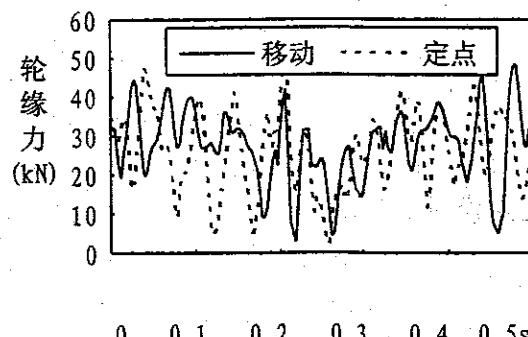


图4-4 轮缘力时间历程

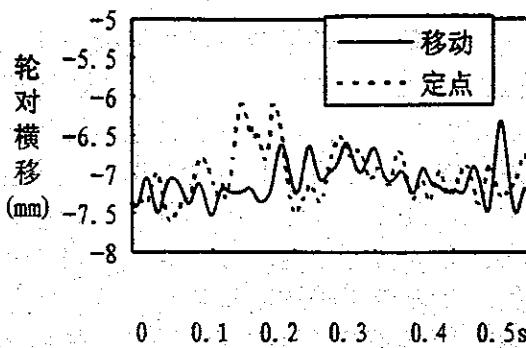


图4-5 轮对横移时间历程

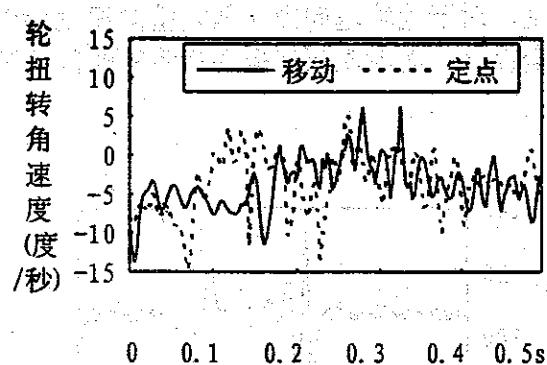


图4-6 车轮扭转角速度时间历程

对横向振动参量进行均值、方差统计及谱分析。均值方差值如表4-5所列，扭转振动角速度的频率谱（均方谱，下同）如图4-7所示。轮轨系统中各横向振动参量的均值、均方差及最大值相差均未超过5%，如果计算只是为了得到各振动量的统计值，完全可以采用定点模型。频谱分析表明，对于轮对扭转振动主频(90Hz)处的振动强度，两种模型计算结果相同（因主频处大两个数量级，图中未画出）。但在其它非主频段，两种模型计算出的频率特性表现出一定差别。

采用定点模型对移动模型进行简化，计算结果的量值误差是可以接受的。但考虑到移动模型中轨道不平顺便于描述，计算工作量主要不是方程重建而是方程求解，且简化成定点模型后，时间历程和频率特性有差异，因此本文仍采用移动模型。

表4-5 横向振动参量时间历程的均值方差统计

	轮缘力(kN)		轮对横移(mm)		扭转角速度(度/s)	
	移动模型	定点模型	移动模型	定点模型	移动模型	定点模型
均 值	27.3	23.0	-7.1	-7.0	-3.8	-3.7
均方差	10.0	13.0	0.25	0.43	3.3	4.1
最大值	48.3	49.9	-7.5	-7.6	-14.5	-15.0

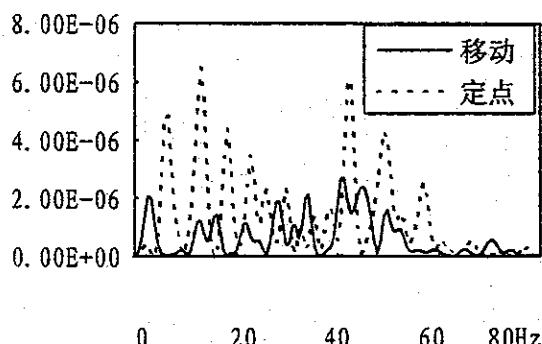


图4-7 扭转振动角速度频率谱

§ 4.5 本文模型与稳态曲线通过模型比较

在圆顺轨道条件下，进行了本文模型与车辆稳态曲线通过模型的比较。稳态模型考虑刚性转向架（转8A）和刚性轨道，求解转向架通过曲线时导向轮的轮缘力，并与本文移动模型的计算结果比较。在600m半径的圆顺曲线轨道上，本文模型计算得导向轮缘力为26.8kN，而稳态模型的计算结果为34.5kN。稳态模型中轨道和转向架是刚性的，轮缘力计算结果较大，这是可以理解的。

§ 4.6 本文模型与单边模型比较

所谓“单边模型”是指，沿线路中心线截取半边轨道（一股钢轨、半根轨枕）、半个转向架及半个（或1/4个）车体进行振动分析。现有轮轨垂向振动分析中，绝大多数是这类单边模型。

图4-8给出了直线轨道上、一股钢轨轨面存在波长2.5m、波深1.0mm的长波不平顺时，采用两种模型计算，所得到的转向架上各车轮动轮载的时间历程。

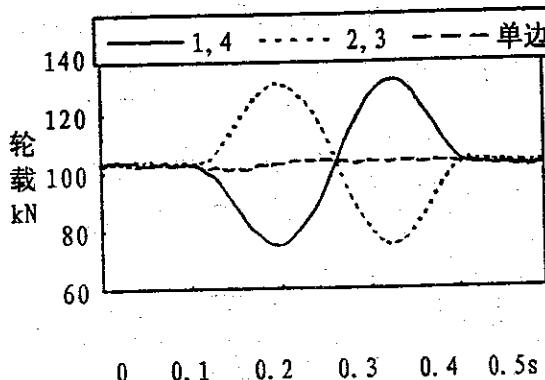


图4-8 本文模型与单边模型比较

当一股钢轨上存在长波不平顺（通常称为三角坑）时，转向架上四个车轮的动轮载均出现大幅度波动。计算中所取的不平顺矢度只有1mm，即线路扭曲率为0.8‰，轮载波动量可达到 $\pm 25\text{kN}$ ，波动量值与波长0.25mm、波深0.5mm的短波不平顺接近。

1轮（车轮编号参见图3-5B）驶入不平顺时，出现减载，2轮（轮下没有不平顺）增载，减载量与增载量相等，前轴两轮载总和不变。与前轴的情况相反，4轮（轮下没有不平顺）减载而3轮（轮下没有不平顺）增载，且后轴两轮载总和也不变。转向架上四个车轮的增载和减载表现出对角车轮同性同值的特点，即1轮与3轮、2轮与4轮同时增载和同时减载，且量值相等。

值得注意的是，虽然前后两轴进入不平顺存在时间差，但轮载却同时波动，后轴轮载波动并未表现出想象的相位迟后。转向架上只要有一个车轮进入不平顺，则所有车轮的轮载同时开始波动，且波动量几乎相等。

转向架处于不平顺中间位置时，四个车轮的轮载增量为0。前轴驶至不平顺最大矢度处，1、4轮的减载量和2、3轮的增载量最大，而当后轴驶至不平顺最大矢度处时，1、4轮增载和2、3轮减载达到最大值。后轴驶出不平顺区域时，四个车轮的轮载波动随之停止。

对不同波长的计算表明，只要不平顺波长比转向架固定轴距长，则轮载波动就具有上述特性，反之轮载波动特性有所不同。因此，轨道不平顺的长波和短波是相对的，当波长较转向架定距长时，应称为长波，反之应为短波。

单边模型根本无法用于计算这种三角坑不平顺的动力作用，而只能用于轨道高低不平顺的动力作用。高低不平顺对轮载的影响较三角坑小得多，同样是矢度1mm的不平顺，轮载波动的还不到 $\pm 3\text{kN}$ ，仅为三角坑时的1/8~1/10。

必须再次强调指出，单边模型只适用于分析短波不平顺及长波高低不平顺，当两股钢轨上不平顺不一样、且为长波不平顺时（如三角坑）时，单边轨道模型不可能得到正确的计算结果。这方面的问题在文[136]中作了更为详细的论述，本文限于篇幅不再深入讨论。

§ 4.7 计算模型边界条件的影响

对于轨道计算段的边界条件，现有模型中一般处理为自由端或固定端，与实际情况有差异。由于边界条件的影响，距边界某一距离内计算数据失真，增多了无效数据的计算量。对于移动模型，当车轮移至边界附近时，计算数据失真度更大。本文在边界处采用了无限单元，基本上可消除边界效应。为了说明这一点，进行了无限元处理边界与固定端处理边界的比较。

计算表明，随激振频率提高（波磨波长缩短），边界效应的影响距离增大。当激振频率低于200Hz时，各种振动量的误差如按5%计，边界效应的影响长度不超过2.5m。激振频率如为50Hz（波长0.25m、车速50km/h）时，边界效应的影响长度在1m以内。假设距边界1.5m处开始，轨面存在波长250mm、波深0.5mm的连续波磨，其它条件如表4-1、2所列。计算结果如图4-9、10所示，其中实线为无限元处理边界的结果，虚线为固定端处理边界的结果。

由图4-9、10的结果比较可见，本文计算模型几乎没有边界效应的影响，当采用固定端处理边界时，靠近边界处的计算数据严重失真。

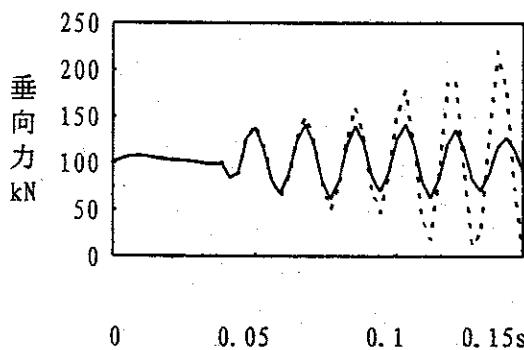


图4-9 轮轨间垂向比较

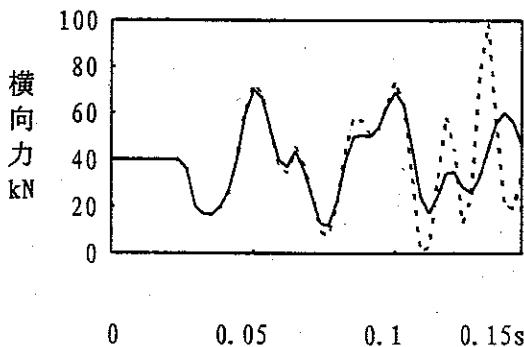


图4-10 轮缘力比较

§ 4.8 本文模型计算结果与实测数据比较

96年5月在石太线上K41附近对波磨轨线路进行了轨道动力实测，现将本文模型计算结果与实测数据进行对比。实测地段线路曲线半径300m、外轨超高80mm。在外轨上有一段波深约0.5mm、波长260mm的波磨。选取其中的一个波，在波谷→波峰（上坡段）中点同时布置轮轨垂向力、横向力、钢轨垂向位移及轨头横向位移测点，测试列车通过时轨道的受力和位移情况。选取通过车速为45~55km/h的16趟韶山1型机车的实测数据进行统计，机车导向轮下力和位移的平均值如表4-4中所列。

表4-4 韶1机车通过时轨道受力位移计算及实测值

	车速 (km/h)	轮轨垂向力 (kN)	轮轨横向力 (kN)	轨头横移 (mm)	钢轨垂向位移 (mm)
实测平均值	45~50	144.4	84.2	4.5	4.1
理论计算值	50	161.4	63.9	3.2	3.4

应用本文模型计算，参数按表4-1、4选取，得到理论计算值如表4-4中所列。理论计算值与实测值有一定差距，其中垂向力偏大，其它值偏小，垂向力误差最小、轨头横移误差最大。

理论计算与实测值间的误差主要来源于以下几个方面。（1）道床的垂向和横向刚度变化范围较大，难以准确选取；（2）轮轨的摩擦系数及蠕滑力系数的取值不一定与测试地段的实际情况相符；（3）理论计算难以准确模拟测试地段前后复杂的线路条件；（4）实测数据本身可能会存在一定的误差。

通过对模型的一系列校验和对比，说明本文所建立的空间耦合振动模型的实用性较强、计算结果可靠。

第五章 轮对粘滑振动及其形成条件

轮对扭转振动一般在曲线地段才被激化。轮对弯曲振动在直线和曲线地段均存在，与轮轨系统垂向振动同时发生。一方面，系统垂向振动和轮对弯曲振动造成轮轨间蠕滑力和轮缘力波动，直接影响轮对的扭转振动。另一方面，因纵横两向蠕滑力的波动是互相关联的，轮对扭转振动必然引起横向蠕滑力的波动，诱发轮对弯曲振动，轮对弯曲带动轴承上下振动，从而引起轮轨垂向振动。在一定条件下，轮轨系统垂向振动、轮对弯曲振动、轮对扭转振动三种振动形式，构成一个循环自激振动系统。

§ 5.1 轮对粘滑振动的概念及比拟分析

将轮对扭转振动独立出来，采用简单模型进行比拟分析，对粘滑振动进行概念性描述，所得的定性结论将有助于对复杂模型计算结果的理解。

车轴具有一定的扭转弹性，轮对相当于以扭弹簧相联的两个转动质量，构成一扭转振动系统。曲线地段，内外两侧车轮受到大小和方向都不相同的纵向蠕滑力，发生轴扭转及两轮相对转动，即轮对扭转振动。

运行中的轮对，同时存在横移、摇头、沉浮、侧滚、轴弯曲及轴扭转振动，同时还受到轨道振动的影响。单独分析轮对的扭转振动时，可用图5-1A)中的摩擦振动模型进行类比。图5-1A)中， m 相当于两轮的转动惯量；

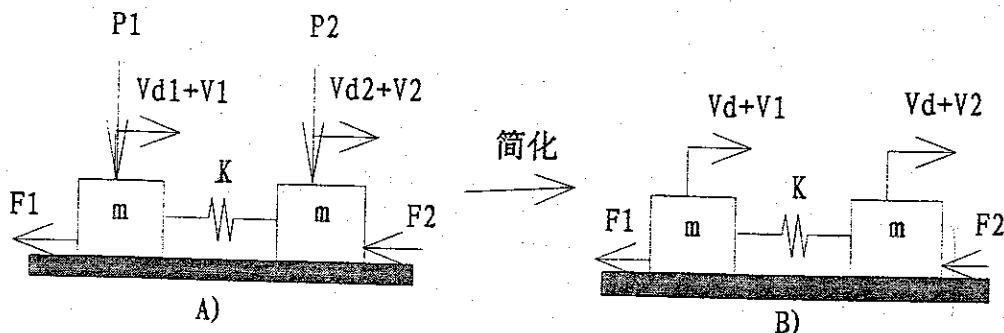


图5-1 轮对扭转振动与摩擦振动的类比

k 相当于轴的扭转角刚度； V_{d1} 、 V_{d2} 相当于两轮在没有扭转振动时的滑动速度（称之为拖动速度，下同），轮对摇头振动使 V_{d1} 、 V_{d2} 成为时变函数； P_1 、 P_2 为作用在两轮上的轮轨垂向力，受轮对沉浮、侧滚及轨道垂向振动的影响，是

时变函数； F_1 及 F_2 是轮轨间纵向蠕滑力矩，受轮对横移、轴弯曲和钢轨横向振动影响，是时变函数； V_1 、 V_2 相当于两轮的扭转振动角速度。

求解图5-1A)所示的摩擦振动，须涉及到未知的力和速度函数 $P_1(t)$ 、 $P_2(t)$ 、 $V_{d1}(t)$ 、 $V_{d2}(t)$ 以及变化极为复杂的摩擦力 $F_1(t)$ 、 $F_2(t)$ ，因此作进一步的简化，讨论图5-1B)所示的摩擦振动模型(V_d 为常量)。

在以速度 V_d 水平移动的坐标系中列出图5-1B)所示的摩擦振动的振动方程：

$$m\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) = -F_1(x_1, V_d) \quad (5-1)$$

$$m\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) = -F_2(x_2, V_d)$$

这是一个两自由度无阻尼摩擦振动方程，当右侧力函数为线性函数时，可以得到解析解。

式(5-1)右侧的力函数即为质量块运动时与支承面间的摩擦力(忽略蠕滑)，摩擦力与相对滑动速度的一般关系可用式(5-2)表示(式3-60的台劳展式)，其中 α 、 β 为常数。质量块即将滑动而未滑动时，摩擦力为最大静摩擦力 F_s ，一旦质量块出现滑动，摩擦力随滑动速度加大而下降，如图5-2所示。

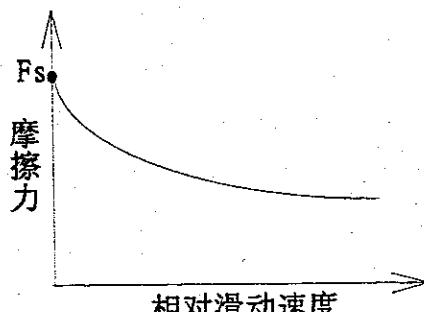


图5-2 摩擦力特性曲线

$$F = F_s - \alpha(\dot{x} - V_d) + \beta(\dot{x} - V_d)^2 \quad (5-2)$$

进一步将图5-1B)的模型简化。令两质量块之一不发生振动，而是以拖动速度匀速运动，则为单自由度的摩擦振动。将式(5-2)代入振动方程，可变换为[71]：

$$\ddot{X} + M(\lambda + \beta \dot{X})\dot{X} + \omega^2 X = 0 \quad (5-3)$$

用克里洛夫法(变振幅、变相位法)可求解方程(5-3)。

根据不同的拖动速度和摩擦力特性曲线，摩擦振动可呈现出下列三种振动形式。

1. 粘滑振动

粘滑振动对应轮对的扭转张弛振动或轮对的粘滑滚动过程。

当质量的拖动速度不大，即满足 $V_d < \max V_1$ （最大振动速度）时，摩擦振动表现为粘滑振动。振动速度如图5-5A所示，质量与支承面间出现粘着与滑动的交替变化。轮对扭转振动表现为张弛振动。轴扭矩逐渐积蓄到轮轨滑动的临界扭矩 M_{cr} ，此过程称为“张”；达到临界扭矩时，轮轨间出现滑动，摩擦力降低而使轴扭矩迅速释放，此过程称为“弛”。然后轴扭转又重新积蓄，进入下一循环。但轮轴内的扭矩一般不会下降至0，也不会出现负值，如图5-3所示。

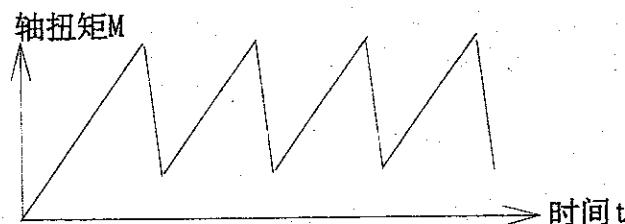


图5-3 粘滑滚动过程中轴扭矩的积蓄与释放

滑动临界扭矩为：

$$M_{cr} = \min\{T_{x1} \times r_1, T_{x2} \times r_2\} \quad (5-4)$$

其中 r_j ($j=1-2$) 为车轮滚动半径， T_{xj} 为两轮下的纵向摩擦力。

轴扭矩的间断释放造成轮轨间快速相对滑动，在钢轨上形成高磨耗微段。

2. 自激振动

自激振动形成的条件为：

- (1) 摩擦力特性曲线上具有负斜率段。
- (2) 拖动速度 V_d 满足 [71]：

$$\max\{|\dot{x}_1|, |\dot{x}_2|\} \leq V_d \angle \frac{\alpha + 2\sqrt{mk}}{2\beta} \quad (5-6)$$

只要自激振动具备形成的条件，则振动就不会衰减。轮对发生扭转自激振动时，轴扭矩和车轮扭转振动角速度的时间历程近似于正弦函数（如图5-5B所示）。

3. 衰减振动

当振动系统中的阻尼较大时，自激振动转化为一种衰减振动形式。轴内扭矩积蓄到滑动临界扭矩时，轮轨间出现滑动，因摩擦力下降致使扭矩释放并诱

发振动，扭矩出现负值，振动在有限个周期内衰减完毕。此后轮对以角速度 ν/ν_0 向前滚动的同时，以拖动速度 $\pm\nu_d$ （外侧车轮向前而内侧车轮向后）滑行，轮对扭转振动不再发生。轴扭矩的积蓄和释放过程如图5-4所示，轮对扭转角速度如图5-5B)所示。

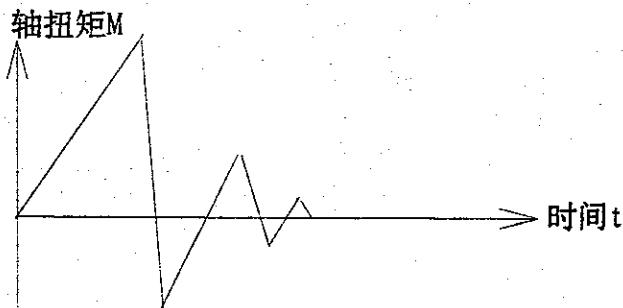


图5-4 衰减振动时轴扭矩的积蓄与释放过程

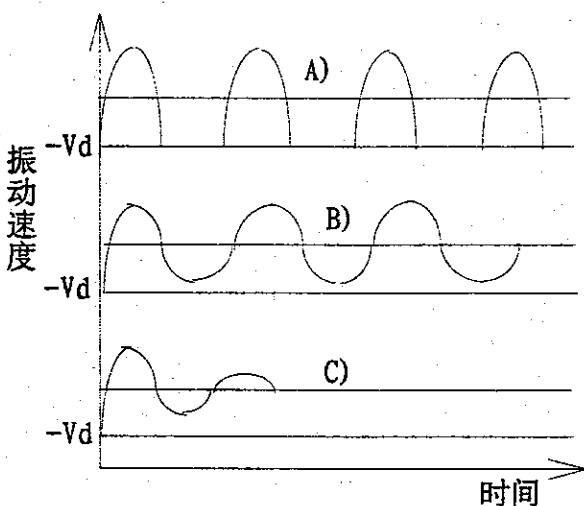


图5-5 轮对扭转角速度的时间历程

A) 粘滑振动 B) 自激振动 C) 衰减振动

此处所讨论的摩擦振动只是轮对扭转振动的最简化的比拟模型，忽略了轮轨间蠕滑以及系统中其它振动形式的影响，得到的仅是关于摩擦振动的一些定性结论。这些定性结论是对复杂模型分析和理解的基础，但要依据这种简化模型对轮对实际的摩擦振动进行准确的计算分析是不可能的。

以上是将轮对扭转振动独立出来进行简化分析，对于轮对弯曲振动，因车轴的弯曲弹性，轮对为一弯曲振动系统，同样可进行类似的分析。也就是说，在轨道纵向，可能因轮对扭转引起轮对粘滑或自激振动，在轨道横向，可能因

轮对弯曲引起轮对粘滑或自激振动。实际情况中，轮对的粘滑或自激振动往往是由轮对弯曲和扭转振动以及轮轨系统垂向和横向振动共同作用引起的。

§ 5.2 曲线地段轮对的粘滑振动

大量的计算和分析表明，随着转向架、轨道及轮轨接触参数的不同选择，上一节所述的轮对的三种振动形式都可能出现。但以粘滑振动最为常见，且粘滑振动又有多种类型。只在个别特殊条件下，轮对自激振动和衰减振动才可能发生。此外，在轮轨间蠕滑力未达到饱和的情况下，也会因蠕滑力波动引起振动，本文称之为非自激振动。

本节中，我们将列举轮对较典型的粘滑振动类型，并对振动过程中磨耗功等主要振动参量的时域和频域特性进行研究。

1. 第一类粘滑振动

第一类轮对粘滑振动由轨道横向刚度过大等因素诱发。在半径较小的曲线地段，轮轨间蠕滑力接近饱和，如轨道横向刚度偏大且轨距偏小，则轮对适应内外轨长度差的能力遭到削弱，轮轨间出现滑动，如蠕滑力特性曲线上存在负斜率段，就有可能形成轮对粘滑振动。

例如，货车运行在半径300m的曲线上，当道床横向刚度增大到 2.0×10^5 kN/m，轨距取为1435mm，其它条件如表4-1、2所列时，导向轮对的振动表现为粘滑振动，车轮与钢轨间出现间断滑动和粘着，车轮在曲线上表现为粘滑滚动过程。由于导向轮对振动的影响，轮对2也发生弯曲和扭转振动，3、4轮下蠕滑力持续波动，但未达到饱和状态。轮对2的振动表现为非自激振动，振动强度约小一个量级。

图5-6为导向轮磨耗功的时间历程。轮轨粘着段（对照图5-7）蠕滑功较小；滑动段上，虽然蠕滑力（摩擦力）随滑动速度加大而降低，但蠕滑率急剧增加，磨耗功增加。轮轨粘着一旦恢复，磨耗功又降低。各滑动段磨耗功几乎相等，各粘着段磨耗功略有差异。磨耗功经历的是“突增（脉冲）～恢复”的循环过程，这种循环过程将持续稳定地进行。

图5-7是导向轮蠕滑力依据第三章式（3-62）进行修正的折减系数。折减系数小于0.33时，蠕滑力达到饱和，轮轨间出现滑动，且折减系数越小，说明轮轨相对滑动速度越大。当折减系数大于0.33时，蠕滑力未达到饱和，轮轨处于粘着状态。为了使滑动与粘着一目了然，当折减系数大于0.33时，图5-7中将其取为0。即图中折减系数为0对应粘着状态，折减系数不为0对应滑动状态。

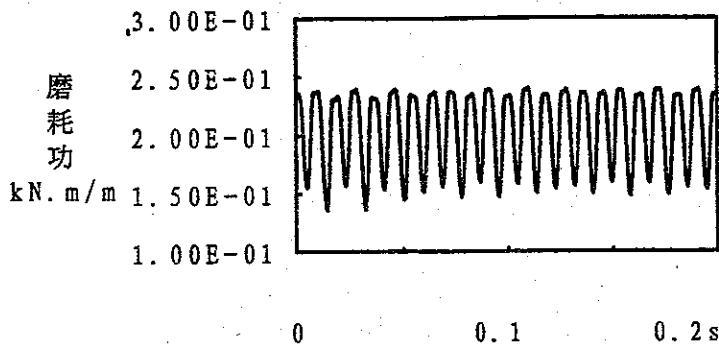


图5-6 导向轮磨耗功的时间历程

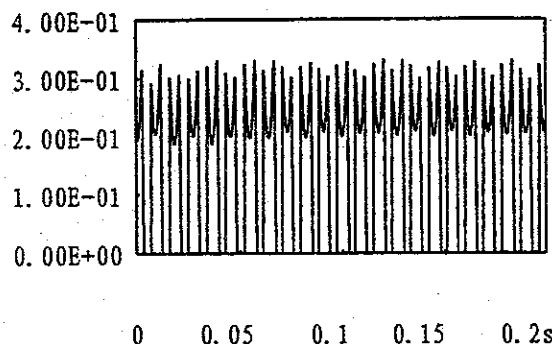


图5-7 轮轨间的粘着与滑动

图5-8是导向轮扭转振动速度（轮轨接触点的速度，下同）与纵向拖动速度（含蠕滑，下同）的比较，图5-9是弯曲振动速度与横向拖动速度的比较。由于考虑了轮轨间的蠕滑，与图5-5A)中粘滑振动速度曲线有所不同，从速度曲线上难以判定轮轨粘着和滑动。

车轮纵向拖动速度即为第3章式(3-51)所示的纵向蠕滑率乘以轮对前进速度V，其中均值部分取决于线路曲线半径等参数，波动部分决定于轮对摇头角速度、轮对横移量、钢轨横移量等变量。由图5-8中可见，纵向拖动速度波动较小，扭转速度围绕拖动速度作上下波动。扭转速度大于拖动速度的区段，扭转速度与拖动速度相加，蠕滑力达到饱和而产生滑动。反之，扭转速度小于拖动速度的区段，扭转速度与拖动速度相减，蠕滑力未达到饱和，轮轨间处于粘着状态。扭转速度与拖动速度出现相等点是粘滑振动的必要条件之一。速度相等点基本上按相等的时间间隔分布，说明粘着段与滑动段的长度基本相等。

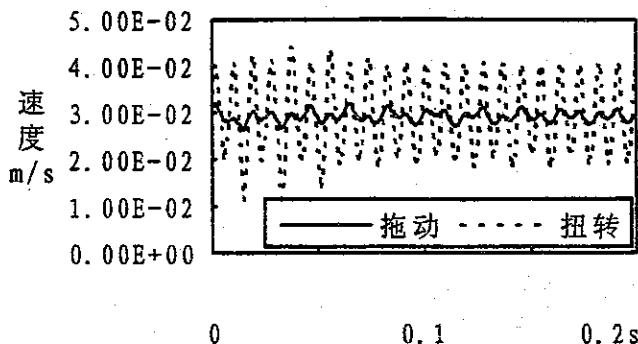


图5-8 纵向拖动速度与扭转速度的时间历程

车轮的横向拖动速度，即为式(3-53)所示的横向蠕滑率乘以轮对前进速度。横向拖动速度的量值决定于轮对和钢轨的横移速度以及轮对的摇头角度。横向拖动速度的波动值比轮对弯曲振动速度的波动小得多，其原因有两个。(1)导向轮作用在钢轨上的横向力(导向轮缘力与踏面蠕滑力之差，如图5-10)仅出现细微波动，致使导向轮及钢轨横向位移量变化不大。(2)在轮缘始终贴靠钢轨的条件下，轮轨横向相对位移几乎为0，轮轨间横向相对滑动速度近似保持为常值。因此图5-9中横向拖动速度基本上为一水平线。

综合图5-8和5-9，可以得出结论，轮对粘滑振动主要是轮对扭转振动引起的；而轮对弯曲振动的作用在于：加大了横向蠕滑力波动，促使蠕滑力达到饱和，从而形成粘滑振动。

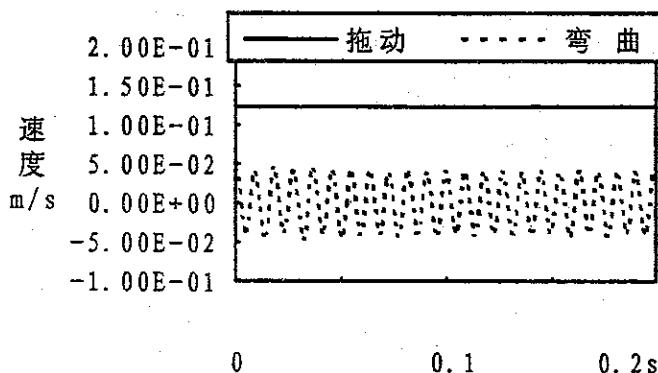


图5-9 横向拖动速度与弯曲速度的时间历程

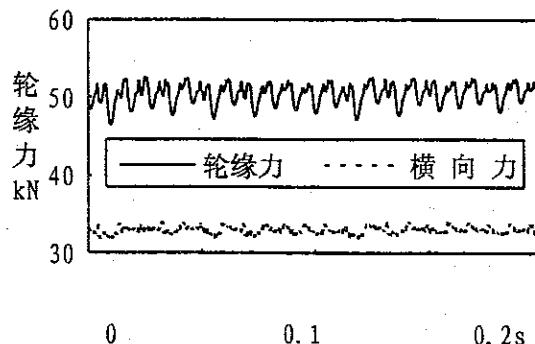


图5-10 导向轮缘力及横向力的时间历程

图5-11是磨耗功频率谱(均方谱,下同),图5-12~5-14是轮对扭转振动、弯曲振动及轮载波动的频率谱。由于轮轨系统垂向、横向振动及轮对弯曲和扭转振动的一阶频率均未超过200Hz,长波波磨的激振频率也在200Hz以内,因此振动的频域分析主要针对200Hz以内的低频区段进行。

磨耗功频谱图上,0~200Hz内分布着许多小峰值,但磨耗功波动的主频清楚地位于90Hz附近。90Hz为轮对扭转振动一阶固有频率,因此,在轮对粘滑振动中,致使轮轨间磨耗功波动的主要因素是持续不衰减的轮对扭转振动。

轮轨垂向振动与轮对弯曲振动有直接的耦合关系。垂向振动使轴颈与轴承间及轮对与钢轨间的垂向力发生波动,引起轮对的弯曲振动;而轮轨横向蠕滑力和轮缘力波动激起的轮对弯曲振动必然引起轴承的上下振动,从而激发轮轨系统垂向振动。因此即使在理想平顺的曲线轨道上,由于轮对弯曲振动的存在,使得轮轨垂向振动同样不衰减。但轮轨垂向力波动幅度不大,平顺轨道条件下,最大波动在5~20kN间。但受到不平顺激扰时,垂向力波动是显著的,垂向振动对轮对弯曲振动的影响很大。

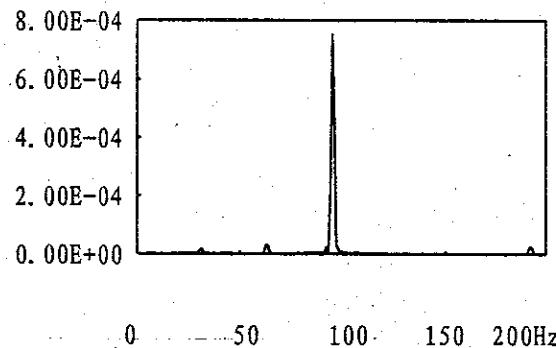


图5-11 磨耗功频率谱

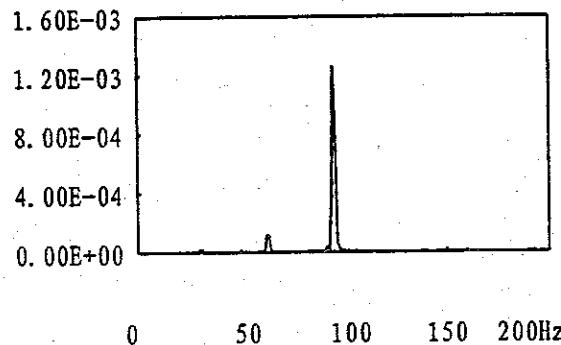


图5-12 扭转角速度频率谱

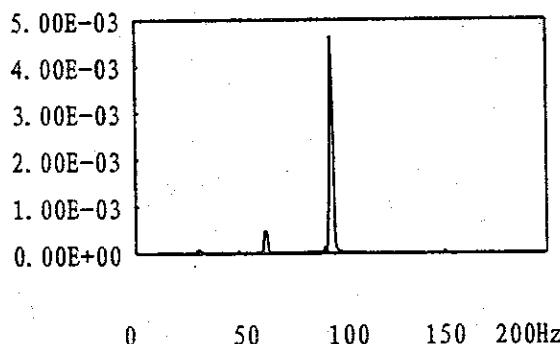


图5-13 弯曲角速度频率谱

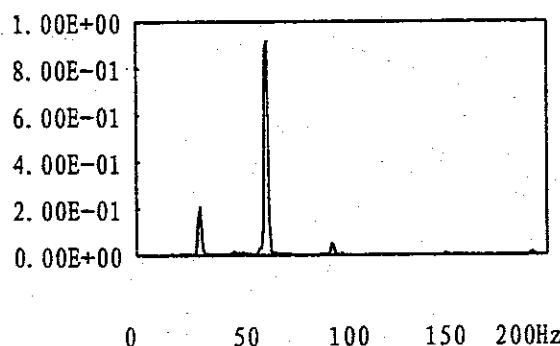


图5-14 轮载波动频率谱

2. 第二类粘滑振动

第二类轮对粘滑振动发生在一系悬挂阻尼偏小等情况下。对于设有一系悬挂的转向架（如客车和机车转向架），当一系悬挂垂向阻尼较小时，轮对的垂向振动和弯曲振动得不到有效的抑制，促成轮对粘滑振动形成。这种粘滑振动

与第一类粘滑振动的特点有所不同，轮轨间粘着段和滑动段长度不相等，且较第一类粘滑振动中要长得多。

考察客车通过300m半径曲线的情况，一系悬挂垂向阻尼取15kN·s/m，其它条件如表4-1、3所列。

导向轮对发生粘滑振动，图5-15~5-18描述了这种粘滑振动的特点。客车虽固定轴距略大，但轴重较小，磨耗功较货车小。磨耗功（图5-15）在粘着段（对比图5-16）保持较低水平，在滑动段保持较高水平。滑动段略长，粘着段略短，约为300~400mm。粘着段与滑动段的长短与线路曲线半径无关，而取决于一系悬挂垂向刚度和轴刚度。滑动段中磨耗功呈现若干个周期的波动，其频率成分主要是轮轨垂向振动频率。

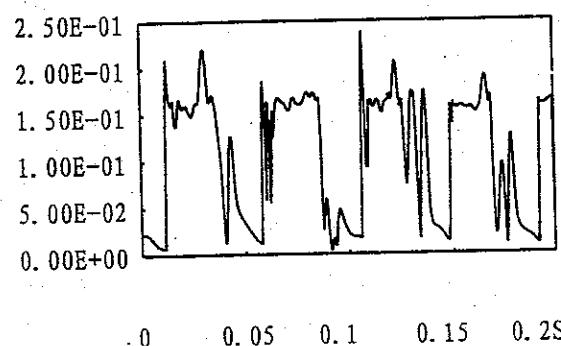


图5-15 磨耗功(kN·m/m)的时间历程

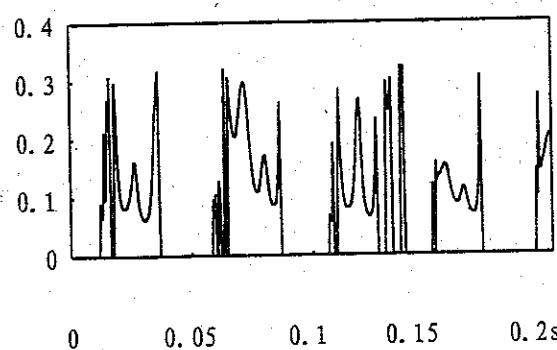


图5-16 轮轨间的粘着与滑动

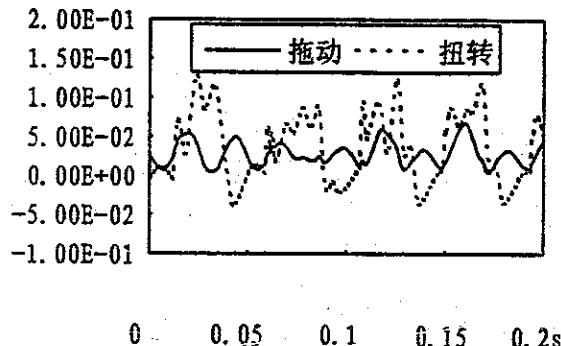


图5-17 纵向拖动速度(m/s)与扭转速度的关系

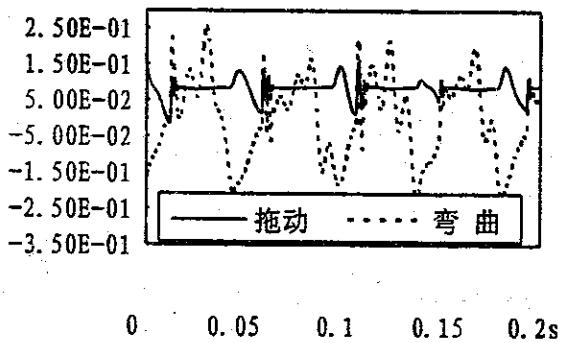


图5-18 横向拖动速度(m/s)与弯曲速度的关系

由于柔软的一系弹簧和较低的阻尼对轮对弯曲振动的抑制作用降低，轮对弯曲振动速度明显加大（图5-18）。同时，因为轨道横向弹性较好，轮对的横向拖动速度波动也较大。轮对在纵向（图5-17）和横向均表现为粘滑，轮对粘滑振动由轮对弯曲振动和扭转振动共同作用而产生的。

3. 第三类粘滑振动

第三类轮对粘滑振动是由于轮轨粘着系数降低等因素引起的。

考察货车在半径300m曲线上的情况，轮轨踏面摩擦系数（粘着系数）为0.135，轮缘摩擦系数为0.2，其它条件如表4-1、2。轮轨粘着系数0.135的取值，是依据文[142]中关于粘着系数与列车速度的关系式计算得到的。依据文[142]中介绍的试验资料，滚动中的车轮，其轮轨粘着系数还可能更低。

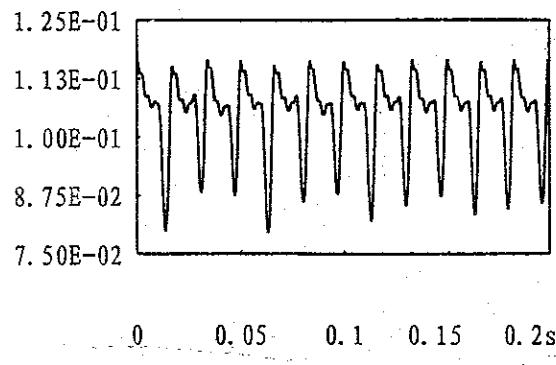


图5-19 磨耗功 (kN.m/m) 的时间历程

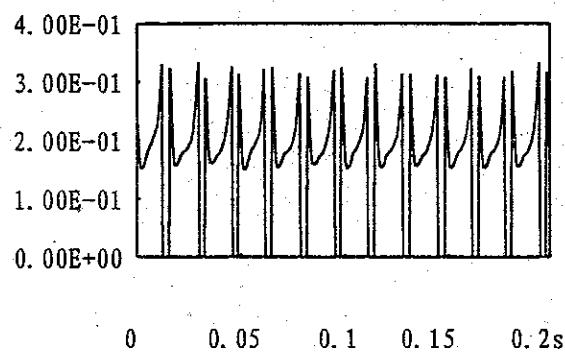


图5-20 轮轨间的滑动与粘着

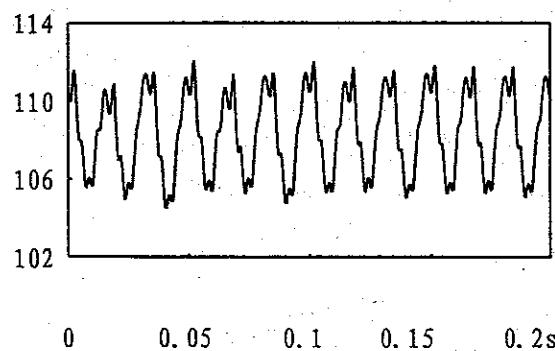


图5-20 轮载 (kN) 波动的时间历程

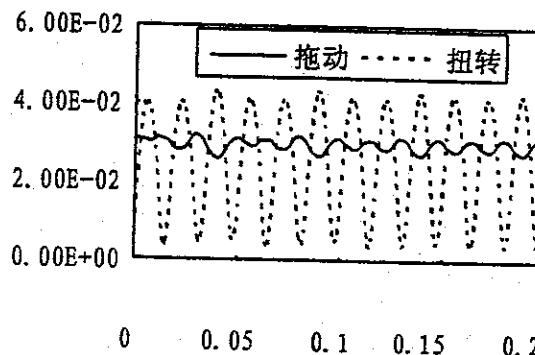


图5-22 纵向拖动速度(m/s)与扭转速度

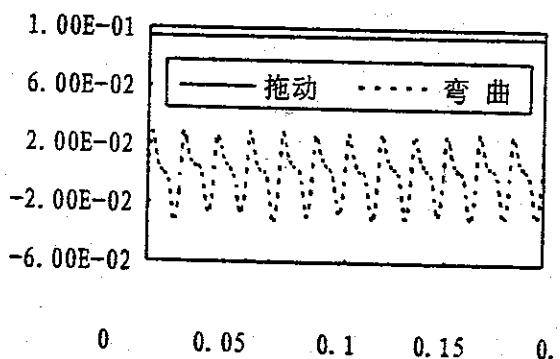


图5-23 横向拖动速度(m/s)与弯曲速度

图5-19~5-23描述这种粘滑振动的特点。磨耗功(图5-19)的波动频率降低,且在两次大峰波动中夹有若干个小峰波动值。磨耗功频谱图(图5-24)上,第一峰频出现在60Hz左右,为轮载波动固有频率(图5-25);第二峰出现在130Hz左右,与轮对弯曲振动一阶固有频率(图5-27)相对应。由于轮轨粘着系数降低,磨耗功中轮对弯曲振动和扭转振动的作用减小而垂向振动作用加大,因此引起磨耗功主频降低。

轮载波动(图5-21)图上,主频波动是由轮轨系统垂向振动引起的,频率在60Hz左右(图5-25),在主频波动的波峰和波谷处有另一频率的波动,这是轮对弯曲振动引起的,其频率大约为130Hz。

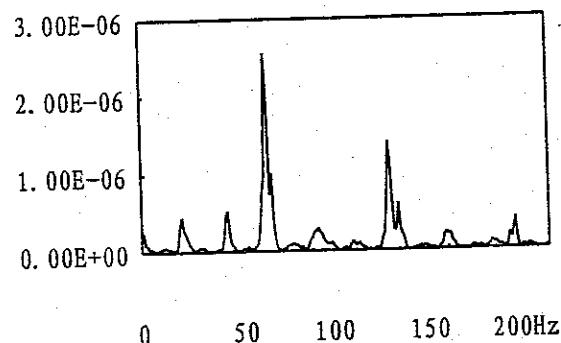


图5-24 磨耗功频谱

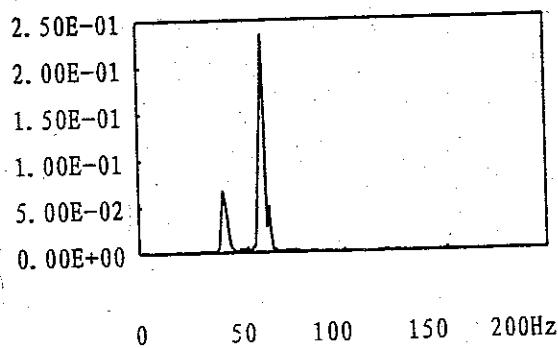


图5-25 轮载频谱

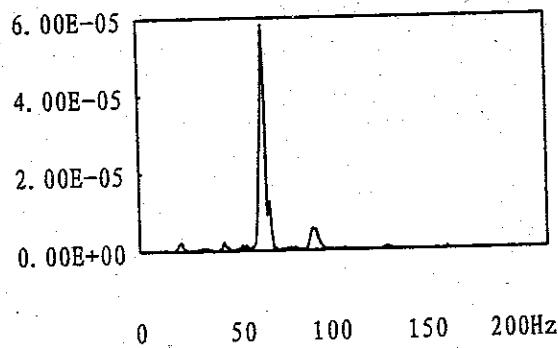


图5-26 扭转振动频谱

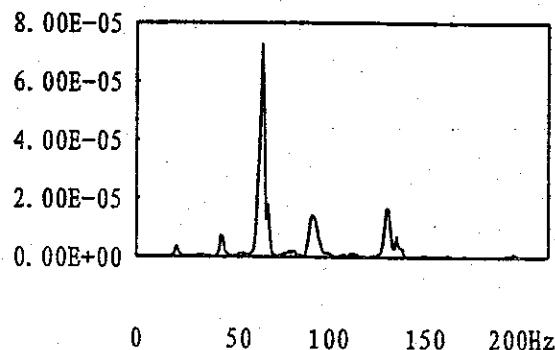


图5-27 弯曲振动频谱

轮对扭转振动和弯曲振动在各自固有频率（扭转90Hz、弯曲130Hz）处并未占据振动的主要能量，而由于与垂向振动的相互激扰，扭转和弯曲振动的主频均出现在轮轨垂向振动频率（60Hz）处（图5-26、5-27）。

轮对的拖动速度与振动速度的对比关系（图5-22、5-23）与第一种粘滑振动中的情况相似。

4. 第四类粘滑振动

第四类轮对粘滑振动发生于轨道存在不平顺的曲线地段，因轨道不平顺作用造成轮轨间出现短暂或瞬时滑动而诱发轮对粘滑振动。

在300m半径曲线上，设有波长0.25m、深0.5mm的坑（如接头马鞍形磨耗），其它条件如表4-1、2，导向轮对发生粘滑振动。图5-28至5-34描述了这类粘滑振动的特点。

车轮在不平顺内及驶出不平顺后的某一时间内，轮对出现粘滑振动，粘滑振动持续一定时间后衰减完毕，振动消失，轮轨间恢复为完全的粘着状态（图5-29）。

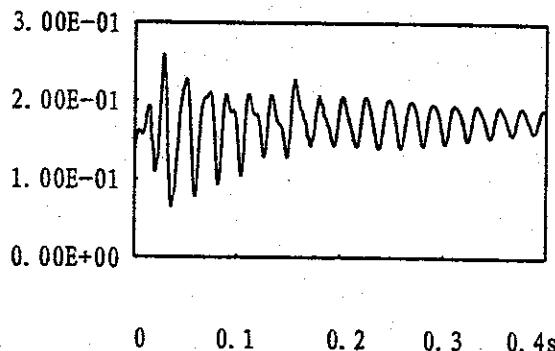


图5-28 磨耗功(kN·m/m)的时间历程

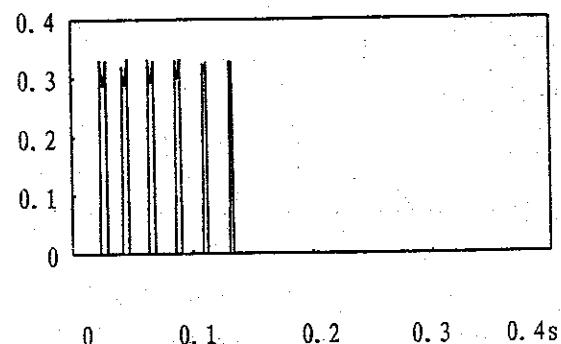


图5-29 轮轨间的滑动与粘着

磨耗功(图5-28)与轮载的波动(图5-30)相似,说明轮载波动对磨耗功波动的贡献是主要的。各种振动参量的频谱曲线上(图5-31~5-34)几乎完全相似地在频率50Hz处出现单一峰值。

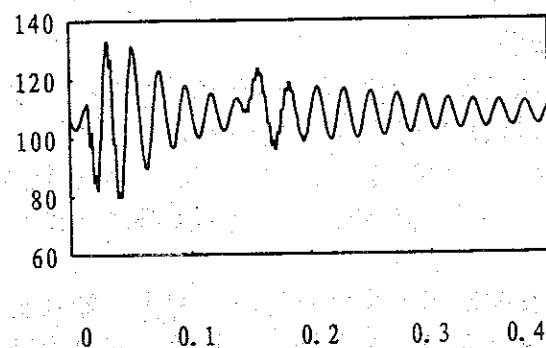


图5-30 轮载(kN)时间历程

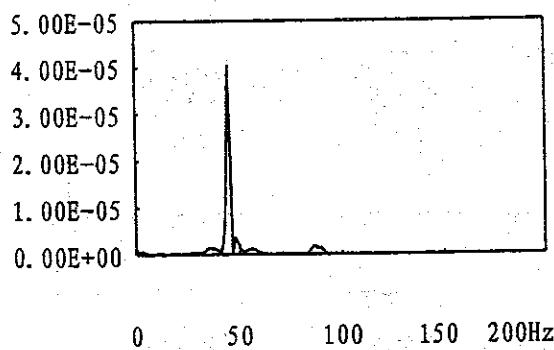


图5-31 磨耗功频谱

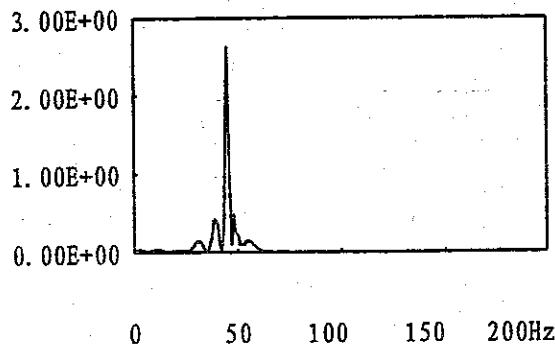


图5-32 轮载频谱

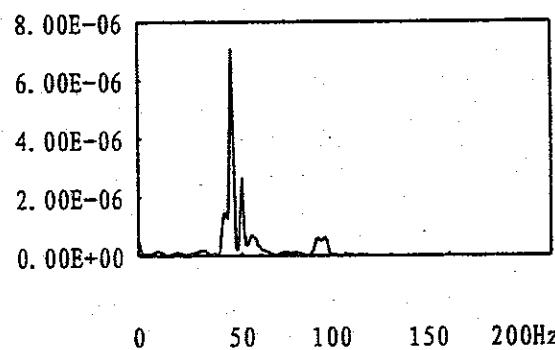


图5-33 扭转振动频谱

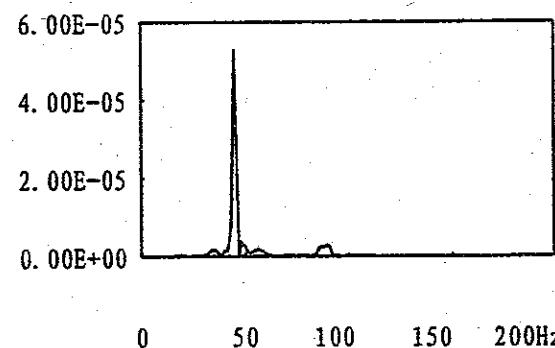


图5-34 弯曲振动频谱

轮对粘滑振动不是单一的振动形式造成的，而是多种振动形式共同作用所产生的结果。轮轨系统垂向振动、轮对弯曲振动和轮对扭转振动，是对粘滑振动影响较大的三种振动形式。

轮对粘滑振动之所以出现不同的形态（或类型），是因为：随着轮轨系统中各参数取值的不同组合，各种振动形式的激化程度不一样。如前所述，第一类粘滑振动中，轮对扭转振动的激化程度较高，控制着粘滑振动；第二类粘滑

振动中，轮对扭转和弯曲振动激化的程度均较高，两者共同控制着粘滑振动；第三、四类粘振动中，三种振动都被激化，以系统垂向振动最大、轮对弯曲振动次之、扭转振动最小，粘滑振动主要受垂向振动控制。

还可能有其它的轮对粘滑振动类型，但上述四类粘滑振动已具有一定的代表性。由于变化参数寻找粘滑振动类型的计算量十分浩大，找出这四种类型已颇费时日。因此，轮对粘滑振动究竟存在着多少种类型，还是一个值得进一步研究的问题。

轮对发生粘滑振动时，磨耗功出现剧烈持续的波动，其结果是在钢轨上造成不均匀磨损，在一定条件下，钢轨不均匀磨损转化成波磨。

§ 5.3 曲线地段轮对的其它振动形式

1. 轮对自激振动

轮对自激振动发生的条件较为苛刻，实际的轮对自激振动难以出现。轮对自激振动通常只出现在线路曲线半径很小、轮轨游间较小、轮轨粘着系数较低、且轨道横向刚度较大的情况下。此处给出一个典型的轮对自激振动例子，并揭示自激振动的一些特点。

在半径300m的曲线轨道上，道床横向刚度取 $2.0 \times 10^5 \text{ kN/m}$ ，轮轨游间取为9mm，轮轨间摩擦系数取0.135，轮缘摩擦系数取为0.2，其它参数取值见表4-1、2。

导向轮与钢轨间始终处于滑动状态，导向轮的振动表现为自激振动。但轮2与钢轨间出现间断滑动，表现为粘滑振动。轮3、4下蠕滑力未达到饱和，表现为非自激振动。

导向轮磨耗功的时间历程如图5-35所示，表现为稳态不衰减的波动，波动近似于正弦函数，但在峰、谷处有迭加的高频成份。

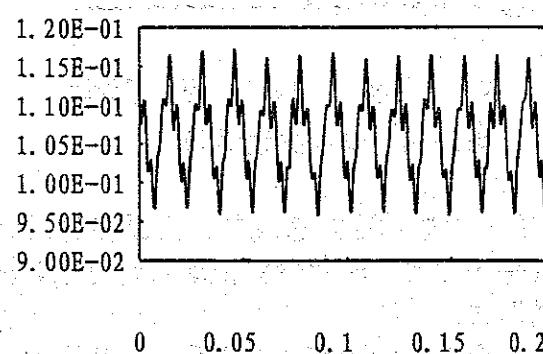


图5-35 磨耗功(kN·m/m)时间历程

图5-36说明蠕滑力始终处于饱和状态，轮轨始终处于滑动状态，这是轮对自激振动的必要条件之一。

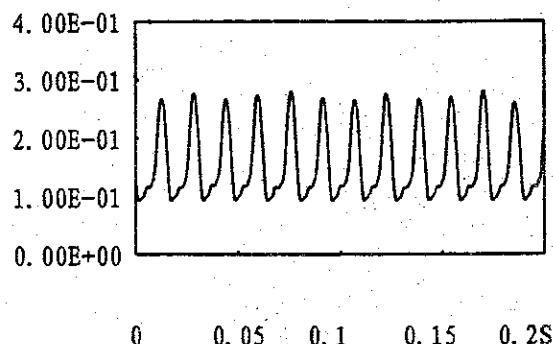


图5-36 轮轨间始终处于滑动状态

轮对自激振动主要受轮对弯曲振动控制。拖动速度大于振动速度是自激振动的必要条件之一。图5-37~38说明，轮对纵向拖动速度远小于横向拖动速度；纵向拖动速度只是间断地大于扭转振动速度，轮对扭转不具备自激条件，表现为粘滑振动；而横向拖动速度始终大于弯曲振动速度，具备自激振动条件。轮对扭转振动使纵向蠕滑力增大，促成轮轨滑动及自激振动的形成。与第一类粘滑振动中的情况相比较，自激振动中，轮对扭转振动和弯曲振动的作用正好相反。

拖动速度与振动速度的对比结果与粘滑振动的情况类似，但因轮轨粘着系数降低，使轮对的粘滑振动转化为自激振动。由此可见，正如许多文献所述，自激振动与粘滑过程没有本质的区别（在一些文献中对两者不加区分）。

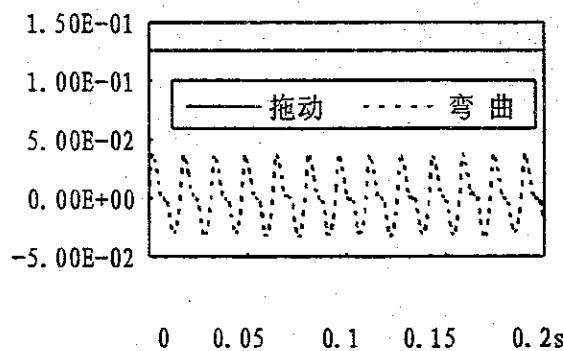


图5-37 弯曲速度(m/s)与拖动速度(m/s)的关系

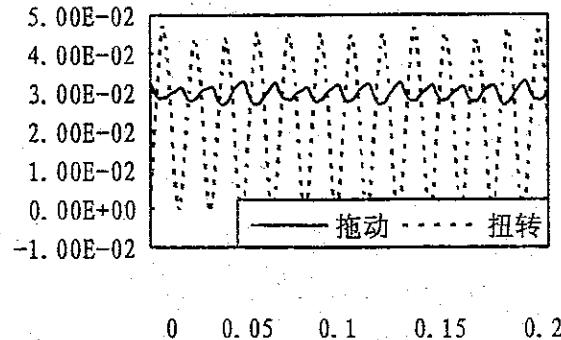


图5-38 扭转速度(m/s)与拖动速度(m/s)的关系

2. 轮对衰减振动

此处所述的轮对衰减振动，是轮轨间出现持续滑动条件下的衰减振动。当轮轨间蠕滑力未达到饱和，而又受到不平顺激扰时，轮对振动同样表现为衰减振动，但这种衰减振动本文中称之为非自激振动。

改变蠕滑力特性曲线，蠕滑力在达到饱和的瞬时骤降至70%，而后保持为常量。其它条件与前面讨论轮对自激振动中的条件相同。

导向轮对的振动表现为衰减振动。图5-39~42分别为导向轮磨耗功、振动速度与拖动速度的对比及蠕滑力折减系数的时间历程。

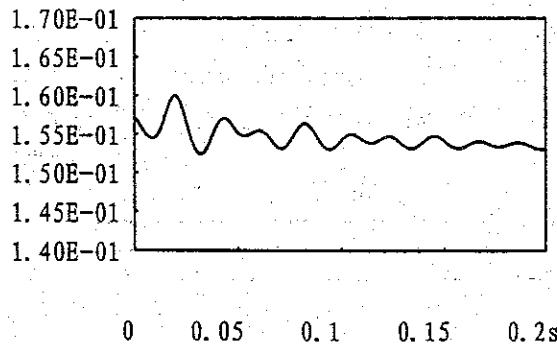


图5-39 磨耗功(kN.m/m)的时间历程

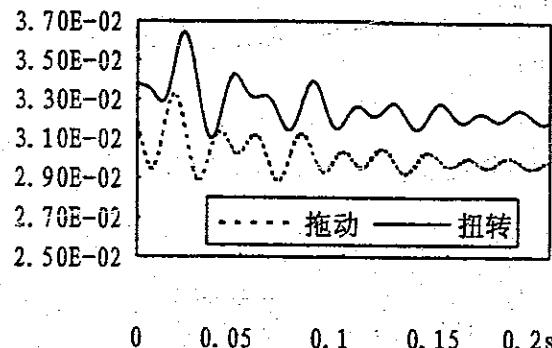


图5-40 纵向拖动速度(m/s)与扭转速度的比较

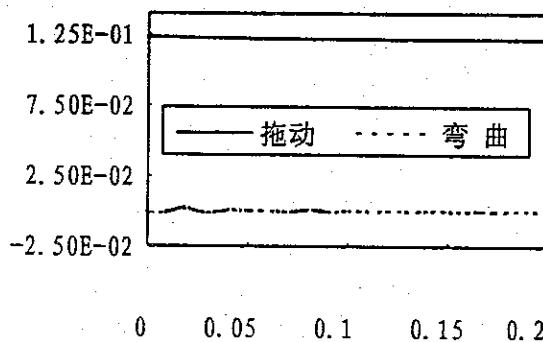


图5-41 横向拖动速度(m/s)与弯曲速度的比较

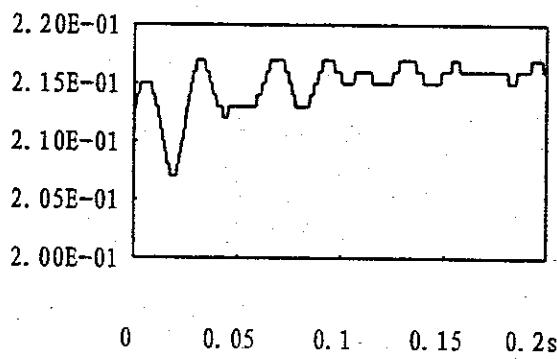


图5-42 轮轨间始终处于滑动状态

磨耗功的波动逐渐减小而最终消失。拖动速度与振动速度的对比关系与自激振动中略有不同，无论在纵向还是在横向，拖动速度都比相应的振动速度大，轮对的弯曲振动和扭转振动均表现为衰减的自激振动。蠕滑力折减系数始

终小于0.33，说明轮轨滑动始终存在。折减系数经若干个周期波动后渐趋稳定，意示着轮轨间将出现持续的滑动，而不是振动。

3. 轮对非自激振动

本文所提到的轮对非自激振动，是在轮轨间蠕滑力未达到饱和的条件下，因轨道不平顺等因素的激扰而发生的轮对振动形式，振动过程中轮轨间始终处于粘着状态。

非自激振动又分为两种情况。第一种情况，同一转向架上所有车轮下的蠕滑力均未达到饱和，此时非自激振动逐渐衰减至完全消失。第二种情况，同一转向架上有某一车轮处于粘滑振动或自激振动状态，则其它车轮的非自激振动也是持续不衰减的。如转8A货车转向架和202客车转向架的第二轮对，当第一轮对或导向轮发生粘滑振动时，一般表现为第二种情况的非自激振动。

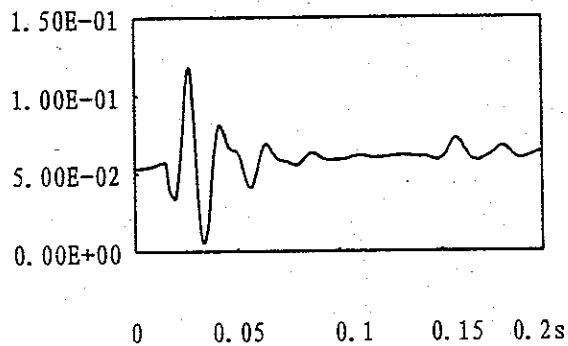


图5-43 磨耗功的时间历程

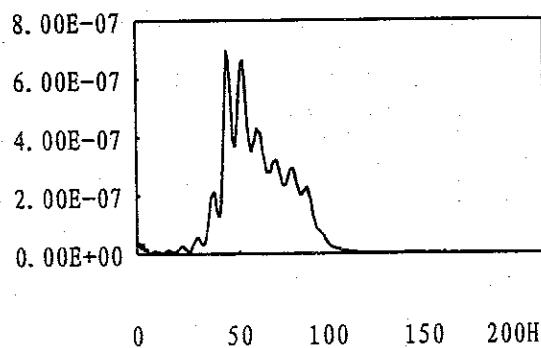


图5-44 磨耗功频谱

此处给出一个第一种情况非自激振动的例子。在600m半径曲线上，轨距1435mm，轮轨游间14mm，外轨超高50mm，且有波长0.25m、波深0.5mm的轨面不平顺，其它条件如表4-1、2。轮轨系统受不平顺激扰而振动，各种振动量的频

率受垂向振动频率控制，振动很快衰减并消失。图5-43~5-44分别为磨耗功时间历程及频谱曲线，磨耗功波动频率在50Hz处出现峰值。

轮对自激振动发生的机率较小，且磨耗功波动量不大。轮对衰减振动及非自激振动的第一种情况，振动很快衰减，持续时间很短。非自激振动中的第二种情况，磨耗功波动值比粘滑振动中约小一个量级。因此，本节所讨论的三种轮对振动形式，虽然磨耗功也出现波动，对钢轨不均匀磨损有一定影响，但与轮对粘滑振动相比，其作用不是主要的。

§ 5.4 轮对弯曲和扭转在形成粘滑振动中的作用

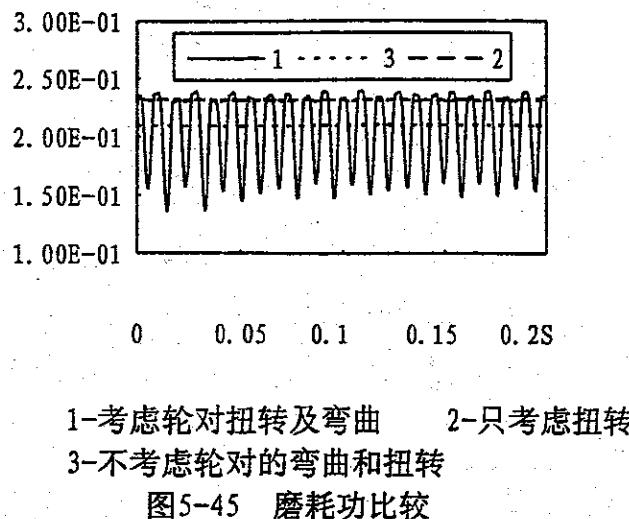
本节所要解决的问题是，如果轮对不发生弯曲和扭转振动，轮对粘滑振动是否还能形成？在轮对弯曲和扭转振动中，哪种振动对粘滑振动的贡献要大一些？为此，计算了三种情况下的磨耗功，如图5-45所示。

第一种情况同时考虑轮对弯曲和扭转，轮对的振动表现为粘滑振动，磨耗功在0.14~0.24 kN·m/m间波动。

第二种情况只考虑轮对的扭转振动，所得到的磨耗功的波动仍具有粘滑振动特性。但其波动幅度与第一种情况相比非常小，以至于在图5-45中显示不出来。扭转振动时磨耗功波动幅度小的原因主要是因为，横向蠕滑力比纵向蠕滑力大得多，如300m半径曲线上，前者约为后者的4~5倍。磨耗功的值主要决定于横向蠕滑，由轮对扭转振动造成的磨耗功波动较小。此外，当只考虑轮对弯曲振动而不考虑扭转振动时，轮对同样发生粘滑振动，只是磨耗功波动量较两者都考虑时略小。

第三种情况不考虑轮对弯曲和扭转振动。此时，无论蠕滑力特性曲线的形状如何，也不管轮轨其它结构参数的取值如何，均未发现轮对的粘滑和自激振动现象。轮对横移和摇头振动频较低，绝大多数参数取值下，这两种频率在20Hz左右，与车轮枕间通过频率(25Hz)相差不远，但计算中未发现轮对横向张弛振动^[96]的情况。

计算及分析表明，没有轮对的弯曲振动或扭转振动，轮对的粘滑振动就不会产生。轮对弯曲振动在粘滑振动的形成过程中的作用比轮对扭转振动大。但是应当注意到，在分析制动力对粘滑振动的影响时，如不考虑扭转振动，则分析结果出入较大。



§ 5.5 控制轮对粘滑振动形成的因素

轮对在曲线上发生粘滑振动的必要条件为：

- (1) 轮轨间出现滑动；
- (2) 蠕滑力饱和后出现骤降或负斜率段，且骤降量或负斜率值要达到一定量值；
- (3) 轮对纵向拖动速度曲线与轮对扭转振动速度曲线出现交点，或，轮对横向拖动速度曲线与轮对弯曲振动速度曲线出现交点。

但上述三个条件并不十分具体，难以指导我们对粘滑振动发生条件进行直观的认识，须转化为更为直观的粘滑振动形成条件。因此首先要回答这样一个问题：轮轨系统中哪些因素对粘滑振动形成与否起控制作用？为此考察了一些主要参数的变化与粘滑振动形成的关系。

1. 蠕滑力特性曲线

蠕滑力特性曲线的形状对粘滑振动形成与否有着决定性作用。为此计算了式(3-62)中的四种蠕滑力特性曲线，其它条件与本章 § 5.2 讨论第三类粘滑振动的条件相同。

(1) 蠕滑力曲线下降

饱和后蠕滑力曲线采用式(3-62)中式(1)时，值得讨论的是其中的滑动摩擦系数最小值 μ_d 及形状系数 S 的取值。计算中选取了 $\mu_d = (0.5 \sim 0.9) \mu_2$, $S = 0.3 \sim 3.0$ ，进行不同的组合。计算结论为：

* 形状系数 S 在 0.3~3.0 中取值时，只对粘滑振动的强度有影响，对粘滑振动形成与否没有影响。

** μ_d 至少要小于 $0.7\mu_2$ ，即蠕滑力饱和后的最大降低量要达到饱和蠕滑力的30%，轮对粘滑振动才会产生。否则轮轨间出现稳态的滑动而非振动。

(2) 蠕滑力直线下降

饱和后蠕滑力曲线采用式(3-62)中式(2)时，计算结论与蠕滑力曲线下降相似。但 μ_d 至少要小于 $0.7\mu_2$ ，且蠕滑力下降段的负斜率要小于(-1/12)时，轮对粘滑振动才可能发生。

(3) 蠕滑力骤降

蠕滑力骤降可看成是负斜率的极端情况。饱和后蠕滑力曲线采用式(3-62)中式(3)时，蠕滑力的降低量至少要达到50%才可能使轮对粘滑振动发生。

(4) 蠕滑力不降

饱和蠕滑力不下降，即(3-62)中式(4)，无论其它条件如何变化，轮对均不会发生粘滑振动。

2. 轨道横向刚度

轮轨系统中的横向刚度加大，易于激发轮对粘滑振动；反之，则有助于抑制粘滑振动。轮轨系统横向刚度中，对发生粘滑振动影响最大的是轨道横向刚度。计算表明，在半径600m以下的曲线地段，道床横向刚度偏大极易激发轮对第一类粘滑振动。

3. 轨道垂向刚度

单独加大轮轨系统垂向刚度不会引发轮对粘滑振动。但当轨道上存在不平顺时，如垂向刚度增加，引起轮轨间垂向力波动量加大，致使轮轨瞬时滑动，引发第四类轮对粘滑振动。而在轮轨系统的各种垂向刚度中，以轨道垂向刚度影响最大。

4. 轮对刚度

单独增加轮对扭转刚度不能消除轮对粘滑振动。计算中曾将轮对扭转刚度加大一个数量级，粘滑振动仍旧存在。但增加轮对的弯曲刚度对第一类粘滑振动可起到良好的抑制作用。如将轮对弯曲刚度增加一倍，则粘滑振动基本上不会产生。由于车轴断面为圆形，弯曲刚度增加的同时，扭转刚度也就增加了。计算表明，将轮对弯曲和扭转刚度增加50%，即轮轴直径增加11%，就能有效地抑制第一类轮对粘滑振动。

5. 一系悬挂阻尼

一系阻尼偏小引发第二类轮对粘滑振动，增加一系阻尼能有效地抑制粘滑振动。计算表明，对于客车，当一系阻尼达到50kN·s/m时，第二类轮对粘滑振动受到明显抑制，而当一系阻尼达到100kN·s/m时，粘滑振动消失。但一系垂向阻尼却不能有效地抑制第一类轮对粘滑振动。

6. 轮对弯曲和扭转振动阻尼

轮对阻尼对粘滑振动有明显抑制作用。计算表明，只有当两种阻尼均达到25 kN·m·s/rad时，对粘滑振动的抑制效果才比较明显。而要完全消除轮对粘

滑振动，阻尼要达到 $50\text{kN}\cdot\text{m}\cdot\text{s}/\text{rad}$ 以上。抑制轮对扭转振动的阻尼主要来源于轮对（轴颈）与轴承（轴瓦）接触面间的摩擦力。但为了减小轮对滚动阻力，轴颈及轴瓦表面的光洁度要求尽可能高，滑动摩擦系数应尽量地小。同时，为了防止热轴，轴颈与轴瓦间通常施以油润。因此，轮对阻尼不大可能达到抑制粘滑振动的量值。

7. 轮轨粘着系数

在讨论粘滑振动类型时，曾列举了粘着系数降低引发第三类轮对粘滑振动的例子。事实上，粘着系数降低使各类粘滑振动的机率均增加。如货车在 600m 半径的曲线地段，道床横向刚度加大至 $2.0 \times 10^5 \text{kN/m}$ ，其它参数不变。粘着系数取为0.2时，轮对出现第一类粘滑振动；而当粘着系数取为0.3时，粘滑振动消失。又如在 600m 半径的曲线上，客车一系垂向阻尼取为 $15\text{kN}\cdot\text{s/m}$ ，其余参数不变。粘着系数降至0.1时出现粘滑振动；而粘着系数达到0.2时粘滑振动消失。这一结果说明，粘着系数较大时，轮对粘滑振动较难形成。但是，计算结果同时显示，一旦形成粘滑振动，则粘着系数越大，磨耗功的量值及波动值也越大，磨耗功的量值与粘着系数几乎呈线性地增加。因此，在大的粘着系数的条件下，一经形成轮对粘滑振动，则波磨更容易产生和发展。

8. 制动力

制动力与轮轨粘着系数降低有类似的作用。列车施行制动时，车轮受到轨面向后的切向力，制动力与蠕滑力迭加，改变了轮轨间切向力量值，必然影响到轮对粘滑振动的形成与否。

由于所计算的列车运行时间在1秒以内，制动引起的车速变化微小，计算中不予考虑。

制动时闸瓦在轮箍上滑动，闸瓦本身也可能产生摩擦振动，但闸瓦摩擦力较小，其波动量值可以忽略。因此将闸瓦摩擦力视为常力，与之相平衡的轮轨间制动力也同样视为常力。闸瓦摩擦力全部用于抑制车轮滚动，当车轮因为轮对弯曲或扭转产生振动时，闸瓦已不可能提供更多的摩擦力去阻止这种微小振动，因此闸瓦的存在不影响轮对的弯曲和扭转振动。

影响轮对粘滑振动的是轮轨间的制动力。在蠕滑力即将达到而尚未达到饱和时，迭加制动力后轮轨间切向力可能达到饱和而致使轮对出现滑动，从而诱发轮对粘滑振动。但是，当轮轨间蠕滑力距饱和状态较远，或者轮对已出现粘滑振动的条件下，制动力虽然对轮对振动的量值有影响，但难以改变轮对振动的性质。

考虑制动力计算轮对粘滑振动时，不能直接将制动力与蠕滑力相加而采用式(3-62)进行饱和判断和修正。在每一步蠕滑力迭代中，先不计人制动力，对各轮位下的蠕滑力进行饱和判断及修正。然后判定制动力与蠕滑力是同向还是反向。当蠕滑力与制动力同向，且蠕滑力已达到饱和，说明在未施加制动力时轮轨间已出现滑动，此瞬时无法再施加制动力。当蠕滑力与制动力同向且蠕滑

力未达到饱和时，则加入制动力，以切向力是否达到摩擦力进行切向力饱和判断。如切向力未达到饱和，则进入下一步计算。如切向力达到饱和，则按照饱和后的蠕滑力曲线进行修正。当蠕滑力与制动力反向时，无论蠕滑力是否达到和，都要与制动力相减而后重新进行饱和判断及修正。

计算表明，当列车以均衡速度通过曲线时，制动力首先使导向轮滑动而诱发轮对粘滑振动。当曲线上存在未被平衡超高时（对某一列车而言，下同），制动力使导向轴上减载车轮首先滑动而诱发轮对粘滑振动。常用制动条件下，非导向轮对不会发粘滑振动，而在制动力很大（单轮10kN）时，非导向轮对也会出现粘滑振动。

考察900m半径的曲线地段，轮缘摩擦系数为0.2、踏面摩擦系数为0.135、未被平衡超高为0、其它条件如表4-1、2的情况下，当列车惰行通过时，轮对不会发生粘滑振动，而当单轮承受5kN的制动力时，导向轮对发生粘滑振动。再考虑1200m半径的曲线地段，轮缘摩擦系数0.2、踏面摩擦系数为0.15、未被平衡超高为0、道床横向刚度取为 2.0×10^5 kN/m，其它条件如表4-1、2的情况下。当列车惰行通过时，轮对不会发生粘滑振动，而当制动为5kN，轮对发生粘滑振动。可见，列车制动可以将发生粘滑振动的曲线半径大幅度提高。

§ 5.6 发生轮对粘滑振动时的参数组合

轮对粘滑振动通常发生在曲线地段。不言而喻，粘滑振动形成与否，与线路曲线半径有着直接的联系。随着曲线半径的减小，轮轨间蠕滑力增大，轮对容易滑动而产生粘滑振动。反之，随着曲线半径增加，轮对发生粘滑振动的机率减小。

分别计算了半径为300、600、900及1200m的曲线地段上，货车转向架轮对粘滑振动的参数组合，同时给出了粘滑振动的类型。但因计算工作量太大，所列举的参数组合不一定完全，但作者相信已包含了大多数情况并具有典型意义。

1. 300m半径曲线轨道上

300m半径曲线轨道上，在下列各参数组合时，发生轮对粘滑振动。其中未提到的参数取值如表4-1、2所列。

- (1) 轮缘摩擦系数0.2、踏面摩擦系数0.135（第三类）
- (2) 单轮制动切向力5kN（第三类）
- (3) 过超高大于60mm（第三类）
- (4) 道床横向刚度大于 2.0×10^5 kN/m（第一类）
- (5) 扣件横向刚度大于 3.5×10^5 kN/m（第一类）
- (6) 轮对横向约束刚度大于 1.0×10^5 kN/m（第一类）
- (7) 一系悬挂垂向阻尼小于15kN·s/m（第二类）

(8) 轨面存在一波长250mm、波深0.4mm的凹坑(第四类)

上列八个条件满足其一，则轮对粘滑振动发生。上述条件的组合后，发生粘滑振动的情况较为复杂，无法一一讨论。但有一点可以肯定，当有两种或两种以上参数变化时，无须达到上述所列值就能诱发粘滑振动。

轮对弯曲和扭转刚度加大1.5~2.0倍时，第(4)(5)(6)项粘滑振动消失。当一系悬挂阻尼大于100 kN·s/m时，第(7)项粘滑振动消失。当轮对弯曲振动阻尼和扭转振动阻尼大于50kN·m·s/rad时，上述所有的轮对粘滑振动被抑制。

2. 600m半径曲线轨道上

当半径为600m时，表4-1中曲线外轨超高应改为50mm、轮轨游间改0.014m，其它条件不变。当下列条件满足其一时，轮对发生粘滑振动。

- (1) 道床横向刚度大于为 2.0×10^5 kN/m(第一类)
- (2) 一系悬挂垂向阻尼小于为15kN·s/m，且轮缘摩擦系数取0.2、踏面摩擦系数取0.135(第二类)
- (3) 过超高50mm，制动力5KN，且轮缘摩擦系数取0.2、踏面摩擦系数取0.135(第三类)
- (4) 轮缘摩擦系数0.2、踏面摩擦系数0.135，且制动力10kN(第三类)
- (5) 轮缘摩擦系数0.2、踏面摩擦系数0.135，且轨面有波长250mm、波深0.5mm的凹坑(第四类)

3. 900m半径曲线轨道上

- (1) 道床横向刚度取为 2.0×10^5 kN/m、扣件横向刚度取为 3.5×10^5 kN/m，且轮缘摩擦系数取0.2、踏面摩擦系数取0.135(第一类)
- (2) 道床横向刚度取 2.0×10^5 kN/m，轮缘摩擦系数0.2、踏面摩擦系数0.135，制动力10kN(第三类)
- (3) 道床横向刚度取 2.0×10^5 kN/m，轮缘摩擦系数0.2、踏面摩擦系数0.135，过超高70mm(第三类)
- (4) 轮缘摩擦系数0.2、踏面摩擦系数0.135，轨面有波长250mm、波深0.5mm的凹坑，且道床垂向刚度加大至 5.2×10^4 kN/m(第四类)

4. 1200m半径曲线轨道上

计算表明，在半径1200m的曲线地段，第一、二、三类粘滑振动已很难发生。只有在若干不利条件同时出现时，如下面一组条件全部满足才会出现第三类轮对粘滑振动。即：

道床横向刚度大于 2.0×10^5 kN/m、扣件横向刚度大于 3.5×10^5 kN/m，轮缘摩擦系数小于0.2、踏面摩擦系数小于0.1，过超高大于50mm、制动力大于10kN(第三类)

上列一组条件已非常苛刻，即严重板结的道床、几乎没有横向弹性的扣件、轮缘良好的涂油润滑、轨面因雨水等因素致使粘着系数降低、低速车施行大柄位制动。

由此可见，对于圆顺轨道，半径大于1200m的地段是不可能产生轮对粘滑振动的。也就意味不可能产生波磨。但是轨道不可能是圆顺的，存在不平顺（包括静态和动态不平顺）是不可避免的。在轨道上存在不平顺，且道床垂向刚度较大时，仍可能发生第四类粘滑振动。如下面一组条件：

轮缘摩擦系数0.2、踏面摩耗系数0.135，制动力5kN，轨面有波长250mm、波深0.5mm的凹坑，道床垂向刚度加大至 5.2×10^4 kN/m（第四类）。

第六章 钢轨波磨的形成及发展

曲线地段，轮对一旦产生粘滑振动，轮轨间磨耗功呈现剧烈持续的波动。磨耗功的波动致使钢轨不均匀磨损，在一定条件下，不均匀磨损转化为钢轨波磨。

单个车轮对钢轨的不均匀磨损是非常微小的。钢轨波磨是不均匀磨损的累积，因此波磨的形成和发展决不是个别车轮的作用，而是通过曲线的所有车轮或多数车轮作用效果的累加。轮对粘滑振动虽然可能造成钢轨的不均匀磨损，但这种不均匀磨损是随机的，每一通过车轮可能加大前一车轮产生的不均匀磨耗，同样也可能抵消前一车轮造成的不均匀磨耗。因此，出现轮对粘滑振动并不意味着钢轨波磨一定会产生和发展。

本章所要讨论的正是轮对粘滑振动在什么样的条件下才能形成钢轨波磨。由于波磨的形成条件和发展条件难以截然分开，通常情况下形成条件也即为发展条件，所以在本文中总是将两者并提。

§ 6.1 波磨形成和发展的必要条件--轨道不平顺

轮轨系统中的不平顺是多种多样的，包括轨道不平顺和机车车辆走行部不平顺。轨道不平顺中又有静态和动态不平顺两类。典型的静态不平顺较如钢轨接头、轨面剥离和擦伤以及轨道几尺寸误差等，动态不平顺则如轨枕空吊、轨枕间断支承效应、道床弹性不均匀等。机车车辆走行部不平顺主要有轮不圆、轮偏心、车轮扁疤、同一轮对上两轮的轮径不等或两轮不平行等。

走行部的不平顺出现在部分车轮上，当这些车轮在轨道上行进时，造成轮轨间力的波动并诱发轮轨振动。但对于既定轨道点，这种振动是随机的。而对于轨道不平顺，却可以期望每一个车轮在通过不平顺后的作用力和振动具有大致相同的特征。因此，轨道不平顺在波磨形成中所起的作用要明显大于走行部不平顺。

我们来考察一下轨道不平顺如何影响、激化轮对粘滑振动，并使之成为波磨形成的原因。

1. 第一、二类粘滑振动的情况

以第一类轮对粘滑振动为例。设轨面有一波长250mm、波深0.5mm的单波不平顺。将不平顺置于不同位置，使轮对进入不平顺瞬时的振动处于不同状态。

图6-1~2是磨耗功的计算结果。计算条件与第五章§ 5.2节中第一类粘滑振动条件相同。可以清楚地看到，轮对经过不平顺时，粘滑振动被进一步激化，磨耗功波动幅度剧增。轮对驶出不平顺后的一段时间内，粘滑振动仍然保持在这种更高的水平。

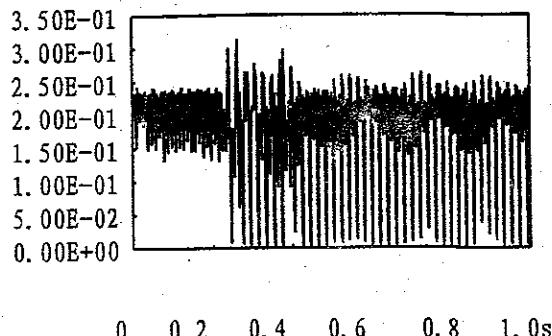


图6-1 磨耗功(kN·m/m)的时间历程(不平顺距始点3米)

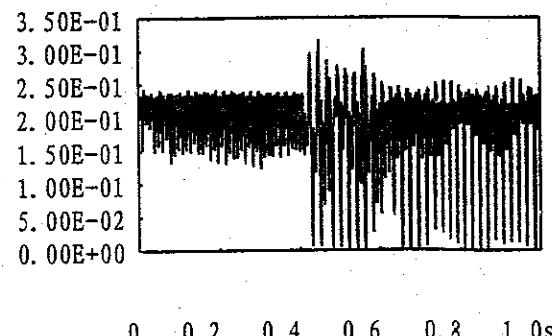


图6-2 磨耗功(kN·m/m)的时间历程(不平顺距始点5米)

将图6-1中0.2-0.4秒及图6-2中0.4-0.6秒放大后成为图6-3和6-4。两图中轮对进入不平顺后的振动曲线完全相似。可见，不管进入不平顺前轮对的振动状态如何，轮对进入不平顺时，振动就被归一化。在不平顺范围内及轮对驶出不平顺后，磨耗功波动仍保持着这种相似性。

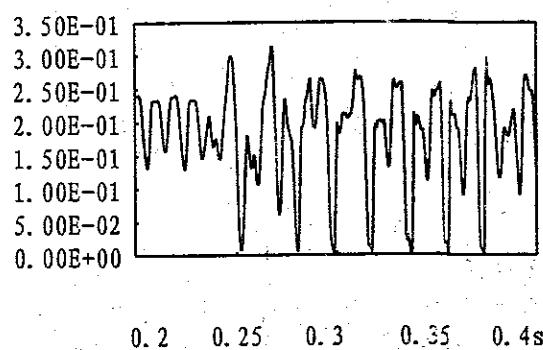


图6-3 磨耗功的时间历程(放大)

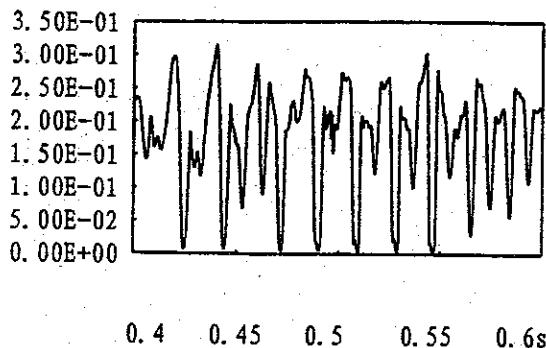


图6-4 磨耗功的时间历程(放大)

对图6-1所示的磨耗功进行谱分析，得到图6-5所示的磨耗功频谱图。与图5-11进行对比，图6-5的频率曲线只是在频率50Hz处的峰值有所上升，但主频仍在90Hz处，轮对的振动频率没有明显变化。不仅单个不平顺是这样，即使轨面上连续地布满波长140mm、波深0.5mm的波磨，50Hz处轮轨垂向振动有一定加大，但磨耗功的主频仍然为90Hz。

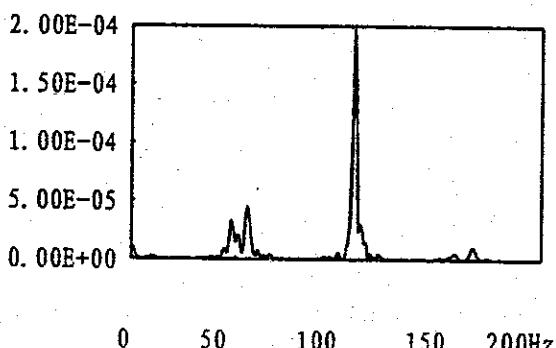


图6-5 磨耗功的频谱曲线

因此，对于轮对第一、二类粘滑振动，轨道不平顺对振动的频率特性影响较小，但加大了粘滑振动的强度，并且，轮对在进入不平顺和驶出不平顺后，粘滑振动被归一化。

2. 第三、四类粘滑振动

轨道不平顺使粘滑振动出现机率增加。考察1200m半径的曲线地段，设轮缘摩擦系数为0.2、踏面摩擦系数为0.135，列车通过时存在25mm的过超高和5kN的制动力，道床垂向刚度加大到 3.5×10^4 kN/m，其它条件如表4-1、2所列。圆

顺轨道上不会发生轮对粘滑振动。当轨面有一波长0.25m、波深0.5mm的单个不平顺时，轮对发生粘滑振动。

车轮进入不平顺时，垂向力降低并激发轮对弯曲振动。轮轨垂向力达到最小值时，因蠕滑力达到饱和轮轨间出现瞬时滑动。这种瞬时滑动使轮对中积蓄的扭矩释放并诱发轮对扭转振动。除了此瞬间的滑动外，轮轨间不再出现滑动。但由于抑制轮对弯曲振动和扭转振动的阻尼较小，轮对的振动要经过较长时间才能衰减完毕。

图6-6是不平顺前后导向轮轮载的波动情况，从中看到轮载的波动特点（参见局部放大图6-6*）。导向轮（轮1）进入不平顺前，轮载为99.727kN，进入不平顺后，轮载减小，在下坡段中点达到极小值83.402 kN。车轮滚过下坡段中点后轮载逐步回升，在谷底（最大矢度处）接近进入不平顺前的轮载（98.05kN）。车轮滚过谷底后轮载继续上升，在上坡段中点达到极大值124.725kN（也就是最大值）。车轮滚出不平顺瞬时，轮载已降到接近进入不平顺前的轮载（97.102 kN）。即，车轮在单波不平顺范围内波动一个周期，且：在不平顺起点、终点及谷底的轮载几乎相同，而在下坡段中点轮载最小，上坡段中点轮载最大。这种轮载变化规律已在石太线波磨轨道现场动力测试中得到证实。

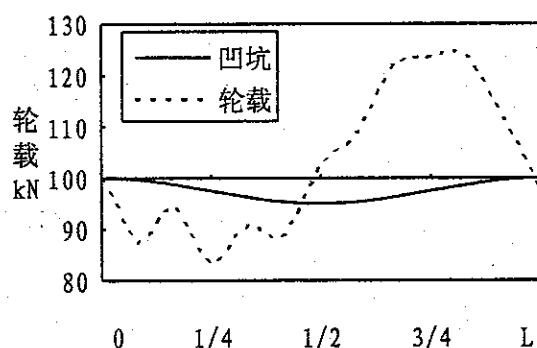


图6-6* 不平顺内轮载的变化

轮1驶出不平顺后，轮载波动持续两个周期衰减完毕。轮载的最小值(72.202kN)出现在不平顺以外。在轮载最小值处轮轨间出现滑动，轮对扭转振动从此开始。

轮3进入不平顺时，轮1的轮载同样出现波动，但波动量值较小。转向架全部驶出不平顺后，由于构架点头振动的影响，轮载还要作类似于转向架进出不平顺的波动过程，但波动量值已很小。随后轮载波动衰减完毕。

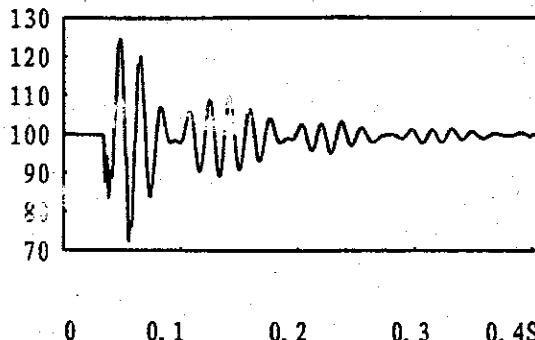


图6-6 轨面存在不平顺时的轮载波动

图6-7~8分别是轮对的纵向拖动速度与扭转速度及振动横向拖动速度与弯曲振动速度的情况，此处给出速度图的目的，在于分析轮对弯曲及扭转振动的情况。

从图6-8中看到，轮1一旦进入不平顺，因轮载变化，轮对弯曲振动即被激化。弯曲振动与轮载波动的频率基本相同，但弯曲振动最大值比轮载波动晚若干个周期。由于轮对弯曲振动阻尼较小，振动难以在2~3个周期内衰减完毕，从弯曲振动速度图上难以区分轮位和转向架的位置。

从图6-7中可以看到，不平顺激化的轮对扭转振动要比轮载波动和轮对弯曲振动晚一定时间。只有当轮载波动和轮对弯曲振动致使轮轨间出现滑动时，扭转振动才被激化。轮轨出现瞬时滑动时，轮1和2的扭转速度均出现跳跃，这种跳跃并不是轮对振动，而是轮对滚动速度发生了变化。

由此可以推知，车轮受轨道不平顺的影响而产生瞬时滑动时，轮对的滚动速度会突然加大，图6-7中相当于轮对滚动速度加大了0.36km/h。由于受到转向架平移速度的限制，这种轮对滚动速度的增加只能持续很短的时间（约0.5秒）。但这种短时间的轮对滚动速度变化加大了轮轨间的蠕滑力，从而增加了钢轨磨耗。

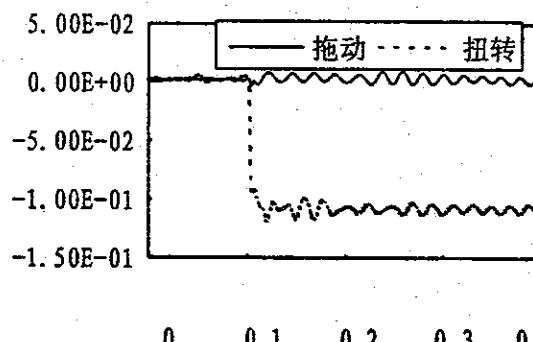


图6-7 纵向拖动速度(m/s)与扭转速度

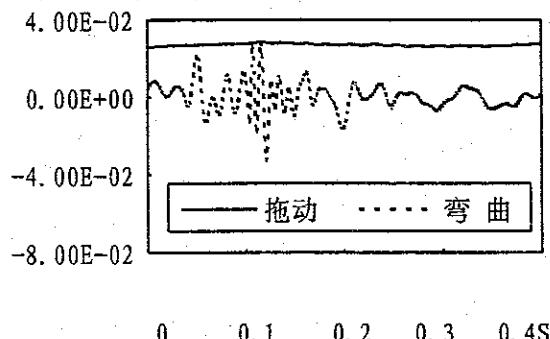


图6-8 横向拖动速度(m/s)与弯曲速度

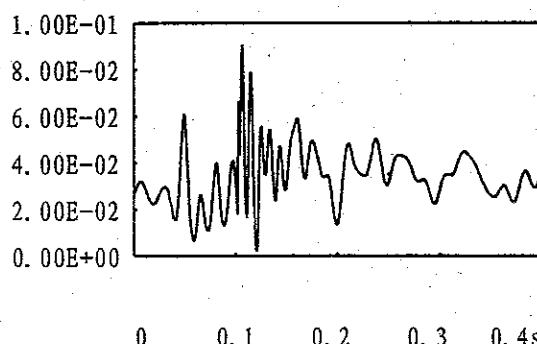


图6-9 磨耗功(kN.m/m)的时间历程

图6-9为磨耗功时间历程。磨耗功最大值出现在距不平顺约半个转向架定距的地方，意示着在该处将出现最大的钢轨磨损，轨面将出现凹坑。这种凹坑即为波磨生成的第一个单波。波磨由接头附近（但不是直接从马鞍形磨耗开始）始发，逐渐向钢轨中部扩展，这正是我们在现场观察到的比较典型的波磨发展特征。

由以上分析可见，轨道不平顺在波磨形成和发展中有三个作用。

- (1) 轨道不平顺使轮对粘滑振动进一步被激化，轮对经过不平顺后粘滑振动保持在更高的振动强度。
- (2) 不平顺使轮对粘滑振动归一化。在车速相等或相近的条件下，每一通过车轮对既定轨道点的作用都是重复和累加的。正是这种重复和累加作用使钢轨上磨耗大的地方和磨耗小的地方固定不变，这样就促成了波磨的形成和发展。从这个意义上讲，没有轨道不平顺，就不会有波磨。
- (3) 轨道不平顺激发轮对粘滑振动。在半径较大的曲线地段，因钢轨接头等不平顺激发轮对粘滑振动从而致使波磨出现。

文[114]中述及，曾在FAST试验线上人工制作轨面不平顺，但却没有发展成为波磨，从试验方面说明不平顺只是波磨形成的必要条件，但决不是充分条件。

上面仅讨论了一种轨道不平顺的情况，采用同样的方法不难证明，其它轨道不平顺在波磨形成过程中也具有相似的作用，仅在影响程度上表现出差异。

§ 6.2 波磨形成和发展的必要条件--某一车速占优势

通过曲线地段的列车速度分布在一定范围内。由于波磨是各通过列车对钢轨磨损效果的累加，因此列车速度的离散程度对波磨的形成和发展起到重要的作用。不容回避地要回答这样一个问题：波磨的形成和发展与车速分布是什么关系。

曲线的外轨超高一般依据通过该曲线所有列车的平均（或加权平均）车速设置。外轨超高一经设定即相对固定。既定超高难以准确适应每一通过列车。事实上，仅有极少数列车以平均速度通过，在曲线上的未被平衡超高约为0，大多数列车都或多或少地存在未被平衡的超高。为叙述方便，称未被平衡超高为0的车速为均衡车速，速度比均衡车速低的列车叫低速车，反之称为高速车。

1. 未被平衡超高对粘滑振动的影响

未被平衡超高影响轮对粘滑振动强度，激化或抑制粘滑振动，但对粘滑振动的频率特性影响微弱。也就是说，在某一曲线地段，即使性能完全相同的列车，以不同车速通过曲线时，轮对的粘滑振动强度也存在差异。

为此，考察半径300m外轨超高100mm的曲线上，列车以35、50、65 km/h三种速度通过时，轮对的粘滑振动情况。

计算结果表明，过超高加大轮对粘滑振动，而欠超高则抑制粘滑振动。随过超高(+)的增大，磨耗功波动幅度持续增大；随欠超高(-)增大，磨耗功波动幅度持续降低。由表6-1中数据可以得出结论：列车类型相同的情况下，低速车在波磨形成和发展过程中的作用大于高速车。

表6-1 磨耗功(kN·m/m)波动幅度与未被平衡超高(mm)的关系

Δh	第一类粘滑振动	第二类粘滑振动	第三类粘滑振动	第四类粘滑振动
52	0~0.3	0~0.3	0~0.13	0~0.28
0	0.15~0.24	0~0.3	0.075~0.113	0.06~0.28
-66	0.16~0.22	0.06~0.25	0.085~0.11	0.08~0.26

对于第三、四两类轮对粘滑振动，欠超高不但使粘滑振动强度降低，而且当欠超高较大时，粘滑振动消失。如第三类粘滑振动，当欠超高达到66mm（车速65km/h）时，粘滑振动消失。

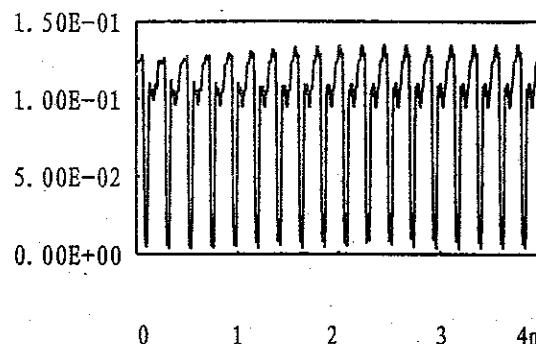


图6-10 磨耗的距离历程 ($V=35\text{km}/\text{h}$)

图6-10是车速35km/h（过超高52mm）时磨耗功的距离历程，可以清楚地看到轮对处于粘滑振动状态。图5-19中给出了车速50km/h（均衡车速）时磨耗功的时间历程，同样可以看到粘滑振动的特点。图6-11是车速65km/h时磨耗功的距离历程，粘滑振动被抑制，轮对的振动逐渐衰减。

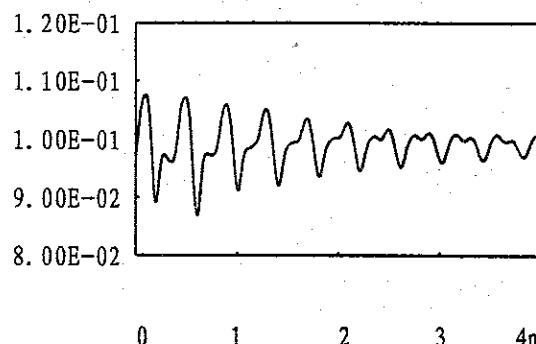


图6-11 磨耗功的距离历程 ($V=65\text{km}/\text{h}$)

2. 车速分布的限度

由于粘滑振动频率基本上与车速无关，因此粘滑振动的波长（距离历程）与车速存在一一对应的关系。如车速50km/h时，第一类粘滑振动波长为138mm，而当车速降至35km/h时，波长相应地降至97mm。振动波长与车速的这种对应关系，使得列车的速度分布对波磨的形成和发展极为重要。假设有某一段落，通过列车的车速分布在较宽的速度范围，且任一车速的列车数量均不占

优势。由于各通过列车对钢轨的不均匀磨损不会产生累加效应，可以断定，这一路段上不会出现波磨。反之，当车速密集于某一速度值附近时，波磨就容易产生和发展。

那么，两列车的车速相差多少时，对钢轨的磨损才具有累加效应。

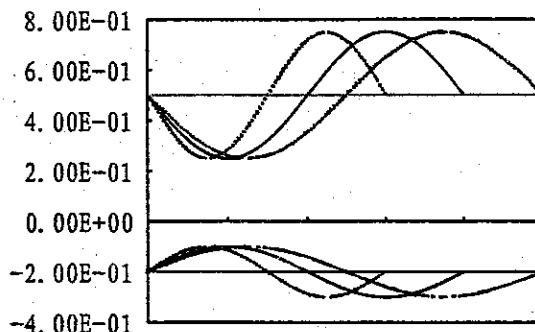


图6-12 磨耗功波长离散程度示意

图6-12中将磨耗功（上部）简化为单频波动的正弦曲线，对应的钢轨磨损（下部）也应为正弦曲线。实线分别表示磨耗功波动和波磨的中心波长，虚线分别表示最高最低车速下磨耗功的波动和波磨波长。为了保证磨损大的波谷始终承受大的磨损，则最短波长不能短于中心波长的 $3/4$ ，最长波长不能长于中心波长的 $5/4$ 。也就是说，只要磨耗功的波动波长满足： $0.75L_0 < L < 1.25L_0$ （其中 L_0 为中心波长），则能保证各通过列车轮在钢轨磨损大的地方总是磨损大，磨损小的地方总是磨损小。

车速离散度越小，波磨越易形成，且发展越快。其中尤其是低速车的速度，如果速度集中在某一车速附近，则助长波磨的形成和发展。在平均车速为50km/h的曲线地段，如果车速均匀分布的话，波磨产生的车速分布限度为：38km/h $\leq V \leq 62$ km/h。车速离散程度如更大，则波磨难以形成。

图6-12的钢轨磨损示意曲线还能较好地解释许多地段波磨的发展过程。波磨形成及发展过程中，波谷处磨损较大，波谷逐渐加深的同时逐渐加长；而波峰的磨损较小，且逐渐缩短。最后形成多个凹坑相连的波形磨耗。如果在半波深处画水平线，所量得的波峰区比波谷区短得多，这与我们在现场观测到的情况相吻合（参见第二章）。文献[124]中也描述波磨的这种发展特点。在车速离散程度稍大的地段，还会形成波长达0.7-1.0m的特长波，波谷呈碟状。

3. 实例分析

石太线波磨严重地段的车速测试结果表明，某一车速占据较大优势确实是波磨形成和发展的必要条件之一。

在石太线K41附近300m半径曲线上，某一昼夜通过列车共87对，最低车速15.8km/h，最高车速56.4km/h。该曲线距井陉车站约500m，通过列车分为两类，一类是进站停车的列车，在被测地段施行制动，车速在15~35km/h之间；另一类是直通列车，在被测地段处于隋行或牵引工况，车速在40~60km/h之间。因此在图6-13的车速分布图上，20~25km/h及45~50km/h两种车速占据明显的优势。以35km/h为分界点分段统计，低速车平均车速25.1km/h，均方差4.5km/h，高速车平均车速48.7km/h，均方差3.5km/h。该曲线设超高为80mm，低速车经过时存在约50mm的过超高，而高速车经过时存在约10mm的欠超高。

波磨特征观察及轨道动测试验表明，该地段波磨形成的主要原因是第三、四类轮对粘滑振动。低速车因制动发生第三类轮对粘滑振动，对应的波磨波长约为200mm；高速车发生第四类轮对粘滑振动，对应的磨波长约为400mm。低速车因存在制动和欠超高，磨耗功的波动较高速车大一倍以上，因此低速车在波磨的形成及发展中的作用要大得多。按照磨耗功大小进行加权平均，预示该段波磨的平均波长约为270mm左右，与实际量测数据基本吻合。

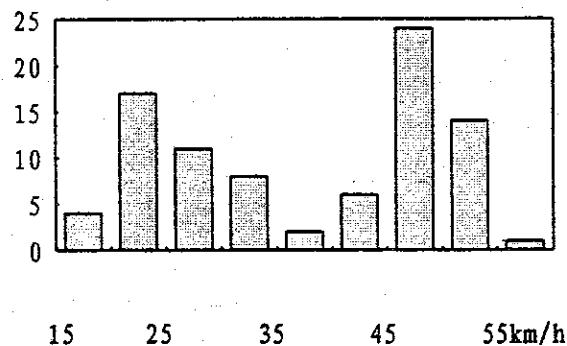


图6-13 石太线K41曲线一昼夜车速分布

§ 6.3 波磨形成及发展的必要条件--某种车型占优势

本节将分析列车类型（含机车和车辆）在波磨形成和发展中的作用。针对我国典型的机车车辆类型（韶山1型机车、配新转8A的货车及配转202的客车）进行轮对粘滑振动分析，结果发现，三种车型轮对粘滑振动的频率特性差异甚大。

图6-15是韶山1型机车轮对发生粘滑振动时磨耗功波动的时间历程，计算条件如表4-1、4所列。由于机车转向架的固定轴距较大，轮轨冲角较大，正常条件下半径小于600m的曲线地段上，总是出现第二类轮对粘滑振动。而当轮轨粘着系数下降至0.135时，半径小于900m的曲线上也总是发生第二类轮对粘滑振动。

机车轮对（图6-15）与客车轮对（图5-15）的粘滑振动都属于第二类粘滑振动。不同之处在于：(1)机车的磨耗功大而客车的磨耗功小；(2)机车轮的粘着段和滑动段比客车更长，粘着段和滑动段长约700~1100mm。机车和客车所表现出的差异主要是由于机车一系悬挂垂向刚度较小、簧下质量较大及轴重较大等因素引起的。

对于机车，轮轨系统垂向振动、轮对弯曲及扭转振动的频率十分接近，分别为30、33、38Hz，因此三种振动形式极易耦合，三者的共同作用形成轮对的粘滑振动和磨耗功波动。

轨道横向刚度增大、轮轨粘着系数降低以及轨道不平顺等因素，同样影响机车轮对粘滑振动的发生机率，这些因素将机车轮对粘滑振动发生半径大幅度提高。初步计算表明，在3000~4000m这样的大半径曲线上，个别情况下机车也可能发生轮对粘滑振动。

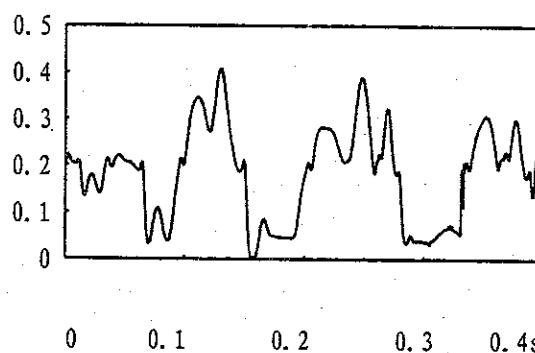


图6-15 机车轮磨耗功(kN·m/m)的时间历程

在第五章中曾提到，客车的一系悬挂阻尼达到 $100\text{kN}\cdot\text{s/m}$ 时，可以明显地抑制轮对粘滑振动。对于机车，加大一系悬挂阻尼同样有抑制粘滑振动的作用。如机车一系悬挂阻尼加大到 $200\text{kN}\cdot\text{s/m}$ ，则在半径大于600m的曲线上，第二类粘滑振动消失。

加大轮对轴刚度也能有效地抑制粘滑振动。如能将轴刚度加大一倍，采用直径240mm的空心车轴，则可消除大多数机车的轮对粘滑振动。

客车轮对的粘滑振动已在第五章中作为第二种粘滑振动举例加以叙述，此处不再重复。

机车和客车轮对粘滑振动的特点，明显地不同于货车轮对，其关键在于是否设置一系悬挂。而机车轮对与客车轮对的粘滑振动，虽同属于第二类粘滑振动，但频率特性相差较大。

因此，机车轮、客车轮和货车轮对钢轨的不均匀磨损，相互间不可能产生重复和累加效应，钢轨波磨是这三种车轮中的某一种车轮所产生的，而不是三者共同作用。与机车相比，车辆数量要大几十倍，即或单个机车轮对钢轨的磨损要比车辆轮大（约为2~3倍），但对钢轨磨损起决定性作用的仍然是车辆。研究钢轨磨损的资料也表明^[151]，机车对钢轨的磨损量最多能占到总磨损量的二成。可以断定，磨损型波磨形成和发展过程中，主要是车辆的作用。

在客货混跑的线路上，客车的作用不可忽视。因客货车轮对粘滑振动特点的差异，客车数量增加起到了抵消货车对钢轨不均匀磨损的累加效应。所以在客货混跑的线路上波磨的形成和发展都较为缓慢。与之相对比，象石太线这种运煤专线上，货车数量占绝对优势，波磨的形成和发展就特别快。

通过上面三节分析，可以归纳出钢轨波磨形成和发展的四个必要条件：

- (1) 轮对发生粘滑振动
- (2) 轨道上存在不平顺
- (3) 某一列车车速占明显优势
- (4) 某一车型占明显优势

§ 6.4 波磨发展速率与既有波深的关系

波磨形成和发展的原因，是一定条件下的轮对粘滑振动。但当粘滑振动类型不一样时，波磨的发展速率也不一样。现以第一类和第四类粘滑振动为例，说明波磨发展速率的差异。

所谓波磨发展速率，是指波深加大的快慢程度，通常用单位通过总重的波深加大量（mm/MGT）表示。而通过总重是每一个通过轮对的累加，单个轮对磨耗功波动量值直接影响到波磨发展速率，因此，本节中以磨耗功波动量值衡量波磨发展的速率。

轨面未形成连续波磨前，波磨表现为离散的多个凹坑，这种不平顺的影响已在§6.1节中进行了讨论。此处研究波磨发展速率，总是假设轨面已形成连续的波磨。通过计算不同波深条件下，磨耗功的波动量值来分析波磨的发展速率。

1. 由第一类粘滑振动形成的波磨

设轨面有波长140mm、波深分别为0、0.5、1.0和1.5mm的连续波磨，计算轮对第一类粘滑振动的磨耗功波动量值。结果发现，磨耗功总是以轮对扭转振动固有频率发生波动，波形与图5-6相似。波动量值由波深为0mm的0.15~0.24kN·m/m迅速增至波深0.5mm的0~0.24 kN·m/m（图6-1），波深如继续加大，磨耗功波动量增加十分微小。由于波磨激振频率与轮轨垂向振动固有频率相差较远，轮对扭转振动与轮对弯曲振动和垂向振动不协调，因此轮轨垂向力波动对磨耗功的影响不大。

总的看来，由第一类粘滑振动造成的波磨，在形成初期，波磨发展较快，而当波磨达到一定波深时（0.5mm）以后，波磨保持大致相同的发展速率。

2. 由第四类粘滑振动形成的波磨

设轨面存在波长250mm、波深分别为0、0.2、0.5、1.0和1.5mm的连续波磨，计算磨耗功的波动情况。结果发现，随波深增加，磨耗功的波动量变化较大。

磨耗功随波磨波深的变化情况如表6-2所列和图6-16所示。当波深为0时，轮对不发生粘滑振动，磨耗功波动量为0。波深为0.2mm时，轮对发生粘滑振动，磨耗功以轮轨垂向振动固有频率发生波动。此后，随着波深增加，磨耗功波动量呈线性增长（图6-16中的直线段）。波深0.5mm和1.0mm时磨耗功波动的时间历程如图6-17所示，波动频率相同但波深大时磨耗功波动大。

但是，值得注意的是，当波深加大到一定程度时（如1.5mm），波磨发展速率变缓（图6-16中波深1.5mm附近）。这是因为，当波深达到一定量值时，轮轨间垂向力最小值已达到0，如图6-18所示。磨耗功的增加受到限制，增长速度变慢。

表6-2 磨耗功随波深的变化

波深 (mm)	磨耗功波动范围 (kN·m/m)
0	0
0.2	0.136 ~ 0.206
0.5	0.08 ~ 0.26
1.0	0.02 ~ 0.38
1.5	0 ~ 0.5

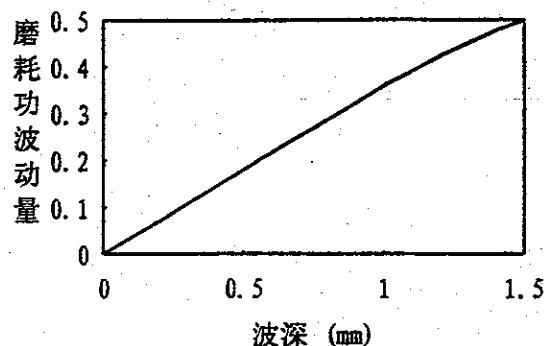


图6-16 磨耗功波动量与波深的关系

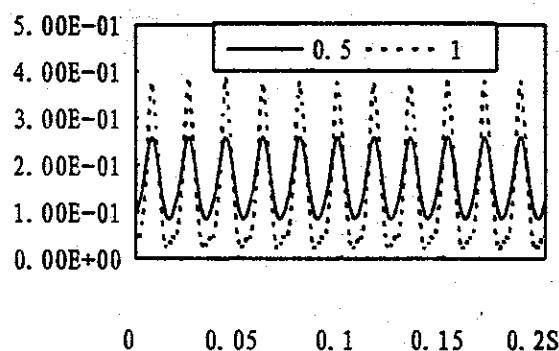


图6-17 不同波深时磨耗功 ($\text{kN} \cdot \text{m}/\text{m}$) 波动的时间历程

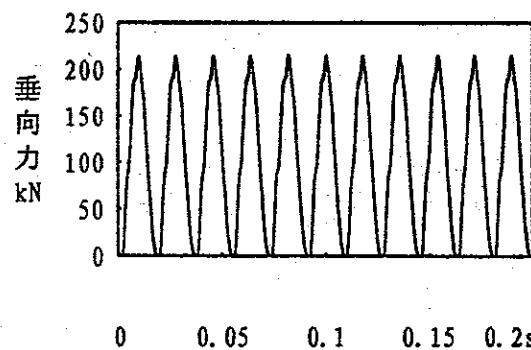


图6-18 垂向力波动的时间历程（波深1.5mm）

由第二、三类粘滑振动造成的波磨，其发展情况与上述第四类粘滑振动造成的波磨相类似，不再累述。

§ 6.5 长波和中长波磨耗的成因及发展过程

当波磨形成的其它条件具备时，轮对粘滑振动就是钢轨波磨形成的原因。粘滑振动的类型不一样时，波磨的特征亦不相同。为此，我们以平均车速50km/h的混凝土枕曲线地段为例，说明各种粘滑振动所产生的波磨及其发展过程。

1. 中长波磨耗成因

中长波的形成及发展原因是轮对第一类粘滑振动。粘滑振动主要由轨道横向刚度偏大、轮轨粘着系数降低、列车制动力等因素引发。振动频率主要取决于轮对扭转振动固有频率，主频为90Hz，与轮轨系统中其它参数关系不大。这种粘滑振动将在钢轨上形成波长为150mm左右的中长波。我们曾在石太线K39半径300m曲线的缓和曲线上发现这种波磨。

中长波磨的波长极为均匀，钢轨接头等轨道不平顺只起着使粘滑振动归一化并加剧粘滑振动的作用，对波磨波长没有影响。且波磨在钢轨上较长距离内（一般约5~10m）同时发生，波深较为均匀，即使靠近钢轨接头处，波磨的波深也不会明显加大。

波磨形成后的发展过程中，垂向振动只是加剧粘滑振动，对波长没有影响。波磨发展过程中，波长保持不变。波磨形成初期发展较快，当波深达到0.5mm后，大致保持均匀的发展速率。

2. 长波磨耗成因之一（非均匀长波）

设有一系悬挂的机车和客车，因一系悬挂阻尼不足引发第二类轮对粘滑振动。粘滑振动在钢轨上造成间距300~1000mm的高磨损段，钢轨上首先出现不连续的多个凹坑，而后逐渐发展成连续的波磨。这种波磨在形成过程中波长是变化的，最后稳定的波长取决于轮轨垂向振动、轮对扭转振动和轮对弯曲振动三种频率的共同作用，波长一般是不均匀的。波磨发展速率与波深有直接关系，波深越大，波磨发展越快。

设置一系悬挂的主要是机车和客车，但客车由于轴重较小，磨耗功及其波动值较小（磨耗功与轴重几乎成正比），且车速通常高于平均车速（高速车轮对粘滑振动较小），客车在波磨形成过程中作用不大。

机车的数量较少，对波磨形成的贡献也不大。只有在曲线半径较大，货车和客车轮对都不会发生粘滑振动、而只有机车轮对发生粘滑振动时，机车轮对的粘滑振动可产生波磨，但波磨的发展速率极慢。电力机车牵引地段之所以容易出现波磨，是因为大功率的电力机车可以良好地控制列车速度，使车速相对集中，从而致使波磨较非电力区段严重。

由此可见，第二类轮对粘滑振动形成波磨的机率较小。

3. 长波成因之二（均匀长波）

长波磨耗的第二种成因是轮对的第三类粘滑振动。第三类粘滑振动主要出现在轮轨粘着系数较低、曲线半径较小的地段。粘滑振动主要表现为轮轨垂向振动和轮对弯曲振动，所造成的波磨波长与轮轨垂向振动频率相对应。波磨形成初期的波长略短，约为200mm左右。发展过程中波长逐渐加长，最后稳定的波长约为250~270mm。波磨在钢轨上较大范围内同时出现，波长和波深较为均匀，靠近接头处波深略有加大，但不明显，即第二章中所提到的均匀长波磨耗。

波磨发展过程中，波深越大，则发展速率越大，波磨发展速率同波深几乎呈线性关系。

4. 长波成因之三（非均匀长波）

长波磨耗形成的第三种原因，也是最主要的原因，是由诸如接头之类的轨道不平顺引起的第四类轮对粘滑振动。只要轮轨间出现瞬时滑动，粘滑振动就被激发。在粘着系数降低、存在制动力、较大的过超高以及轨道横向刚度较大的情况下，车辆轮对第四类粘滑振动可能发生在半径1500m甚至更大半径的曲线上。因此第四类粘滑振动出现最为普遍，由它引起的钢轨波磨也最多。

第四类粘滑振动产生的波磨波长在270mm左右，因影响波长的因素较多，波长不均匀。

波磨自迎车端接头附近始发，由单个波形逐渐向钢轨小腰、大腰及送车端接头扩散，并发展成连续波磨，靠近钢轨接头处的波磨明显比钢轨中部严重。许多波磨轨，在波磨尚未布满整根钢轨时，就因为迎车端接头附近波深到限而被迫下道。

波磨发展过程中，既有波深的影响较大。既有的波磨激化轮轨系统垂向振动和轮对振动，造成轮轨间的磨耗功波动量加大，波磨的发展速率随波深加大而变快，波磨发展速率与波深大约成正比，与通过总重成指数关系。

这是最常见到的、曲线外轨淬火轨上、磨损型非均匀长波波磨的形成和发展过程。

第七章 影响波磨的因素及预防减缓措施

轮对轨系统中，影响波磨的因素众多，从各种因素在波磨的形成和发展中的作用来区分，影响因素大致可分为两类。(1)影响波磨形成的因素：决定轮对粘滑振动是否形成；影响粘滑振动的强度；决定波磨是否形成；加速或减缓波磨的形成过程。(2)影响波磨发展的因素：决定波磨是否发展；加速及减缓波磨的发展过程。

各因素对波磨的影响关系也特别复杂。一般来讲，许多在波磨形成过程中起作用的因素，对波磨的发展也有决定性的影响。如果波磨只有形成的条件而没有发展的条件，则波磨也就难以形成，从这个意义上讲，影响波磨发展的因素也可归为波磨的形成条件。但还有些因素，它们虽然影响波磨的发展速率，但并不决定波磨是否形成与发展，控制这些因素也可以有效地减缓波磨。

在前两章中，对影响波磨形成的因素已重点地进行了讨论，这些因素包含于波磨的形成条件中。本章中，我们不再重复，而是针对波磨的预防减缓措施，有重点地研究一些因素对波磨的影响。

§ 7.1 轨道弹性和阻尼

1. 轨道垂向弹性

(1) 道床刚度取值

轨道垂向弹性主要受道床刚度和轨下胶垫刚度控制，以道床刚度为例讨论轨道弹性的影响。道床刚度自清筛至板结的过程中，刚度由小变大，变化范围在一个数量级以上。按照文[59] [119] 中对正常轨道钢轨支座刚度的推荐值，木枕轨道钢轨支座刚度为 $1.5 \sim 1.9 \times 10^4$ kN/m，混凝土枕轨道钢轨支座刚度为 $3.0 \sim 7.0 \times 10^4$ kN/m，板结道床的刚度值当然会更高，估计达到 $1.0 \sim 2.0 \times 10^5$ kN/m以上。由钢轨支座刚度和胶垫的刚度不难推算出道床的垂向刚度。作为道床刚度的估计值，我们取木枕轨道的道床刚度为 1.7×10^4 kN/m，混凝土枕轨道道床刚度 3.5×10^4 kN/m，板结的混凝土轨道道床刚度 7.0×10^4 kN/m。

道床刚度对波磨的形成和发展均有较大影响。很显然，轨道上存在不平顺时，良好的道床弹性有助于减小不平顺引起的轮轨动力作用，延缓波磨的形成和发展；反之，道床弹性较差时，波磨易于形成且发展较快。

(2) 道床刚度对波磨形成的影响

考察半径600m曲线上波磨的发生情况。设外轨超高50mm，轨面有一波深0.8mm波长250mm的不平顺，道床阻尼降低一个量级，其它条件如表4-1、2。

图7-1是三种道床刚度下磨耗功的时间历程。图中实线为木枕地段的情况，轮对表现为非自激振动。受不平顺影响，磨耗功出现波动而后衰减，波动

量较小，约为 $0.08\text{kN}\cdot\text{m}/\text{m}$ 。说明在 600m 半径的木枕线路上，其它参数正常取值的情况下，单独由不平顺难以形成波磨。波动稍大的点划线为正常混凝土枕轨道的情况，由于道床刚度加大，磨耗功的波动值增至 $0.15\text{kN}\cdot\text{m}/\text{m}$ ，但轮对仍表现为非自激振动，说明波磨仍难以形成。

图7-1中虚线是板结道床的情况，由于道床刚度偏高，不平顺使轮轨垂向力波动增大，轮对的弯曲和扭转振动也被激化，磨耗功的波动量达到 $0.25\text{kN}\cdot\text{m}/\text{m}$ 左右，是木枕轨道的三倍。更应值得注意的是，板结道床条件下，车轮在不平顺附近出现瞬时滑动，轮对表现为局部粘滑振动，即第四类粘滑振动。轮对粘滑振动虽然最终衰减，但其持续时间较长，助长了波磨的形成和发展。

也就是说，道床垂向刚度较大时易于激发轮对粘滑振动，从而促使波磨形成。因此，在轨道弹性不良的地段（如：板结道床、石质路基等）更易产生波磨，这与实际情况是相符的。

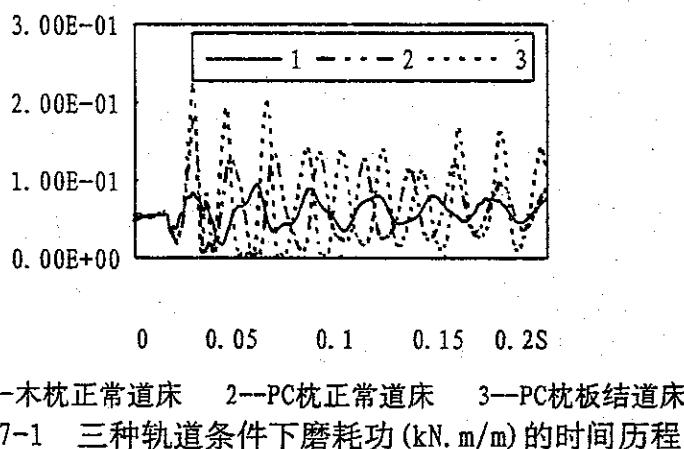


图7-1 三种轨道条件下磨耗功($\text{kN}\cdot\text{m}/\text{m}$)的时间历程

(3) 木枕与混凝土枕地段波磨特征的差异

在讨论轨道垂向弹性时，还可以顺便得到木枕地段波磨与混凝土枕地段波磨的不同特征，主要表现在波磨的波长上。当轮轨粘着系数降 0.135 时，因不平顺作用， 600m 半径的曲线上出现轮对第四类粘滑振动。对磨耗功进行谱分析，得到频率特性如图7-2所示。混凝土枕地段磨耗功的波动主频约为 50Hz ，预示着波磨的波长约为 270mm 。木枕地段磨耗功波动的主频约为 35Hz ，预示着波磨的波长约为 400mm 。木枕地段因线路的弹性较好，波磨的波长较长。同时，木枕地段磨耗功的波动量较混凝土枕地段小得多，说明木枕地段的波磨发生和发展均较慢。这与第二章中实测波磨所得到的结果相吻合。

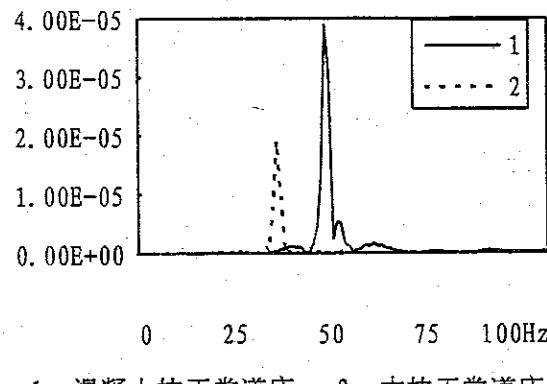


图7-2 木枕和混凝土枕地段磨耗功的频率特性

(4) 道床弹性对波磨发展速率的影响

设半径600m的曲线上，外轨已有波深0.5mm、波长250mm的连续波磨，道床刚度仍取前述的三种值。

轮对发生稳定的振动（如图7-3所示），振动频率取决于列车速度和波磨波长，约为50Hz。但在三种道床刚度的条件下，磨耗功的波动量相差较大。对于木枕轨道，轮对为非自激振动，磨耗功波动量约为0.02 kN·m/m。对于混凝土枕正常道床，轮对仍为非自激振动，但磨耗功波动量加大为0.17kN·m/m。对于混凝土枕板结道床，轮对表现为粘滑振动，磨耗功波动量剧增至0.4kN·m/m以上，比木枕轨道高出约20倍，比混凝土枕正常道床也高出一倍以上。由此可见，板结的道床上波磨的发展速度大大地高于正常道床地段。

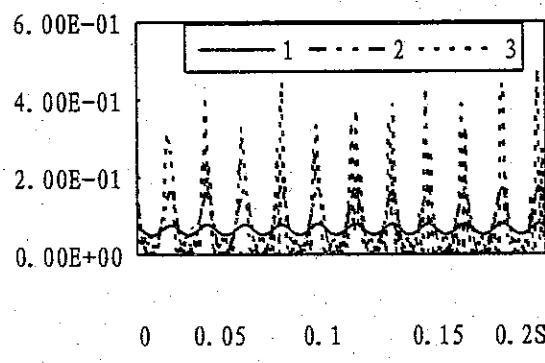
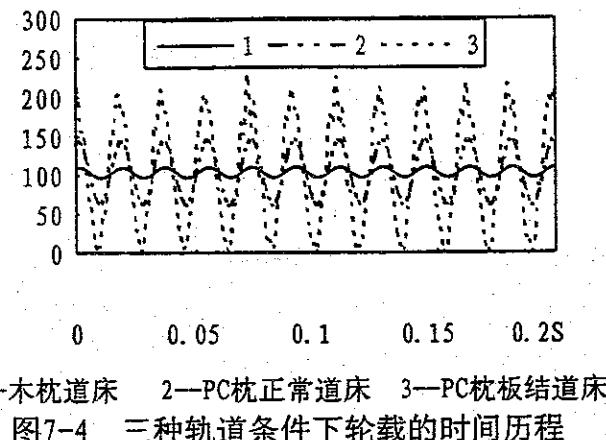


图7-3 三种轨道条件下的磨耗功时间历程

不同道床条件下磨耗功的差异主要是由于轮轨振动加剧引起的，其中影响最大的是轮轨垂向力。图7-4是垂向力的波动情况，可以看到，在板结道床

上，0.5mm的波深就能使垂向力产生200kN的波动，且垂向力在许多瞬时已降至0。而在道床弹性良好的木枕地段，这种垂向力波动大约只有10kN左右。道床的弹性在波磨发展中所起的作用是十分清楚的。



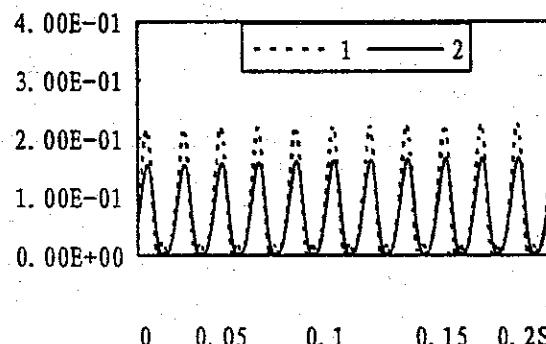
1—木枕道床 2—PC枕正常道床 3—PC枕板结道床

图7-4 三种轨道条件下轮载的时间历程

归结起来，道床垂向弹性的好坏直接关系到波磨发展的快慢，当轨道存在不平顺时，板结的道床还能激发轮对粘滑振动，成为波磨形成的直接原因。

2. 轨道横向弹性

轨道横向弹性主要靠道床提供，采用高弹胶垫也可适当提高轨道横向弹性。道床横向刚度过大能激发轮对的第一类粘滑振动，当波磨形成及发展的其它条件具备时，可在钢轨上形成波长100~150mm的中长波，这在第五章和第六章中已较为详细地进行了叙述。



1—正常道床横向刚度 2—低道床横向刚度

图7-5 磨耗功的时间历程

轨道横向刚度对波磨的发展也起到一定的作用。在半径600m的曲线上，假设已存在波深0.5mm、波长250mm的连续波磨，考虑正常的道床横向刚度 2.03×10^4 kN/m及较低的道床横向刚度 1.0×10^4 kN/m两种情况，计算结果如图7-5所示。道床横向刚度降低时，磨耗功波动量减小，道床刚度降低一倍可望起得25%左右的减缓波磨的效果。

在小半径曲线地段，由于列车对轨道的横向推力较大，轨排位置和轨距不易保持，往往采用加设轨撑和在道肩埋桩加设横撑的办法固定轨排。这些措施加大了轨排抵抗横移的能力，但同时也提高了轨道的横向刚度，对延缓波磨是不利的。

3. 轨道阻尼

轨道阻尼主要来自道床，少量来自轨下胶垫。道床阻尼受多种因素影响且变化较大。道碴的颗粒形状、尺寸和表面特性，道碴的粉化、板结和脏污程度，道床的厚度和密实度等，均影响道床的阻尼值。一般来讲，清洁道碴、碎石、粒径小且密实度高的道床具有较高的道床阻尼，而脏污道碴、卵石、粒径大且密实度差的道床具有较低的阻尼值。道床的阻尼值往往和道床弹性是相关联的，弹性好的道床通常阻尼值也较高，弹性差的道床通常阻尼值也较低。但也不尽然。对于刚清筛和捣固过的道床，其弹性较好且阻尼较高，对于板结道床，其弹性较差而阻尼较低。但对于粉化、坍塌、翻浆冒泥及脏污道床，弹性可能变化不大，但阻尼值降低较多。因此，道床刚度的加大必然伴随着阻尼的减小，但在道床刚度变化不大的情况下，道床阻尼也可能出现较大幅度的降低。

要准确选择不同状态下道床的阻尼是困难的，有关的试验数据也十分有限，即使关于正常道床的阻尼取值，研究和试验也很不够。为此参照道床阻尼试验数据^[150]及有关资料^[149]，选取正常道床的垂向阻尼为90 kN·s/m，横向阻尼为70kN·s/m，非正常道床阻尼（低阻尼）分别下降至9kN·s/m和7kN·s/m，即阻尼值下降一个量级。

在前面讨论道床垂向刚度对波磨的影响中，将板结道床的阻尼恢复到正常值（实际上是不可能的，仅作为阻尼取值的讨论）。

图7-6是磨耗功波动的时间历程，其中虚线为低阻尼情况，实线为正常阻尼情况。低阻尼下，轮对受不平顺激扰时，振动表现为粘滑振动，持续时间较长，转向架上前后两车轮振动效应产生迭加，使轮对粘滑振动继续被激化，波磨容易产生和发展。

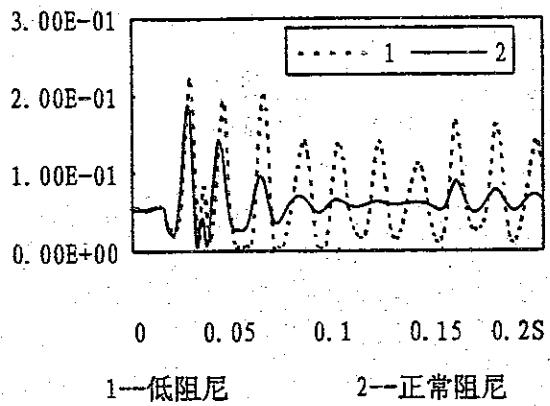


图7-6 不同道床阻尼时磨耗功波动时间历程

而正常阻尼下轮对表现为非自激振动，磨耗功波动值较小，且振动很快被衰减，可以清楚地区分出前后车经过不平顺时磨耗功波动，两轮经过不平顺的振动效应不发生迭加，波磨难以形成。

道床阻尼对波磨发展的作用也很大。图7-7是两种道床阻尼条件下磨耗功的波动情况，其它计算条件与图7-3相同。图中虚线为低阻尼情况，实线为正常道床阻尼的情况。由图中可见，低道床阻尼下波磨的发展速率要快一倍。

因此，在道床板结、粉化、坍塌和脏污地段，由于道床阻尼降低，波磨的生成和发展速度均较正常道床条件下快得多。

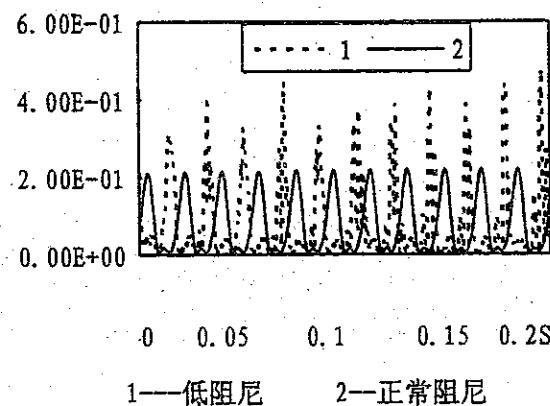


图7-7 不同道床阻尼下磨耗功波动的时间历程

重型钢轨易出现波磨的原因之一，是加大了轨道垂向和横向刚度。与50kg/m钢轨相比，60kg/m钢轨垂向抗弯刚度增加了58%、横向抗弯刚度增加了39%。采用与考察轨道横向刚度时完全相同的条件进行计算，60kg/m轨道上磨

耗功的波动量较 $50\text{kg}/\text{m}$ 轨道加大15%左右，说明重型轨道上的波磨的发生发展速率较大。

轨下胶垫的弹性和阻尼对磨耗功的高频波动（500Hz以上）成分影响较大，对波磨激振频段（200Hz以内），其作用与道床弹性和阻尼极为相近。

即：在相同的弹性和阻尼变化量值下，增加胶垫弹性和阻尼与增加道床弹性和阻尼具有相同的效果。

§ 7.2 走行部构造特性对波磨的影响

机车车辆走行部的构造特性，如轮对弯曲和扭转刚度、转向架固定轴距、轮对三向定位刚度、一系悬挂阻尼、簧下质量、轴重及轮缘摩擦系数等，均对波磨的形成和发展有一定影响。本节中选择其中的几个主要因素进行讨论。

1. 轮对弯曲和扭转刚度

加大轮对刚度，可有效地降低轮对振动强度，有利于减缓波磨的发生和发展。在第五章中已叙述过，货车车轴直径如增加20%，就能消除因轨道横向刚度偏大引发的第一类粘滑振动。但对其它三类粘滑振动，单纯增加轮对刚度只是使振动强度降低。

考察货车车轴直径增加的情况，假设车轴直径增加20%，即轴直径增加到200mm左右，与机车轴相同，这是可能做到的（如采用空心车轴）。由于轴弯曲和扭转刚度与轴的直径呈四次方关系，因此轴弯曲和扭转刚度约加大一倍。

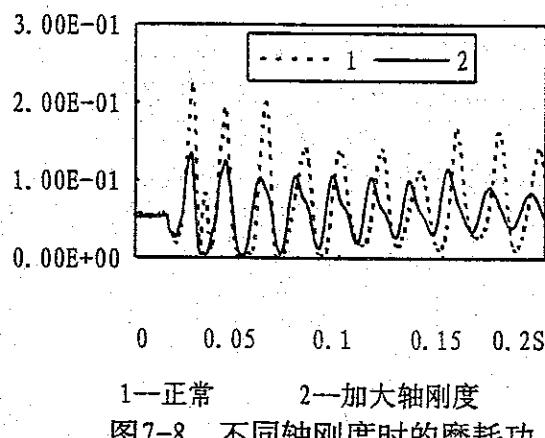


图7-8 不同轴刚度时的磨耗功

在600m半径的曲线上，板结道床，轨面有单个不平顺，两种轴刚度下磨耗功波动的时间历程如图7-8所示。在正常轴刚度的情况下（虚线），轮对发生粘滑振动，磨耗功波动较大且持续时间较长。加大轴刚度后，轮对为非自激振

动，磨耗功波动降低一倍，衰减较快（实线）。说明加大轴刚度能有效地抑制轮对粘滑振动，延缓波磨形成。

加大轴刚度还能有效抑制波磨的发展。在连续波深0.5mm时，轴刚度加大使磨耗功波动量明显减小。图7-9中虚线为正常轴刚度的情况，实线为加大轴刚度的情况。轴刚度加大一倍可以使磨耗功减小约40%，即波磨发展速率降低约40%。

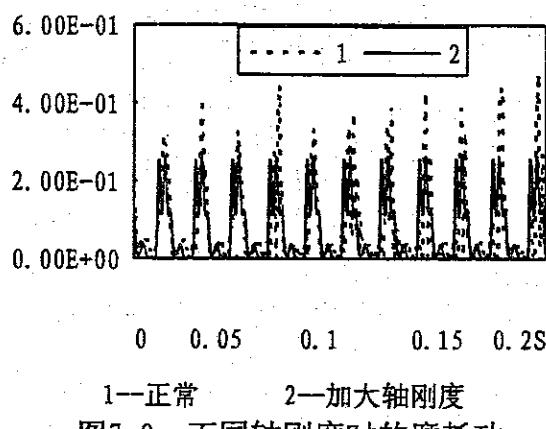


图7-9 不同轴刚度时的磨耗功

2. 固定轴距

转向架固定轴距对波磨生成和发展的影响是不言而喻的。固定轴距较大时，轮轨冲角大，横向蠕滑力增大，轮轨间蠕滑力容易达到饱和而出现滑动，轮对粘滑振动就易于被激发，波磨易于产生和发展。机车的固定轴距一般远大于车辆，因此机车轮对的粘滑振动总是更容易出现，这在上一章中已经叙述过。缩短转向架固定轴距有助于延缓波磨的发生发展。

3. 轴重

轴重并不影响轮对粘滑振动的形成与否，也不影响粘滑振动的频率特性，而是影响粘滑振动的强度。随着轴重降低，粘滑振动强度大幅度降低。图7-10是600m半径曲线、板结道床地段、连续波磨的波深为0.5mm时，轴重210kN和60kN的磨耗功比较。显然，在同样的线路和运营条件下，轻车线上同样有波磨形成的条件，但由于磨耗功的波动量很小，所以波磨的出现很晚且发展较慢。事实上，在石太线这种运煤专线上，轻重车方向的行车条件总是不一样的。重车方向如为长大下坡，列车时常处于制动工况，则轻车线是上坡，列车常处于牵引工况。列车的制动更加速了波磨的形成和发展，这在前面已经叙述过。

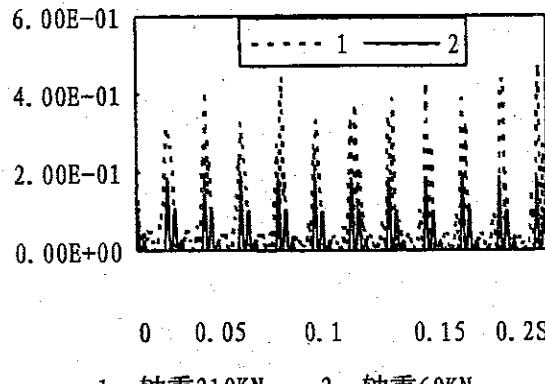


图7-10 磨耗功的时间历程

4. 轮缘摩擦系数

轮缘摩擦系数对粘滑振动形成与否影响不大，但对振动的量值有一定影响。轮缘摩擦系数如为0.3，发生粘滑振动时磨耗功在0.15~0.24kN·m/m间波动。如果施用轮缘润滑，使轮缘摩擦系数下降至0.1，磨耗功在0~0.25kN·m/m间波动。磨耗功的波动量加大了近一倍，可见，为减缓钢轨侧向磨耗所施行的轮缘涂油润滑，加大了轮对粘滑振动的强度，对减缓波磨是不利的。

§ 7.3 曲线半径的影响

1. 关于临界半径的讨论

线路曲线半径越小，轮轨间出现滑动的机率越大，轮对粘滑振动容易被激发，磨耗功的波动幅度较大，波磨的发生发展较快；反之，曲线半径越大，波磨的发生发展越慢。在大半径曲线上，波磨即使产生，其发展速度也是很缓慢的。当曲线半径大到某种程度时，只有当各种不利因素都凑到一起时才有可能激发轮对粘滑振动。在更大半径的曲线上，即使所有不利因素加在一起，也不会激发轮对粘滑振动和波磨，我们称这一半径为波磨产生的临界半径。但要确定临界半径并非易事，影响临界半径的因素极多，如走行部特性、轮轨接触特性、轨道弹性和阻尼、轨道不平顺等，都影响临界半径的值。作为临界半径的一个举例，我们考察下面一组情况下轮对发生粘滑振动的临界半径。

板结道床，轨面存在一波长250mm、波深0.5mm的凹坑，过超高60mm，轮轨粘着系数0.135、轮缘摩擦系数0.2，轮周制动力5kN，转8A转向架货车，轴重210kN。

计算表明，当曲线半径为2000m时，轮对发生粘滑振动；当曲线半径为2500m时，轮对为非自激振动。说明在上列条件下，轮对粘滑振动的临界半径

在2000~2500m之间。在波磨形成及发展的其它条件具备时，则意味着半径小于2000m的曲线地段将出现波磨，而半径大于2500m的曲线上将不会出现波磨。

上面仅仅是轮对粘滑振动临界半径的一个简单举例，并未包含所有可能情况。实际上，轨道上除接头不平顺外，不可避免地还存在其它一些不平顺，如几何尺寸误差、弹性不均匀等。此外，由于机车轮对粘滑振动的临界半径要大得多，在车辆轮对不出现粘滑振动的大半径曲线地段，机车轮对粘滑振动可形成波磨。所以线路上的波磨可能出现在半径比2500m大的曲线上，但出现时间较晚且发展较慢，一般不是控制换轨的因素。

2. 直线与曲线的比较

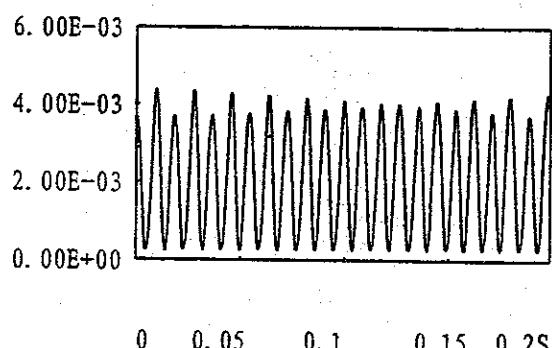


图7-11 波磨轨倒换至直线时磨耗功的波动

随着曲线半径增大，轮对粘滑振动逐渐减少并最终消失，这就让我们很自然想到要比较一下曲线地段与直线地段波磨轨的受力特点。由于直线上几乎没有波磨轨，假设将波长250mm、波深0.5mm的波磨轨倒换到直线上。将计算程序中的曲线半径取大值，比如1万米，模拟直线上的情况，得到磨耗功为图7-11的结果。由于波磨激扰，轮轨垂向力持续波动，磨耗功也发生相应的波动，但波动量比600m半径的曲线上小两个数量级。所以波磨轨一旦由曲线倒换至直线上，波磨的发展立即受到有效的抑制。

§ 7.4 关于波磨影响因素的总结

通过本章和前面两章的计算和分析，我们将影响波磨形成和发展的一些主要因素及其作用罗列于下，作为寻找波磨的预防减缓措施的主要依据。

1. 蠕滑力特性曲线

主要是蠕滑力饱和后的特性曲线。蠕滑力饱和后如果不下降，则轮对粘滑振动不会发生，波磨难以出现。蠕滑力负斜率值或骤降量要达到一定量值时，轮对粘滑振动才产生，波磨也才会形成和发展。不同钢轨材质对波磨的敏感性不同，可能是因为钢轨材质影响到蠕滑力特性曲线的形状。

2. 轨道不平顺

轨道的动静态不平顺（其中以钢轨接头最为突出）使随机的轮对粘滑振动归一化，将高磨耗区和低磨耗区固定下来，促成波磨形成和发展。在许多情况下，轨道不平顺还直接激发轮对粘滑振动。

3. 列车速度分布

通过曲线的所有列车中，某一速度段的列车数量占明显优势，则波磨易于形成。这些地段包括进出车站附近的曲线地段、长大坡道上的曲线地段、以及列车限速的小半径曲线地段。

4. 列车类型

机车、货车及客车三者走行部性能差异较大，对钢轨的不均匀磨耗不会累加。如果考虑单个车轮对钢轨的不均匀磨耗，以机车最大、货车次之、而客车最小。但在波磨的生成与发展过程中，作用最大的是货车，其次是客车，再次是机车。因此客货混跑的铁路上因货车与客车的作用部分抵消，波磨较少出现，而单跑货车或单跑客车的线路上波磨容易出现。

5. 曲线半径

半径越小，轮对粘滑振动发生的机率越大，波磨的发生发展速率较大，反之亦然。对于某一轮轨条件，当曲线半径超过某一临界值时，轮对粘滑振动就不再发生。

6. 轮轨粘着系数

粘着系数降低，轮对粘滑振动容易出现，波磨易于生成。因此气候潮湿的季节和地区波磨较易出现。

7. 制动

曲线地段列车施行制动时，外轨上制动力与蠕滑力迭加后更易达到饱和，促成轮对粘滑振动形成。在半径稍大（500~600m以）的曲线地段，列车制动是波磨形成的主要原因之一。

8. 轨道横向刚度

在曲线地段，轨道横向刚度偏大可直接激发轮对第一类粘滑振动，形成波磨。大的轨道横向刚度对减缓波磨的发展速率也是不利的。

9. 轨道垂向刚度

轨道存在不平顺的曲线地段，轨道垂向刚度加大轮轨间垂向力的波动，造成轮轨间一次或数次滑动，诱发第四类轮对粘滑振动，形成由一波向多波扩展的波磨。如同时存在制动力，则粘滑振动可能转化为第三类轮对粘滑振动，相当长范围内同时出现波磨。轨道垂向刚度加大对波磨的发展同样有促进作用。重型轨易于产生波磨的原因之一是加大了轨道的垂向和横向刚度。

10. 车轴刚度

车轴刚度如果加大，则可有效地抑制粘滑振动。可使第一类粘滑振动消失，使其它三类粘滑振动强度明显降低。

11. 一系悬挂阻尼

设置一系悬挂的机车和客车，如因一系悬挂阻尼不足，在曲线地段将出现第二类轮对粘滑振动，形成始发于离散小坑的波磨。

12. 一系悬挂刚度

增大一系悬挂垂向刚度，能在一定程度上抑制轮对粘滑振动，减小波磨出现的机率；但波磨一经出现，则大的垂向刚度又增大轮轨动力作用，促进波磨发展。综合来看，仍以减小一系悬挂垂向刚度为优。

13. 轨道阻尼

轨道阻尼增加可有效抑制第二、三、四类轮对粘滑振动，但对第一类粘滑振动效果不大。轨道阻尼增加可有效地减缓波磨的发展。

14. 外轨超高

过超高加剧粘滑振动，欠超高减小粘滑振动。对波磨形成和发展贡献大的是低速车（主要是货车）。某些条件下，稍大的欠超高还能使轮对粘滑振动消失。

15. 轴重

轴重不影响轮对粘滑振动形成与否，但磨耗功波动量几乎与轴重成正比地增加，大轴重时磨耗功波动量大，波磨更易形成和发展。

16. 固定轴距

固定轴距长，则粘滑振动容易出现。在600m以下半径的曲线上，韶山1型机车通过时，导向轮对总是处于粘滑振动状态，而配转8A的货车通过时，正常情况下是不会发生轮对粘滑振动的。

17. 簧下质量

簧下质量增加将加速波磨的形成和发展。

18. 涂油润滑

轮缘和钢轨侧面的涂油润滑对减缓波磨是不利的。

§ 7.5 波磨的预防减缓措施

基于前面对波磨的形成、发展及其影响因素的分析，从现场实际可能性出发，提出一些预防和减缓波磨的措施。

§ 7.5.1 波磨的预防措施

对波磨预防的关键，在于消除如前一章所述的波磨形成的必要条件。预防或彻底消除磨损型波磨的措施，可以从三个方面考虑。(1)消除曲线地段轮对的各类粘滑振动；(2)使轮对粘滑振动很快衰减；(3)即使轮对粘滑振动存在，但只要消除车轮对钢轨不均匀磨损的累加效应，则波磨不会形成。依据这一思路，本文提出几种预防波磨的措施，供今后进一步研究和试验时参考。

1. 钢轨波磨预防措施之一：改变轮轨蠕滑力特性曲线

饱和后蠕滑力的下降现象是轮对粘滑振动产生的根源。如能改变蠕滑力特性曲线形状，使蠕滑力饱和后不出现下降，或下降量不足以诱发轮对粘滑振动，则可预防钢轨波磨。

改变蠕滑力特性曲线可采取两个方面的措施：

(1) 在轮踏面或轨面涂上特制的固体润滑剂^[43]。据文[43]介绍，特制润滑剂能够改变蠕滑力特性曲线，使得当轮轨间出现滑动（即蠕滑力达到饱和）时，蠕滑力不是降低而是升高。果能如此，则轮对粘滑振动可以消除，钢轨波磨不会形成。除预防钢轨波磨外，这种特制润滑剂还可以用于预防机车轮对空转、轨面擦伤以及缩短列车制动距离等方面。

(2) 调整钢轨材质改变蠕滑力特性曲线。蠕滑力特性曲线与材质有关系，调整钢轨材质特性可能改变蠕滑力特性曲线。目前的有关研究中，只注意到象钢材、铸铁、黄铜及橡胶等性能差异较大的材质，研究它们的蠕滑特性。但如果同样是钢材，其冶金性能、金相组织及化学成分等不同时，蠕滑特性又如何呢？这方面的研究还十分不够，尚有许多工作要做，因此本文也难以提出具体的措施。但应当注意的是，在改善钢轨材质以图预防波磨的研究中，材质中的蠕滑特性是值得研究的重要方面。

改变蠕滑特性方面的措施只适用于预防磨损型波磨，不能预防、但可减缓塑流型波磨。

2. 钢轨波磨预防措施之二：增设轮对弯曲振动和扭转振动阻尼

计算表明，当轮对弯曲和扭转振动阻尼达到 $100\text{kN}\cdot\text{m}\cdot\text{s}/\text{rad}$ 时，轮对粘滑振动很快衰减，波磨难以形成。但要在滚动的轮对上设置扭转振动阻尼，使阻尼既不影响轮对滚动，又能抑制轮对扭转振动，其难度较大，本文中无法提出具体措施。同样，在轮对上直接设置弯曲振动阻尼的难度也很大。不过，一系悬挂的垂向阻尼对抑制轮对弯曲振动有一定作用。设有一系悬挂的走行部，可

以通过增大一系阻尼的办法，有效地减少甚至消除轮对弯曲振动。在讨论一系阻尼对波磨的影响时，发现阻尼增加到一定量值时，即可消除第二类轮对粘滑振动，其原因主要是一系阻尼对轮对弯曲和垂向振动产生了抑制效果。

同样，增加轮对弯曲和扭转振动阻尼方面的措施也只能预防磨损型波磨，不能预防、但可减缓塑流型波磨。

3. 钢轨波磨预防措施之三：离散列车速度

在曲线地段，仔细地控制每一通过列车的速度，确保最高与最低车速间的所有列车速度均匀分布，任何一种车速均不占优势。这样可以消除各通过车轮对钢轨不均匀磨损的重复和累加效应，可以预防波磨。文[93]等许多文献中在分析车速变化对轮轨系统振动的影响时，都提到调整车速可以预防减缓波磨。但离散列车速度的实施较为困难，单为预防波磨而离散车速不一定经济，也不易被工务和机务部门接受。

离散车速的措施，不仅能消除钢轨不均匀磨损的累加效应，从而预防磨损型波磨，同样也可以消除钢轨不均匀压溃的累加效应，从而预防塑流型波磨。

还可能有其它一些预防波磨的措施。但总的来看，预防波磨的措施的可行性和经济性等方面，还存在一些值得进一步研究的问题，预防措施也应当在进行过现场试验后，才能最终得到验证。

§ 7.5.2 波磨的减缓措施

钢轨波磨之所以成为问题而需要研究解决，是因为在许多曲线地段，换轨周期由波磨控制。只要设法使波磨的生成与发展速度减缓到不控制换轨的程度，就达到了对波磨问题研究的目的。因此，在波磨的预防减缓措施中，应当将研究重点放在波磨的减缓措施上。

切实可行的减缓波磨的措施必须是易于操作、经济合理、且能兼顾其它病害的措施。钢轨的波磨、侧磨及剥离等病害是相互关联的，在减缓钢轨病害的措施中，有些是共同的，有些却是相互抵触的。如果一味地强调减缓波磨而使其它钢轨病害急剧上升，当然是不合理的。这使我们想到了钢轨侧磨和剥离的问题，钢轨涂油润滑可以有效地减缓钢轨侧磨，但过量的减磨又会使剥离加速，同样降低钢轨的使用寿命，后来又提出钢轨间断涂油^[153]以预防剥离的措施。在减缓波磨的过程中，也存在同样的问题。如果某种减缓波磨的措施能够同时降低钢轨其它病害，当然最好；如果减缓波磨的措施增加了钢轨其它病害的发展速率，这就要求兼顾各种病害，使钢轨的各种病害寿命达到均衡，从而延长钢轨的使用寿命。这是考虑减缓波磨措施时最基本的出发点。

1. 钢轨波磨减缓措施之一：减少轨道不平顺

减小轨道不平顺不仅对减缓波磨有利，对减少轮轨系统中的其它病害也都是有百利而无一害的，因此作为减缓波磨的第一条措施予以推荐。

在曲线地段，减少轨道不平顺就意味着减少了轮对粘滑振动的发生机率及钢轨不均匀磨损的重复累加效应，从而有效地控制波磨的发生和发展速率。据计算估计，在完全平顺的轨道上，货车在半径900m以上的曲线地段几乎不会发生轮对粘滑振动，但由于接头等不平顺的作用，半径2000m的大半径曲线上也可能发生轮对粘滑振动。

减少轨道不平顺的措施中，首推消除钢轨接头及尽可能降低接头冲击。钢轨接头冲击导致轮对粘滑振动，从而形成波磨，是对波磨形成和发展影响最大的轨道不平顺，许多波磨从接头附近始发的现象说明了这一点。减少和降低接头作用的措施有三个：

- (1) 铺设焊接无缝线路，尽量减少接头。
- (2) 铺设“冻结”无缝线路，将接头冲击减到最低。
- (3) 采用木枕承垫式接头，或于接头两边设木枕，将接头附近2~3跨内的道碴换为优质道碴。增加接头处轨道弹性及道床阻尼。

如将上述第(1)(3)或(2)(3)两条措施同时应用，效果将更好。

其次，减少轨道不平顺的许多工作包含在加强曲线轨道的养护中。如提高曲线圆顺度，减少三角坑不平顺及单边空吊枕。尤其要注意消除短波不平顺，如钢轨死弯和轨头掉块等。

2. 钢轨波磨减缓措施之二：加大轨道弹性、提高轨道阻尼

加大轨道弹性和提高轨道阻尼对减少轮轨系统中的其它病害也是有利的，作为减缓波磨的措施应当大力推广。在轨道存在不平顺的处所，增加轨道弹性可有效地减小轮对粘滑振动发生机率，提高轨道阻尼可明显降低波磨发展速率。主要包含以下一些具体措施：

- (1) 补足道床厚度并适应加厚道床，这在石质路基地段尤为重要。
- (2) 适当缩短道床清筛周期，这对于石太线这种运煤专线道床易于脏污和板结的线路，具有综合改善轨道条件的功效。
- (3) 重点整治道床粉化、坍塌及翻浆冒泥地段，提高轨道阻尼。
- (4) 加厚轨下胶垫。将轨下胶垫加厚至12mm，不仅可以增加轨道垂向弹性，也可增加轨道横向弹性。

3. 钢轨波磨减缓措施之三：尽量降低曲线地段外轨超高（或称为设置最小超高）

在第六章中分析车速对波磨的影响时，曾得出结论：过超高加大轮对粘滑振动，而欠超高抑制甚至消除轮对粘滑振动。在分析车型和轴重对波磨的影响时，曾得出结论：车速较低且轴重较大的货车对波磨形成和发展的影响最大。

因此，在主要运行货车的线路上，外轨铺设淬火轨且主要出现磨损型波磨的曲线地段，可采用尽量降低外轨超高的办法减缓波磨。

该措施的具体实施办法有两个，可根据情况选用。(1) 实测曲线地段各通过列车的车速，以货车平均车速计算超高，以未被平衡超高90mm检算客车欠超高。(2) 实测曲线地段最高列车速度，按最高车速计算超高值，将计算所得超高减去90mm作为曲线设置超高(即最小超高)。

4. 钢轨波磨减缓措施之四：钢轨倒换

轮对在曲线和直线上的振动形式不同。轮对在曲线上可能发生粘滑振动而形成波磨，但在直线上，轮对发生粘滑振动的机会却很小。如石太线直线地段几乎没有波磨，说明直线地段没有波磨形成和发展的条件。如将曲线地段的波磨轨倒换到直线地段，因粘滑振动消失，磨耗功显著降低，波磨的发展将得到明显抑制。

该措施简便易行。将曲线上已发展到一定程度的波磨轨(最大波深不宜超过1.0mm且波磨尚未布满整根钢轨)就近倒换到直线上，如侧磨较大，倒换的同时，应进行换边。

5. 钢轨波磨减缓措施之五：钢轨打磨

钢轨打磨是最有效的减缓波磨的措施。国外钢轨打磨经过三十多年的应用，已发展成为一种多功能的现代化养路技术。定期对钢轨进行打磨，不仅能消除和延缓钢轨波磨，同时也可清除钢轨表面的接触疲劳层，防治剥离等病害。研究资料表明，施行钢轨打磨可将钢轨使用寿命延长50%至一倍不等，打磨的投入产出比为1:8~1:10^[22]，具有显著的经济效益。

钢轨打磨又分为两类，即校正性打磨及预防性打磨^[52]。

校正性打磨是当波磨发展到一定程度时进行打磨，清除波磨使钢轨表面恢复平顺。对于由第二、三、四类轮对粘滑振动，波磨一旦出现就激化轮轨振动，加剧轮轨垂向力波动和轮对粘滑振动，反过来促进波磨进一步发展，波深越大则波磨发展越快，构成波磨-振动-波磨的恶性循环。校正性打磨中断了钢轨波磨这种恶性循环的发展过程，减缓了波磨发展速率。

预防性打磨是当钢轨上道尚未出现波磨时，对钢轨施行打磨。预防性打磨消除了钢轨表面的原始不平顺，释放了钢轨表层在加工过程中形成的残余应力，有助于延缓波磨的出现。在曲线地段采用钢轨不对称打磨，依据线路和列车条件将轨头打磨成不同形状，可加大内外轮滚动半径差，增加轮对靠蠕滑导向通过曲线的能力^[152]，减小轮轨间的滑动和轮对粘滑振动的出现机率，有效地延缓波磨出现。

6. 钢轨波磨减缓措施之六：提高钢轨材质强度及耐磨性能

提高钢轨材质强度和耐磨性能，不仅能减缓磨损型波磨，对塑流型波磨，提高材质强度也有最主要的减缓措施之一。轮对粘滑振动是波磨的成因，但波磨的形成和发展却总是表现为钢轨不均匀磨损或不均匀塑性变形的逐步累积。

因此，能够减缓轨头磨损和塑性变形的措施就能减缓波磨，钢轨材质强度和耐磨性能的提高，无疑会延缓波磨的发生发展过程。国产淬火轨抵抗波磨的能力没有多大优势，其问题可能出现在淬火质量上，并不能说明轨头硬度增加对波磨没有减缓作用，石太线上进口淬火轨就表现出较强的抵抗波磨的能力。

7. 钢轨波磨减缓措施之七：定期调整轨道弹性

对于由第三、四类轮对粘滑振动引起的波磨，由于磨耗功的波动频率取决于轮轨系统垂向振动频率，可以采用定期调整轨道弹性的办法，改变垂向力和磨耗功波动的频率，延缓波磨的出现和发展。在波磨尚未出现或还没有发展成为连续波磨时，这种措施才有效，而当波磨已发展到很严重的程度时，本措施没有明显效果。

定期调整轨道弹性的具体作法是：将曲线内外两股轨下胶垫设成不同厚度，比如12mm和7mm两种厚度的胶垫，间隔2~3个月将内外股轨下胶垫交换一次。

但这种措施对由第一、二两类轮对粘滑振动引起的波磨的减缓效果不大，对轮轨系统中其它病害的防治也没有明显效果，倒换胶垫的工作量比较大，实际操作会有一定困难。

8. 钢轨波磨减缓措施之八：增大轮对轴刚度

从本文的计算分析看，轮对轴刚度偏小是易于激发轮对粘滑振动的因素之一。计算表明，将轴刚度提高一倍，即轴直径增加约25%，可消除第一类轮对粘滑振动，对第二、三、四类轮对粘滑振动也能有效地抑制。因此，建议货车D轴直径增至200mm，且中段不缩小。为减小轮对质量，可采用空心车轴。

9. 钢轨波磨减缓措施之九：增大一系悬挂阻尼

设置一系悬挂的机车和客车，一系无阻尼或阻尼偏小是激发第二类轮对粘滑振动的主要因素。因此，增设或加大一系阻尼是有效减缓波磨的措施之一。也是迅速衰减轮轨冲击振动，减缓轮轨系统中其它病害的重要技术措施。

10. 钢轨波磨减缓措施之十：控制涂油润滑

以减缓曲线外轨侧磨为目的的轮缘或轨侧涂油润滑，对减缓波磨是不利的。同时，过量涂油对减缓钢轨剥离也是不利的。因此，涂油润滑绝不是越勤越好，建议有控制地进行涂油。

控制涂油要求操作者随时细心地监视曲线地段钢轨的情况，当轨距角处出现疲劳斑点时，终止涂油，待疲劳斑点被磨掉后再继续涂油，即推广钢轨间断涂油的技术措施。使钢轨波磨、侧磨和剥离三种病害寿命达到均衡，从而使钢轨使用寿命最长。这是采用控制涂油润滑减缓波磨的基本出发点。

11. 钢轨波磨减缓措施之十一：反向行车

在研究钢轨侧磨时，重载线路的反向行车曾作为减缓侧磨的重要措施之一，反向行车同样也是减缓波磨的重要措施。定期组织反向行车，可以改变运煤专线上那种“一样的列车、牵引同样的重量、以相近的速度向同一方向行

驶”的情形，减小轮轨作用力和不均匀磨损重复累加的效果，可以起到明显的减缓波磨的作用。关于反向行车对减缓波磨的具体效果，从理论上计算是比较困难的，因为反向行车后，列车的速度分布、运行工况等条件变化较大。不过可以从波磨的几个特点说明反向行车确有效果。

- (1) 运煤专线上波磨比客货混跑线路波磨严重；
- (2) 双线铁路波磨比单线铁路波磨严重；
- (3) 钢轨接头迎车端波磨严重而送车端轻微；
- (4) 制动地段严重而牵引、惰行地段轻微。

基于上述几个波磨的特点，我们完全有理由相信，反向行车对波磨的形成和发展有较大的延缓作用。

但反向行车受到较多的限制，首先要配有反向行车的设备，其次还要考虑限制坡度等一系列有关反向行车的问题。反向行车不易实施，也不可能专为减缓波磨而组织反向行车，本文将它作为减缓波磨的措施之一提出，是基于对波磨问题的考虑，支持象大秦线这样的配有反向行车设备的线路上积极组织反向行车。

§ 7.5.3 波磨减缓措施的实施情况

在石太线K25、K39、K41附近半径300m等曲线地段上，建立了若干个波磨减缓措施对比观测试验段，各试验段和对比段长约100m。主要观测试验段内容包括：

- (1) 钢轨材质观测试验段（K25）：采用了普碳轨、淬火轨、稀土轨、PT3轨，对比观测各种钢轨抵抗波磨的能力。
- (2) 接头整治观测试验段（K25）：铺设冻结无缝线路，同时，在接头两端各采用两根木枕，将接头附近的3~4个枕跨内石灰岩道碴换为花岗岩道碴。
- (3) 加厚轨下胶垫观测试验段（K25）：将曲线内外轨下原来的10mm厚胶垫更换为12mm厚胶垫。
- (4) 胶垫倒换观测试验段（K25）：外轨下设12mm厚轨下胶垫，内轨下设7mm厚轨下胶垫，每三个月倒换一次。
- (5) 楔形胶垫观测试验段（K39）：针对该处曲线外轨轨底坡不足的问题，在外轨下将原来的平胶垫改设为1/40楔形胶垫。
- (6) 钢轨倒换观测试验段（K39）：将曲线外股波磨轨倒换至曲线内股，或将曲线外股波磨轨倒换至直线地段。
- (7) 钢轨打磨观测试验段（K41）：观测钢轨校正性打磨的效果。
- (8) 道床清筛观测试验段（K41）：进行机械化道床破底清筛，观测钢轨波磨的发展况。

上列八个观测试验段中，除(1)中的PT3钢轨因轨源问题解决较晚，钢轨迟迟未能上道外，其它观测段都正处于观测之中。因受各种条件限制，各观测段铺设时间先后不等，有的观测了近一年，有的观测了半年，也有的才观测了三个月。

受本文篇幅限制，不可能在此给出详细的观测试验报告。仅就初步取得的一些观测数据，说明各种措施的有效性。这些减缓波磨的措施还要进一步经过试验验证，才能被广泛接受。

观测试验段的初步结果如下：

- (1) 钢轨抵抗波磨的能力按强弱排序：稀土轨、淬火轨、普碳轨，在试验段上出现波磨的时间约为：1年、7个月及5个月。
- (2) 接头整治后，可使换轨时间延迟约30%。
- (3) 加厚胶垫大约可取得10~15%的减缓波磨的效果。
- (4) 胶垫倒换可取得5~10%的效果。
- (5) 楔形胶垫对减缓波磨的效果不明显。
- (6) 外股波磨轨倒换至内股后，波磨发展速率没有明显减缓；外股波磨轨倒至直线后，可使换轨时间延迟约30~50%。
- (7) 钢轨打磨可使换轨时间推迟50%至一倍。
- (8) 道床破底清筛可使换轨时间延迟20%以上。

第八章 结 论

§ 8.1 本文的主要工作及特点

本文在现有研究成果的基础上，对钢轨波磨的形成和发展原因、影响因素及预防减缓措施进行了更深入一步的探索。

1. 对现有的波磨成因理论进行了全面系统的总结、分类和评述，揭示了关于波磨成因问题研究的发展趋势。

2. 对钢轨波磨进行了详细的现场调查和测试，总结了曲线地段磨损型波磨的发生发展规律和波磨特征，对波磨分类进行了调整，提出了在长波和短波间还存在一类中长波磨。

3. 针对现有分析模型过份简化、考虑因素单一等缺陷，建立了一个“轮轨系统垂向-横向-轮对弯曲和扭转非线性空间耦合振动时变模型”。成功地处理了轮轨系统中的各种空间耦合关系及非线性因素。合理地界定了相关模型的适用范围。计算模型的多方面校验表明，本文所建的模型具有良好的可靠性，除应用于钢轨波磨研究之外，对轮轨系统空间耦合振动相关问题的研究具有普遍的适用性，是列车线路系统动力学研究方面的重要进展。

4. 尝试了有限单元与无限元相结合的方法处理轨道结构，有效地消除了计算模型的边界效应。这种处理方法，在求解频率较高、需要考虑的轨道较长、而计算机内存和速度又受到限制的条件下，具有普遍的应用价值。

5. 开辟了着眼于轮轨系统空间耦合振动情况，以轮轨间磨耗功这一综合参量为研究对象的研究思路。融合多种成因理论，建立了“轮对粘滑振动-磨耗功波动-磨损型波磨”的成因理论。这一成因理论，包括了大多数现有动力类成因理论，能解释现有理论无法解释的许多波磨现象，将波磨成因的理论研究向前推进了一大步。

6. 将一般摩擦振动中判定粘滑振动的条件与轮轨粘滑振动的具体问题相结合，发展了判定轮对粘滑振动的三个判定条件。系统地考察了轮轨参数大范围变化的情况下，轮轨振动形态的多样性。在国内外首次发现了轮对粘滑振动不止一种类型，多种粘滑振动与多种波磨特征相对应。并详细地描述了四类轮对粘滑振动的特点。系统地列举出了轮对发生粘滑振动时，轮轨系统中各种参数的典型组合形式。这方面的研究有一定的独创性，在一定程度上填补了国内外研究的空白。

7. 首次提出了磨损型波磨临界半径的概念。提出了磨损型波磨的成因及其形成和发展的四个必要条件。较完整地描述了波磨的各种形成和发展过程。所得到的研究结果是认识波磨问题和防治波磨的重要理论依据。

8. 重点分析了轮轨系统中18个因素对钢轨波磨形成和发展的影响关系。提出了预防钢轨波磨的3类措施及减缓钢轨波磨的11类措施。其中大部分减缓措施已应用于石太线现场观测试验段上，所取得的初步观测数据表明，这些措施切实可行并富有成效。从而验证了成因理论的正确性。

§ 8.2 主要研究结论

本文研究内容十分丰富，涉及的问题很多。在波磨成因理论总结、磨损型波磨特征描述、分析模型建立和求解、波磨成因研究、影响因素讨论、预防减缓措施和效果分析等方面均取得了大量的研究结论，难以在此全部概括，仅选取最主要的研究结论作一个简要的归结。

1. 关于现有波磨成因理论

(1) 波磨成因理论可分为动力类和非动力类。

(2) 动力类成因理论将波磨成因归结为一定条件下轮轨系统中某种振动形式的激化。振动可表现为自激振动、共振及反馈振动三种形态。

(3) 非动力类成因理论将波磨成因归结为冶金性能、残余应力、随机不均匀磨损和压溃等因素，注重波磨的具体形成过程和影响因素。

(4) 动力类成因理论表现出较好的发展前景，但尚存在分析模型过份简化、考虑的振动形式单一、缺乏参数研究等多方面的不足。

2. 关于磨损型波磨的特点

(1) 磨损型波磨一般出现在曲线地段，制动地段的曲线上尤为严重。波磨一般出现在外轨，内轨上较少。

(2) 波磨依据波长可分为三类：短波纹、中长波磨耗和长波磨耗，三种波磨的发生发展规律和表面特征均有所不同。长波磨耗又分为均匀长波和非均匀长波磨耗。

(3) 波磨波长是有限个波长的混合，与曲线半径无关。混凝土枕地段波磨波长约为260mm左右；木枕地段波长较大，约为400mm，波磨出现较晚、发展较慢。

3. 关于分析模型

(1) 曲线地段轨排不发生横移的条件下，轨道横向也可进行线性简化。

(2) 钢轨横向位移与垂向位移相当，但纵向位移小得多，空间模型中可以忽略轨道纵向振动。

(3) 轨道计算段边界采用无限单元处理，基本上可消除边界效应。

(4) 求解轮轨系统垂向振动参量和横向振动参量的统计值时，可以采用定点模型对移动模型进行简化，但横向振动参量的时间历程和频率特性存在差异。

(5) 轨道上的不平顺，当波长大于转向架固定轴距时，应当称为长波，反之则应称为短波。

(6) 采用单边模型时，总是默认两股钢轨的情况完全相同。如两股钢轨上存在不一样的短波不平顺，求解垂向振动参量时仍可采用单边模型。当两股钢轨上存在不一样的长波不平顺时，单边模型是无效的。

4. 轮对粘滑振动判定条件

(1) 轮轨间出现滑动。

(2) 蠕滑力特性曲线上，蠕滑力饱和后出现骤降且骤降量达到一定量值，或，蠕滑力饱和后出现负斜率段且负斜率达到一定量值。

(3) 轮对纵向拖动速度曲线与扭转振动速度曲线出现交叉点，或，轮对横向拖动速度曲线与弯曲振动速度曲线出现交叉点。

5. 粘滑振动性质

(1) 轮轨系统垂向振动、轮对弯曲振动和轮对扭转振动三种振动形式，在一定条件下相互激化，构成一循环自激振动系统。

(2) 轮对粘滑振动是摩擦自激振动的一种表现形式，发生粘滑振动时，磨耗功出现剧烈持续的波动。

(3) 轮对粘滑振动是轮轨系统中各种振动的综合效果。

(4) 当不考虑轮对弯曲和扭转振动时，粘滑振动不会发生；只考虑轮对扭转时，粘滑振动较少发生；只考虑轮对弯曲时，粘滑振动的情况较多；而当轮对弯曲和扭转均考虑时，轮对粘滑振动的情况显著增多。

(5) 因各种振动形式被激化的程度不一样，轮对粘滑振动可表现出多种形态或类型。

6. 磨损型长波磨耗的成因是：轮对粘滑振动造成钢轨不均匀磨损，当轨道上存在不平顺、列车速度相对集中、某种车型数量占优势时，各通过车轮在钢轨上造成的不均匀磨损产生重复和累加效应，致使波磨形成和发展。即波磨形成和发展满足四个必要条件：

(1) 轮对发生粘滑振动；

(2) 轨道存在不平顺；

(3) 某一列车速度占优势；

(4) 某一列车类型占优势。

7. 轮对粘滑振动类型与钢轨波磨的对应关系

不同的粘滑振动类型，对应着不同的波磨特征和发展规律。

第一类粘滑振动：由轨道横向刚度偏大、轨距偏小等因素引发，受轮对扭转振动控制。磨耗功波动主频为轮对扭转振动一阶固有频率。在钢轨上造成波长约为150mm的均匀中长波。多波同时产生。波磨发生初期，发展速率与垂向力有关，后期发展速率与垂向力波动的关系不大。

第二类粘滑振动：由一系悬挂阻尼不足引发，受轮对弯曲和扭转两种振动控制。轮轨粘着段和滑动段均较长，且不相等。一个粘滑周期内粘着和滑动的时间分配与轴刚度、一系悬挂刚度等因素有关。在钢轨上产生间距不等（客车300~400mm、机车700~1100mm）的高磨耗段，逐渐发展成波磨。波磨波长不均匀，多波同时产生。波深较大时波磨的发展速率也较大。

第三类粘滑振动：由粘着系数降低或制动等因素引发，受系统垂向振动控制。磨耗功波动主频为轮轨系统垂向共振频率。在钢轨上产生波长约250mm的均匀长波。多波同时产生。波磨的发展与垂向力波动有关，发展速率与波磨波深成正比。

第四类粘滑振动：轨道不平顺尤其是钢轨接头冲击致使轮轨间出现瞬时滑动，在距不平顺一定距离处粘滑振动开始。与第三类粘滑振动特性基本相同，差别在于：(1) 粘滑振动持续若干个周期后衰减完毕；(2) 波磨从接头附近开始，由单波逐渐发展成多波；(3) 波长不均匀。

线路上出现最多的波磨是由第三、四两类轮对粘滑振动造成的。

8. 关于轨道不平顺的作用

(1) 轨道不平顺使轮对粘滑振动强度加大、使粘滑振动归一化，某些情况下还诱发粘滑振动。

(2) 对最常见的余弦型单波不平顺（下凹），动轮载在不平顺起点、谷底和终点的量值几乎相等，在下坡段中点轮载最小，在上坡段中点轮载最大。

(3) 轮对经过接头等不平顺时，滚动速度发生瞬时变化。

9. 关于波磨的影响因素

(1) 影响波磨发生发展的因素众多，本文考察了18种对波磨有明显影响的因素，其中主要有：蠕滑力特性曲线、曲线半径或固定轴距、轮轨粘着系数、轮对轴刚度、轨道不平顺、列车类型和速度分布、轨道弹性和阻尼等。

(2) 蠕滑力饱和后如不下降，则粘滑振动不会发生，波磨难以形成。

(3) 制动使蠕滑力更易饱和，粘滑振动及波磨易于产生。

(4) 轮对轴刚度如加大一倍，可有效地减缓波磨。

(5) 加大一系阻尼，能有效抑制波磨。

(6) 欠超高抑制波磨而过超高加速波磨。对波磨贡献大的是低速车。

(7) 板结道床上波磨发展速率快一倍以上。道床刚度降低可望取得良好的减缓波磨的效果。道床阻尼对减缓波磨也有明显效果。

(8) 涂油润滑对减缓波磨不利。

(9) 曲线地段的波磨主要是货车的作用。客货混跑线上，客货车对钢轨的不均匀磨损效果相互抵消，波磨发展较慢。

(10) 圆顺轨道上货车产生磨损型波磨的临界半径约为900mm，不平顺轨道上，临界半径约2000~2500m。机车产生波磨的临界半径要大得多，半径2500m以上曲线地段的波磨主要是机车的作用。

(11) 直线地段不存在磨损型长波磨耗形成和发展的条件。

10. 改变蠕滑力特性曲线，如在踏面上涂特制润滑剂，可望消除粘滑振动预防波磨；离散车速，使曲线地段仍一车速段均不占优势，可防止钢轨不均匀磨损重复累加效应，亦可实现对波磨的预防。但波磨预防措施的可行性和经济性尚待进一步研究。

11. 研究波磨的最终目的应当是：将波磨减缓到不控制换轨的程度。本文提出的减缓波磨的措施共11类，部分减缓措施已在石太线上建立了观测试验段。初步的观测数据表明，效果十分明显。

本文建议的减缓措施主要有：减小和消除接头影响、提高轨道的弹性和阻尼、进行钢轨倒换、定期调整轨道弹性、设置最小超高、施行控制涂油、提高钢轨耐磨性能、施行钢轨打磨、提高轴刚度和一系阻尼及组织反向行车等。

已在观测试验段上实施的措施及初步效果：(1) 钢轨材质，按抗波磨能力强弱排序为稀土轨、淬火轨、普碳轨；(2) 接头整治可使因波磨换轨的时间延迟约30%；(3) 加厚胶垫可取得10~15%的减缓效果，调整胶垫可取得5~10%的效果，楔形胶垫的效果不明显；(4) 波磨轨倒换可延迟换轨时间约30~50%；(5) 钢轨打磨可延长钢轨寿命50%至一倍；(6) 道床破底清筛可减缓波磨20%以上。

12. 进一步研究的工作

- (1) 改进算法，缩短程序运行时间。
- (2) 将钢轨接头和钢轨翻转考虑到分析模型中。
- (3) 寻找可能还存在的其它轮对粘滑振动类型。
- (4) 研究钢轨材质对蠕滑特性的影响。
- (5) 研究预防措施的可行性和经济性。
- (6) 扩大减缓措施的试用范围，进一步验证和完善成因理论。

本文通过研究轮轨系统空间耦合振动，融合轮轨系统垂向振动、轮对弯曲振动、轮对扭转振动和磨耗功波动等波磨成因理论，建立了“轮对粘滑振动-磨耗功波动-磨损型波磨”的波磨成因理论。所得到的结果对波磨的有效预防和减缓已经具有实际的指导意义，波磨减缓措施的可操作性和有效性也已通过现场观测试验得到了初步的验证。当然，由于波磨成因问题的复杂性以及作者的知识面和时间限制，成因理论的某些环节的研究深度还不够，将在以后进一步做工作。本文所建立的波磨成因理论及提出的预防减缓措施，还需在更广泛的现场实践中进行更全面的验证和进一步的完善。

致 谢

本文完成过程中，得到了导师万复光教授的悉心指导；程序调试和运算过程中，得到了王平老师的大力协助；孙国瑛教授、李成辉副教授曾提出有益的建议；蔡英教授提供过一些资料和研究信息；参加部项目“重载线路钢轨波形磨耗成因及预防减缓措施研究”的其他成员，在现场试验和观测中做了大量的工作，这些工作对本文有极大的帮助。

作者的夫人沈如女士，承担了繁重的家务，并帮助校对和打印文稿，没有她的关心和支持，要完成本论文是不可想象的。

作者在此一并表达谢意。

此外，作者还要向其他长期支持、关心和帮助过作者的师长、领导和同事们表达最诚挚的感谢。

作者：刘学毅

一九九六年十一月于成都

主要参考文献

- [1] A.R.Valdivia. A linear dynamic wear model to explain the initiating mechanism of corrugation. The Dynamics of Vehicles on Roads and on Tracks. Edited by Milan Apetaur, Suplement to Vehicle System Dynamics, Vol 17, 1987
- [2] A.Ishibashi, S.Notsuomo. Corrugations on surface in rolling contact. Trans. of ISME, 1971, 1438-1448
- [3] 程振中. 石太线石阳段波浪磨耗轨分析和整治方法探讨. 石家庄工务段, 1985年
- [4] C.A.Brockley, P.L.Ko. An Investigation of Rail Corrugation Using Friction-induced Vibration Theory. Wear, 122(1988) 99-106
- [5] C.A.Brockley. Influence of track support structure and locomotive traction characteristics on short wavelength corrugations. Wear, 153(2), Apr., 1992, 315-322
- [6] 陈道兴, 轮轨非平稳随机振动理论及其在钢轨螺孔疲劳裂损研究中的应用——兼论轨道结构可靠度设计, 铁科院博士生论文, 1991: 北京。
- [7] C.O.Frederick. A rail corrugation theory. Symposium on Contact Mechanics & Wear on Rail/Wheel Systems, 1986, 181-211
- [8] C.O.Frederick. Theory of rail corrugation. in: Contact Mechanics and Wear of Rail/Wheel System II. eds: G.M.L.Gladwell, H.Ghonem, J.Kalousk. Univ. of Waterloo Press, Canada 1987
- [9] C.W.Gear, Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1971.
- [10] D.Harrison(abstrat). The corrugation of railway rails. PH.D. Thesis. Cambridge University, Cambridge, Cambs., 1979
- [11] D.R.Ahlberk, et al. Investigation of rail corrugation on the Baltimore Metro. Wear, 144(1991), 197-210
- [12] D.R.Ahlberk, et al. A review of rail corrugation process under different operating modes. Proc. 1990 ASME/IEEE Joint Railroad Conf. 13-18
- [13] E.Tassilly. A linear model for the corrugation of rails. Journal of Sound and Vibration(1991), 150(1), 25-45
- [14] E.Tassilly. Rail corrugation: analytical model and field tests. Wear, 144(1991), 163-178
- [15] 范钦海等. 钢轨波状磨耗机理探讨. 第4届高速与重载动力学会议, 1987
- [16] Qinhai Fan(范钦海), Jujing Zhao. Analyses on mechanism of rail corrugation and studies with model tests- effect of the bending vibration of wheelset on rail corrugation. AREA Winter Annual Meetung, 1988

- [17] 范钦海等. 钢轨波磨形成的实物滚动台试验研究. 第二届轮轴会议. 1989, 6
- [18] 范钦海, 轮轴弯曲产生的轮轨横向粘滑振动对钢轨波浪形磨耗影响的试验研究, 铁科院机车车辆所学术论文集, 1990, 189-193;
- [19] Qinhai Fan(范钦海), et al. Simulation for the Formation of Rail Corrugation. 13th IAVSD Symposium, 1993, 8
- [20] 范钦海. 钢轨波浪形磨耗形成机理及减缓措施研究. 中国铁道科学, 第15卷第2期, 1994年6月
- [21] 樊流江, 重庆川黔路沥青路面病害调查及分析, 公路, 1989(11), 28-31;
- [22] H. Funke. Rail Grinding. Printed in the German Democratic Republic, Berlin 1986
- [23] F. E. King, J. Kalousek. Rail wear and corrugation studies. AREA Bulletin 658, 1976, 601-620
- [24] G. G. Gray. Corrugation and the dynamics of rolling contact. Ph. D. Thesis. Cambridge University, Cambridge, Cambs., 1972
- [25] G. G. Gray, K. L. Johnson. The dynamic response of elastic bodies in rolling contact to random roughness of their surfaces. J. Sound Vibr. 22, 1972, 323-342
- [26] G. Krabbendam. Is rail corrugation due to internal stresses. Bull. Int. Rly. Congr. Ass., March 1958
- [27] G. Long, et al. Ore car vibration and their implication to long pitch corrugation formation. BHP Melbourne Research Laboratories Report No. MRL/081/076/13, Jan., 1976
- [28] 侯韵卿. 钢轨波浪形磨耗. 铁道科学技术情报研究所专题情报资料81-4, 1980, 11
- [29] H. G. Feller, K. Walf. Surface analysis of corrugation rail treads. Wear, 144(1991) 153-161
- [30] H. Ilias. Discrete-continuous track model for wheelsets rolling over short wavelength sinusoidal rail irregularities. Vehicle System Dynamics, Vol23, Suppl, 1994, 221-233
- [31] H. Kaper. Wheel Corrugation on Netherlands Railways (NS): Origin and Effects of "Polygonization" in Particular, Journal of Sound & Vibration, 1991, 150(1), 25-45;
- [32] H. Krause, et al. Wear of wheel-rail surfaces. Wear, 113(1986) 103
- [33] H. Krause, et al. Investigation into the influence of dynamic forces on the tribological behavior of bodies in rolling/sliding contact with particular regard to surface corrugation. Trans. of the ASME, Journal of Lubrication Technology, Jan. 1981, Vol 103, 26-34
- [34] 黄加亿. 轮轨动力作用与钢轨波纹损伤. 西南交通大学硕士研究生论文, 1987年4月

- [35] J. Alias. Characteristics of wave formation in rails. Rail International, 1986, 11, 23
- [36] J. B. Taylor, A. M. Crawley. Some Aspects of the Problem of Rail Corrugations. Pros. of the 1th International Heavy Haul Railway Conference (1978)
- [37] 李庆扬等. 数值分析. 华中工学院出版社, 1982年: 武昌
- [38] J. Eisenmann. Formation of Short Corrugation in Rails, Heavy Haul Railway conference, 1978/9/8-22, Perth, Sess 413;
- [39] J. E. Garnham, et al. Rolling-sliding dry wear testing- a vibration analysis. Wear 124(1), May, 1988, 45-63
- [40] [英]J. 霍林主编, 上海交通大学摩擦学研究室译. 摩擦学原理. 机械工业出版社, 1975: 北京, 140-163
- [41] J. J. Kalker. Considerations on Rail Corrugation. Vehicle System Dynamics, 23(1994), 3-28
- [42] J. Kalousek, R. Klein. Investigation into causes of rail corrugations. AREA Bulletin 656, 1976, 429-448
- [43] J. Kalousek, K. L. Johnson. An investigation of short pitch wheel and rail corrugation on the Vancouver mass transit system. Proc. Instn. Mech. Engrs. Vol 206 1992, 5, 127-135
- [44] J. Kalousek. Keeping heavy haul track corrugation-free. Rly Gaz. Intern., V145, N8, Aug., 1989, 545-547
- [45] 周继宏译, 保持重载线路无波纹磨耗的经验, 世界铁路, 1992(2), 23-25;
- [46] J. R. Lundgren. Rail Corrugation, AREA Bull. 1982, 687/688, Vol 183, 701-704;
- [47] K. C. Park. An Improved Stiffly Stable Method for Direct Intergration of Nonlinear Structural Dynamic Equations, J. Appl. Mech., Jun, 1975
- [48] K. Hempelmann, et al. The formation of wear patterns on rail tread. Wear, 144(1991) 179-195
- [49] K. Knothe . The effects of the Parameters of Wheelset, Track and Running Conditions on the Growth Rate of Rail Corrugations, Vehicle System Dynamics, 1989, 18, 345-356;
- [50] K. J. Bath, E. L. Wilson. Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice-hall, 1976.
- [51] K. L. Johnson, et al. Development of Corrugations on Surfaces in Rolling Contact. Proc. Instn. Mech Engrs. Vol. 189(1975)13/75, S. 45-58
- [52] J. Kalousek(徐斌译). 钢轨打磨试验的分析和预防性打磨、预防性打磨的意义. Proc. of 4'th International Heavy Haul Railway Conf. 1999: Brisbane

- [53] K. Werner. Corrugation and pitting of rolling surfaces- are they contingent on ultrasonics? Wear, Vol 32 (1975), 233-248
- [54] L. E. Daniels, et al. Rail Corrugation Growth Performance. 2th Heavy Haul Conference, 1982, Paper 82-HH-28, 294-321
- [55] L. E. Daniels, N. Blume. Rail Corrugation Groth Performance, Heavy Haul Railway Conf., 82-HH-28;
- [56] L. E. Daniels, et al. FAST sheds light on corrugation. Railway Gazette International, 1983, 3, 174-176
- [57] L. E. Daniels, et al. Rail corrugation: Perception and reality. Railway Track & Structures, Sep. 1994
- [58] Liu Rongkui(刘荣奎). Hunting and corrugation. ASME Paper 86-WA/RT-13, 1986
- [59] 刘振铎主编. 铁路工务技术手册: 轨道. 中国铁道出版社, 1993年: 北京. P231-247
- [60] 刘钟华, 王夏秋. 关于钢轨波纹问题的探讨. 西南交通大学学报, 1981年第2期
- [61] 刘钟华, 王夏秋. 塑性变形和钢轨波纹磨损. 西南交通大学学报, 1986年第1期
- [62] 刘学毅. 波形轨成因分析. 西南交通大学硕士论文. 1986年4月
- [63] 刘学毅, 孙国瑛. 波磨轨线路上轮轨振动附加力. 铁道工程学会工程振动学组一九九三年年会论文集. 北京: 1993年10月
- [64] 刘启跃. 沪杭线钢轨波磨面因分析. 西南交通大学硕士论文. 87年4月
- [65] 刘启跃. 钢轨波浪形磨损机理及预防措施初探. 铁道建筑, 1989年第2期
- [66] 刘启跃、刘钟华、王夏秋, 沪杭线钢轨波形磨耗形成机理分析, 西南交通大学学报, 1990年第3期.
- [67] 李家驹, 杨开庭, 应惠敏. 钢轨的磨损、剥离和波浪形磨损.
- [68] 李春波. 摩擦振动(一)概述. 润滑与密封, 1983年第5期, 47-54
- [69] 李春波. 摩擦振动(二)动摩擦力与滑动速度的关系. 润滑与密封, 1983年第6期, 47-53
- [70] 李春波. 摩擦振动(三)静摩擦力与停留时间的关系. 润滑与密封, 1984年第1期, 41-54
- [71] 李春波. 摩擦振动(四)临界区分析. 润滑与密封, 1984年第2期, 52-57
- [72] 李炳权编. 201型202型客车转向架. 人民铁道出版社, 1965年: 北京
- [73] 楼修生主编. 韶山1型电力机车. 中国铁道出版社, P293-328, 1989: 北京
- [74] M. Srinivasan. Prevention and cure of rail corrugation. Railway Gazette International, 1975, 3, 97-101
- [75] N. M. Newmark. A Method of Computation for Structural Dynamics, J. Engi. Mech. Div, ASCE, 85(1959), NO. 2.
- [76] 彭新义. 钢轨打磨作业评述. 铁道标准设计通讯, 1989 (8), 37-43
- [77] 潘昌实主编. 隧道力学数值方法. 中国铁道出版社, 1995年: 北京, 165-174
- [78] P. R. Nayak. Contact vibrations of rolling discs. J. Sound Vibr. 22, 1972, 297-322

- [79] P. R. Nayak. Contact vibrations of a wheel on a rail. J. Sound Vibr. 28(2), 1973, 277-293
- [80] 钱庆纯、张士杰, 沥青混合料路面拥包原因初探, 东北公路, 1991(3), 8-12;
- [81] 齐齐哈尔车辆工厂, 四方车辆研究所合编. 新转8型及转6A型铁路货车转向架. 人民交通出版社, 1974年: 北京
- [82] R. A. Clark and P. Foster. On the Mechanism of Rail Corrugation Formation. Proc. 8th LAVSD-Symposium, 1983, 8, 72-85
- [83] R. A. Clark and P. Foster. Mechanical aspects of corrugation formation. Proc. 8th LAVASD SYMP., Cambridge, MA. 1983, Swets and Zeitlinger, Lisse, 1984, 75-85
- [84] R. A. Clark (译文). 钢轨波浪磨耗的最新理论. 诺丁汉铁路轨道新技术国际会议论文集. 铁道科学研究院情报研究所专题情报资料88-13, 60-66, 1988年9月
- [85] R. A. Clark, et al. An investigation into the dynamic effects of railway vehicle running on corrugated rails. J. of Mech. Eng. Sci. Vol. 242, 1982, 65-76
- [86] R. A. Clark. Slip-stick vibrations may hold the key to corrugation puzzle. Railway Gazette International, 1984, 7, 531-533
- [87] R. A. Clark, et al. Short corrugation - an explanation based on slip stick vibration. Symposium on Applied mechanics rail transportation, AMD Vol 96, RTD Vol 2, ASME 988, 141-148
- [88] 饶寿期编. 有限元法和边界元法基础. 北京航空航天大学出版社, 1990: 北京
- [89] R. Groenhout, R. I. Mair. Spectral analysis of rail corrugations. BHP Melbourne Research Laboratories Report No. MRL 81/2, Jan., 1974
- [90] R. Groenhout. Corrugation profile and head hardness correlations in tangent track. BHP Melbourne Research Laboratories Report No. MRL 81/6, OCT., 1974
- [91] R. Groenhout, R. I. Mair. Spectral analysis of rail corrugations at 217.9 km. BHP Melbourne Research Laboratories Report No. MRL/081 /75/012, Dec., 1975
- [92] R. Groenhout, P. Curcto. Rail corrugation profile data from standard carbon and alloy high strength rails at 11.6 km. BHP Melbourne Research Laboratories Report No. MRL/081/76/014, Feb., 1976
- [93] R. I. Mair, M. A. Jupp. The Characteristics and Control of Long Pitch Rail Corrugation at Heavy Axle Load. Pros. of the 1th IHHRC(1978)
- [94] R. I. Mair (陈秀方译). Track design to prevent long pitch rail corrugation. AREA Bulletin 692, 1983, 5
- [95] R. I. Mair. Rail wear and corrugation studies. AREA Bulletin 660, 265-272

- [96] R. A. Clark. Rail corrugation - recent theories. *Track Technology*. Printed in Great Britain by Billing & Sons Ltd. Worcester, 1984, 4
- [97] R. M. Carson, K. L. Johnson. Surface corrugations spontaneously generated in a rolling contact disc machine. *Wear* 17, 1971, 59-72
- [98] 沈志云. 论轨道润滑. 西南交通大学学报, 1986年第2期, 1-7
- [99] 沈志云. 轮轨磨损的动力学预测及减少轮轨磨损的措施. 铁道学报, 1992年6月, 64-70
- [100] 孙国瑛, 刘学毅. 钢轨侧面磨耗因子. 西南交通大学学报, 1992年第2期, 57-64
- [101] 孙恩宏, 降低中小型深沟球轴承噪声的实践, 轴承, 1991(2), 34-37;
- [102] 盛坤等编. 铁路货车检修限度测量方法. 人民铁道出版社, 1979: 北京
- [103] S. L. Grassie: The Corrugation of Railway Track. A Dissertation Submitted to University of Cambridge for Degree of Philosoph. November, 1979
- [104] S. L. Grassie, et al. The dynamic response of railway track to high frequency lateral excitation. *J. of Mech. Engg. Sci.*, 24(1982) 91-95
- [105] S. L. Grassie, et al. The dynamic response of railway track to high frequency vertical excitation. *J. of Mech. Engg. Sci.*, 24(1982) 77-90
- [106] S. L. Grassie, J. Kalousek. Rail Corrugation: Characteristics, Cause and Treatments. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, Vol. 207, 1993, 57-68
- [107] S. L. Grassie. Corrugation: variation on an enigma. *Rly. Gaz. Intern.*, V146, N7, July, 1990, 531-533
- [108] S. L. Grassie and K. L. Johnson. Periodic micoslip between a rolling wheel and a corrugated rail. *Wear*, 101(1985), 291-309
- [109] S. L. Grassie, et al. The dynamic loading of rails at corrugation frequencies. *Symposium on Contact Mechanics & Wear of Rail/Wheel Systems*, 1982, 209-227
- [110] S. L. Grassie, et al. The behaviour of railway wheelsets and track at high frequency vertical excitation. *J. Mech. Engr. Sci.*, 24(1982) 103-111
- [111] S. L. Grassie. An investigation into the generation of corrugation by transient spin creep. *Wear*, 1985, 103 161-174
- [112] 四方车辆研究所编. 铁路客车转向架型式概要. 人民铁道出版社, 1977: 北京
- [113] 太原等铁路机械学校编. 铁路货车(下册). 人民铁道出版社, 1979: 北京
- [114] T. J. Devine, et al. Rail corrugation investigations at FAST: December, 1979 through August, 1981. *FAST Engineering Cof. 1981 Proc.*, Report FRA/TTC-82/01, 1982, 165-174
- [115] 应怀樵编著. 波形和频谱分析与随机数据处理. 中国铁道出版社, 1985: 北京
- [116] 谭立成, 轮轨相互作用与钢轨波浪形磨耗. 中国铁道科学, 第3卷第1期(1981), 159-165

- [117] 谭立成, 钢轨波状磨耗形成机理的初步试验和理论研究. 中国铁道科学. 第六卷 (1985) 第1期
- [118] 谭立成, 俞铁峰. 曲线钢轨波浪形磨损形成机理及减轻措施—兼论轮轨润滑的影响. 重载铁路线路结构与养护. 1991年重载铁路线路结构与养护学术讨论会论文集. 中国铁道出版社, 北京: 1992年12月
- [119] 童大坝主编, 铁路轨道, 中国铁道出版社, 1988: 北京
- [120] 王双庆. 钢轨波浪形磨耗的研究. 铁道科学研究院硕士论文, 1985
- [121] 王福天主编, 车辆动力学, 中国铁道出版社, 1981: 北京
- [122] 王午生译(译), 美国Battele--Columbus研究所, 铁路轨道动力学分析模型的发展.
- [123] 吴齐正. 路面砂波浪成因及其防治措施. 华东公路, 1990年第4期
- [124] W.F. Hayes, H.G. Tucker. Wheelset-track resonance as a possible source of corrugation wear. Wear, 144 (1991) 211-226
- [125] Wan Fuguang, Sun Guoying, Huang Shishou and Liu Xueyi. Rail defects of heavy haul railways. Proceedings of Fifth International Heavy Haul Railway Conference. Beijing, China. 6th to 13th of June, 1993.
- [126] 吴章江, 车辆通过轨道低扣接头的垂向轮轨作用力计算, 铁路机车车辆, NO. 1, 1982.
- [127] 邢书珍, 铁路轨道振动理论的研究, 中国铁道科学, Vol. 3, NO. 1, 1980
- [128] 俞良家、朱金荣、于国平, 钢轨波浪磨耗成因的研究, 北方交通大学学报, 1989, 13 (2-I), 95-99;
- [129] Y. Suda, et al. The Mechanism of Corrugation Phenomenon on Rolling Surfaces. ASME Winter Annual Meeting, 1988
- [130] Y. Suda. Effects of vibration system and rolling conditions on the development of corrugations. Wear, 144 (1991), 227-242
- [131] Y. Suda, et al. Basic study of corrugation mechanism on contact in order to control rail surfaces. Proc. 11th LAVSD Symp., 1989, 18, 566-577
- [132] Yukio Stao. Anti-Corrugation Property of Rail Steel. QR of RTRI, Vol. 35, No. 4, Nov. 1994
- [133] 扬少文等. 钢轨波形磨耗的分析研究. 西南交通大学科技资料83-40, 1983
- [134] 扬少文, 刘学毅. 波形轨成因分析. 西南交通大学学报, 1987年第3期, 65-72
- [135] 颜秉善, 王其昌. 钢轨力学与钢轨伤损. 西南交通大学出版社. 四川峨眉: 1989年
- [136] 刘学毅, 王 平. 轨道垂向不平顺动力特性. 95'全国交通运输领域青年学术大会论文集“跨世纪人才论交通运输”, 1995年: 重庆
- [137] 詹斐生. 机车动力学. 中国铁道出版社, 北京: 1990年. (第四节 接触振动和张弛振动) 313-340
- [138] 郑安启. 钢轨波浪形磨损的面因分析与实验研究. 西南交通大学学报, 86年第2期

- [139] 郑安启. 钢轨波浪形磨损的成因分析与实验研究. 西南交通大学学报, 1986年第2期, 106-112
- [140] 瞿婉明, 车辆—轨道垂向系统的统一模型及其耦合动力学原理, 铁道学报, 1992(9)
- [141] 王其昌. 轨道动力学分析. 西南交通大学, 1987年: 成都
- [142] 朱继绪主编. 车辆制动装置. P203-210, 中国铁道出版社, 1993年: 北京
- [143] 北京铁路局, 西南交通大学. “打磨列车应用技术研究”项目鉴定材料, 93年: 北京
- [144] Arnold Grob-Thebing, Klaus Knothe and Klaus Hempelmann, Wheel-rail contact mechanics for short wavelengths rail irregularities
- [145] S. 铁摩辛柯, 工程中的振动问题, 人民铁道出版社, 1979.
- [146] R. A. Clark, V. P. Lowndes. Discrete Support Track Dynamic Model Theory And Program Gudies. BRB Research Department TMT95, 1979.
- [147] 王平. 轨道横向不平顺的动态分析. 西南交通大学硕士学位论文, 1994年: 成都
- [148] [日]小野纯朗著, 徐勇译. 提高列车速度的理论和实践. 中国铁道出版社, 1992年: 北京
- [149] 李成辉. 轨道结构振动理论及其应用研究. 西南交通大学博士学位论文, 96年: 成都
- [150] 刘正刚. 轨道扣件弹性的动力学分析. 西南交通大学硕士学位论文, 1987年: 峨眉
- [151] 成都铁路局科研所, 西南交通大学, 铁科院西南研究所. 减缓山区坡道小半径曲线内钢轨侧向磨耗的技术措施, 项目鉴定材料, 1990年: 成都
- [152] 刘学毅, 孙国瑛. 不对称打磨技术减缓钢轨侧磨效果初探. 中国铁路, 93年第10期
- [153] 颜秉善. 淬火钢轨间断涂油润滑减缓侧磨的接触力学分析. 铁道建筑, 93(12), 1-7
- [154] A. Matsumoto, Y. Sato, et al. Study on the formation mechanism of rail corrugation on cured track. Vehicle System Dynamics Supplement 25(1996), 450-465