

基于正交多项式最小二乘分段拟合的气象探测数据处理方法

李建保¹, 张 铁¹, 孙宝京², 佟 昕³

1. 东北大学 理学院, 辽宁 沈阳 110004;
 2. 沈阳炮兵学院 电子侦察指挥系, 辽宁 沈阳 110867
 3. 辽宁省科学技术情报研究所, 辽宁 沈阳 110016
- E-mail: ljb_gladiator@163.com

摘 要: 针对气象探测数据变化规律复杂、突变情况不可预测、数据量大等特点, 提出了基于离散数据正交多项式最小二乘的分段拟合方法。首先, 从计算稳定性角度, 说明了采用离散数据的正交多项式最小二乘法的原因。其次, 从曲线拟合的保形性角度, 详细阐述了二次分段拟合原则。最后, 以具有典型特征的气温探测数据为例, 证明了采用基于离散数据正交多项式最小二乘的分段拟合方法能够获得明显优于传统内插方法的拟合精度, 提高气象探测数据处理的精度和自动化处理程度。

关键词: 正交多项式; 最小二乘; 分段拟合; 气象探测

A Piecewise Curve Fitting Method of Processing Meteorological Detecting Data Based on the Least Squares of Orthogonal Polynomial

Li Jianbao¹, Zhang Tie¹, Sun Baojing², Tong Xin³

1. School of Sciences, Northeastern University, Shenyang 110004, China;
 2. Electric Detection Department, Shenyang Artillery Academy, Shenyang 110867, China.
 3. Institute of Scientific & Technical Information of Liaoning Province, Shenyang 110016, China.
- E-mail: ljb_gladiator@163.com

Abstract: In according with the character of the large number and complex and unpredicted trend on change of the meteorological detecting data, the piecewise curve fitting method based on the least squares of orthogonal polynomial for scattered data is presented. Firstly, the reason of using the least squares of orthogonal polynomial for scattered data is introduced from the respect of the stability of data processing. Secondly, the principle of twice piecewise curve fitting is set out in detail from the respect of the shape preserving feature of curve fitting. Finally, as the temperature detecting data for example, it is proved clearly that the twice piecewise curve fitting method can make much better fitting precision than the traditional interpolation method, and improve the level of precision and automation of the meteorological detecting data processing.

Key Words: orthogonal polynomial; least squares; piecewise curve fitting; meteorological detecting

1 引言

当前气象探测站整理高空气象探测数据时, 主要采用的方法是将整个探测空间分层, 计算规定高度的中间数值, 作为计算层数据, 其他数据则采用依托计算层数据内插的方法计算。上述计算方法实用高度上的数据均由计算层数据插值得到, 存在一

定的截断误差和舍入误差; 另外在较少的计算层数据中, 必然会丢弃绝大多数探测数据, 造成探测资源的极大浪费。随着气象探测及作业装备自动化水平和数据处理能力的不断提高, 对气象探测数据处理精度和时效性提出了更高的要求, 这也使得从根本上改变气象参数的计算方法成为可能^[1]。

由于气象要素随时、随地在不断地变化, 而且探测仪器本身也受到许多复杂因素的影响, 因而,

各种气象探测数据普遍具有数据量大、变化规律复杂、突变情况较多且不可预测等特点^[2]。其中，高空实时气温和高度曲线的变化最为复杂。当探测高度达到 2 万米时，采用电子探空仪探测时探测数据超过 2000 组，虽然高空实时气温总体呈下降趋势，但在局部经常出当前气象探测站整理高空气象探测数据时，主要采用的方法是将整个探测空间分层，计算规定高度的中间数值，作为计算层数据，其他数据则采用依托计算层数据内插的方法计算。上述计算方法实用高度上的数据均由计算层数据插值得到，存在一定的截断误差和舍入误差；另外在较少的计算层数据中，必然会丢弃绝大多数探测数据，造成探测资源的极大浪费。随着气象探测及作业装备自动化水平和数据处理能力的不断提高，对气象探测数据处现不可预测的无规则变化。

针对气象探测数据特点，本文基于离散数据正交多项式最小二乘拟合思想，提出根据数据变化率的变化情况，分段拟合各种气象探测数据曲线的方法。借助编程软件的自动处理，经过多次试验证明，此方法可直接得出气象探测报告所需要的气（虚）温-高度、气压-高度、风速-高度和风向-高度函数方程（高度为自变量），并且对气象探测数据处理的精确性、实效性和计算简洁性都有了很大的提高。由于高空实时气温和高度曲线的变化最复杂且最具代表性，本文将以此作为说明实例。

2 离散数据分段最小二乘拟合方法

用插值方法所找出的近似曲线，通过所有已知点，但是由观测或实验所获得的数据，不可避免地含有误差，这就使插值所找出的近似曲线保存所有观测误差，导致所得结果可能离开了实际情况，出现曲线拟合的过度现象。而根据实际标准尽可能地通过节点的函数值近旁，以部分地抵消原始数据所包含的观测误差，则更具有实用价值，最小二乘拟合就是其中的一个重要方法^[3]。

2.1 离散数据的正交多项式最小二乘拟合

在线性空间由 $\Phi = \text{span}(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ 上求解最小二乘曲线拟合问题，经常会出现法方程组是病态方程组的情况，特别是当 n 偏大时更是如此，同时在求解法方程组时系数矩阵或右端项微小的扰动都可能导致解函数有很大的误差。为了确保计算过程的

稳定性和精确性，我们采用基于气象探测数据的正交多项式作为拟合函数系，使法方程组的系数矩阵变为对角矩阵，从而解得正交多项式的系数^[4-5]。

根据点集 $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ ，构造出相应的正交多项式系 $\{p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)\}$ 。

由正交多项式三项递推关系，最高次项系数为 1 的正交多项式系 $\{p_k(x)\}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) 有如下递推关系：

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 1 \\ p_1(x) &= x - \alpha \\ p_{k+1}(x) &= (x - \alpha_{k+1})p_k(x) - \beta_k p_{k-1}(x) \end{aligned} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

其中 $p_k(x)$ 为最高项系数为 1 的 k 次多项式。由 $\{p_k(x)\}$ 正交性可知

$$\alpha_{k+1} = \frac{(xp_k(x), p_k(x))}{(p_k(x), p_k(x))} = \frac{\sum_{i=1}^m x_i p_k^2(x_i)}{\sum_{i=1}^m p_k^2(x_i)} \quad (1)$$

$$\beta_{k+1} = \frac{(p_k(x), p_k(x))}{(p_{k-1}(x), p_{k-1}(x))} = \frac{\sum_{i=1}^m p_k^2(x_i)}{\sum_{i=1}^m p_{k-1}^2(x_i)} \quad (2)$$

$(k = 1, 2, \dots, n-1)$

2.2 二次分段拟合原则

由于完整综合气象探测数据量大，如果对整组数据进行一次拟合，则拟合精度和计算效果都比较差。同时，为克服传统分段曲线拟合方法中对数据点分段时经验成分较多的缺点，本文根据数据曲线斜率的变化情况对曲线进行分段拟合，并且加入了使相邻曲线连续，即曲线边界点必须连续的约束条件^[6-7]。

考虑到高度是单调递增，为了适应气象数据曲线在局部随高度变化的无规则性，本文采取二次分段原则。

一次分段：在气温和高度曲线中，设

$$\Delta t_i = (t_{i+1} - t_i) / (h_{i+1} - h_i)$$

如果 Δt_{i-1} 为负， Δt_i ， Δt_{i+1} ， Δt_{i+2} ， $\dots$ ， Δt_{i+a} ($a \geq 1$) 为正， Δt_{i+a+1} ， $\dots$ ， Δt_{i+a+b} ($b \geq 1$) 为负， $\Delta t_{i+a+b+1}$ 为正，则 $\{t_i, \dots, t_{i+a+b}\}$ 为第 i 个分段，

第 $i+1$ 个分段则从点 t_{i+a+b} 开始。

二次分段：在气温和高度曲线中，第 i 个分段已经由一次分段确定，设

$$\delta_{i+c} = \Delta t_{i+c} - \Delta t_{i+c-1} \quad (1 \leq c \leq a+b-1)$$

如果 $\delta_{i+1}, \delta_{i+2}, \dots, \delta_{i+d}$ ($d \geq 1$) 均大于标准值 δ_o (为负数), $\delta_{i+d+1} \leq \delta_o$, 且 $\delta_{i+d+2}, \dots, \delta_{i+d+e}$ ($e \geq 1$) 小于或等于 $(-\delta_o)$, $\delta_{i+d+e+1} > (-\delta_o)$, 则 $t_{i+d+e+1}$ 为分段点, 即 $\{t_i, \dots, t_{i+d+e+1}\}$ 为 1 个分段, 下一个分段以 $t_{i+d+e+1}$ 为起点, 从 $\delta_{i+d+e+2}$ 开始判断; 如果 $\delta_{i+1} \leq \delta_o$, 且 $\delta_{i+2}, \dots, \delta_{i+e}$

($e \geq 1$) 小于或等于 $(-\delta_o)$, $\delta_{i+e+1} > (-\delta_o)$, 则 t_{i+e+1} 为分段点, 即 $\{t_i, \dots, t_{i+e+1}\}$ 为 1 个分段, 下一个分段以 t_{i+e+1} 为起点, 从 δ_{i+e+2} 开始判断^[8-9]。

为使在单个分段内拟合曲线在误差允许范围内最大程度地保持数据曲线的形状, 并且减少数据处理程序的计算量, 实际计算过程对原始探测数据中心化计算后, 采用如下做法进行拟合:

若 $(a+b) \geq 5$, 则用四阶正交多项式为拟合函数系, 即当一个分段包含 4 个以上的点时用 4 阶正交多项式拟合:

$$\varphi_i^*(x) = \sum_{k=0}^4 \frac{(f, \varphi_k)}{(\varphi_k, \varphi_k)} \varphi_k(x) \quad (3)$$

若 $(a+b) = 4$, 则用三阶正交多项式为拟合函数系, 即当一个分段包含 4 点时用 3 阶正交多项式拟合:

$$\varphi_i^*(x) = \sum_{k=0}^3 \frac{(f, \varphi_k)}{(\varphi_k, \varphi_k)} \varphi_k(x) \quad (4)$$

若 $(a+b) = 3$, 则用二阶正交多项式为拟合函数系, 即当一个分段包含 3 个点时用 2 阶正交多项式拟合:

$$\varphi_i^*(x) = \sum_{k=0}^2 \frac{(f, \varphi_k)}{(\varphi_k, \varphi_k)} \varphi_k(x) \quad (5)$$

同时, 使参与第 i 个分段拟合的第 i 个分段中的最后一个数据点, 作为第 $i+1$ 个分段的第一个数据点参与第 $i+1$ 个分段的拟合, 这样第 i 个分段的拟合函数和第 $i+1$ 个分段的拟合函数在分界点上的值相等, 从而实现所有分段拟合函数在整体上保持连续^[10], 即

$$\varphi_i^*(x_{i+a+b}) = \varphi_{i+1}^*(x_{i+a+b}) \quad (6)$$

3 计算实例

以编号为 087233 的 GZZ8 型电子探空仪探测数据为例。

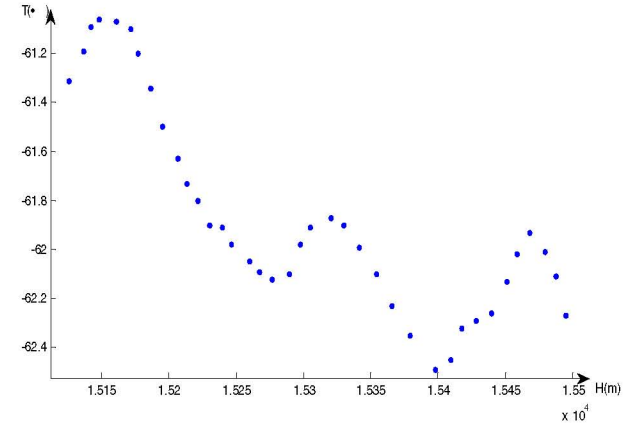


图 1 温度和高度探测数据分布图

图 1 是该组探测数据曲线中一部分, 温度 $T \in [-61.31, -62.27]$, 高度 $H \in [15125.89, 15494.56]$ 。根据本文的分段规则, 数据处理系统自动将此段数据曲线分为 5 段进行拟合, 其中:

第一个分段为前 13 个点, $h \in [15125.89, 15230.23]$, 拟合函数为

$$t_1 = 1.23561 \times 10^{-8} \times (h - 15177.99154)^4 + 2.52184 \times 10^{-6} \times (h - 15177.99154)^3 - 0.00018 \times (h - 15177.99154)^2 - 0.01209 \times (h - 15177.99154) - 61.22324$$

平方误差: 0.08;

第二个分段为后续 7 个点, $h \in [15230.23, 15289.47]$, 拟合函数为

$$t_2 = -5.59728 \times 10^{-8} \times (h - 15258.46429)^4 + 3.2714 \times 10^{-6} \times (h - 15258.46429)^3 + 0.00010 \times (h - 15258.46429)^2 - 0.00638 \times (h - 15258.46429) - 62.04223$$

平方误差: 0.03;

第三个分段为后续 10 个点, $h \in [15289.47, 15397.85]$, 拟合函数为

$$t_3 = -0.31811 \times 10^{-8} \times (h - 15337.86800)^4 + 1.871 \times 10^{-6} \times (h - 15337.86800)^3 - 1.2 \times 10^{-4} \times (h - 15337.86800)^2 - 0.00759 \times (h - 15337.86800) - 61.95492$$

平方误差: 0.02;

第四个分段为后续 5 个点, $h \in [15397.85, 15439.32]$, 拟合函数为

$$t_4 = 1.71074 \times 10^{-6} \times (h - 15418.26600)^4 - 1.08041 \times 10^{-5} \times (h - 15418.26600)^3 - 0.00089 \times (h - 15418.26600)^2 + 0.00925 \times (h - 15418.26600) - 62.34332$$

平方误差: 0.01;

第五个分段为最后 7 个点, $h \in [15439.32, 15494.56]$, 拟合函数为

$$t_5 = 3.16273 \times 10^{-7} \times (h - 15468.15857)^4 - 3.72122 \times 10^{-6} \times (h - 15468.15857)^3 - 0.00068 \times (h - 15468.15857)^2 + 0.00276 \times (h - 15468.15857) - 61.96273$$

平方误差: 0.03;

根据传统气象探测数据处理方法, 14000 米至 16000 米高度范围内的相关气象数据从标准高度层 14000 米和 16000 米处的实际探测数据进行线性内插得到。在此例中, 14000 米和 16000 米处的气温分别为 -56.16°C 和 -62.37°C , 从而内插得到高度为 15142.00 米, 15276.4 米, 15378.67 米, 15417.06 米, 15479.1 米处的气温。各高度对应的实际探测值、内插结果和拟合结果如表 1 所示。

表 1 不同高度实际探测值、内插值、拟合值对应表

高 度 (m)	探 测 值 ($^\circ\text{C}$)	内插结果 ($^\circ\text{C}$)	拟合结果 ($^\circ\text{C}$)
15142.00	-61.09	-59.71	-61.12
15276.40	-62.12	-60.12	-62.11
15378.67	-62.35	-60.44	-62.34
15417.06	-62.32	-60.56	-62.32
15479.10	-62.01	-60.75	-62.01

由表 1 可见, 采用基于离散数据正交多项式最小二乘的分段拟合法, 可以获得比传统内插法更好的拟合精度。

4 结论

本文针对各种气象探测数据数据量大、变化规律复杂、突变情况较多且不可预测等特点, 提出了基于离散数据正交多项式最小二乘的分段拟合法。经过实践证明, 该方法能够根据算法自动分段, 拟合出符合精度要求的曲线, 在处理程序自动计算过程中能够确保计算的稳定性和高效性, 避免了传统气象探测数据处理方法中不断累计的舍入误差对结果的影响, 提高了气象探测数据处理结果的精度和自动化处理程度。

参考文献

- [1] 孙宝京. 炮兵防空兵气象信息系统研究[D]. 沈阳: 东北大学, 2004.
- [2] 曲延祿. 外弹道气象学概论[M]. 北京: 气象出版社, 1987: 59-176.
- [3] Frank R. Scattered data interpolation: tests of some methods [J]. *Mathematical Computation*, 1982, 38: 181-200.
- [4] Micchelli C. Interpolation of scattered data: distance matrix and conditionally positive definite functions[J]. *Constructive Approximation*, 1986, 2: 11-22.
- [5] 蔺小林, 蒋耀林. 现代数值分析[M]. 北京: 国防工业出版社, 2004: 212-255.
- [6] Wu Zongmin, Schaback R. Shape preserving properties and convergence of univariate multi-quadric quasi-interpolation[J]. *ACTA Mathematica Application Sinica*, 1994, 10: 441-446.
- [7] J A Gregory. Shape preserving spline interpolation[J]. *Computer-Aided Design*, 1986, 18(1): 53-57.
- [8] E Kaufmann, R Klass. Smoothing surfaces using reflection lines for families of splines [J]. *Computer-Aided Design*, 1988, 20(6): 312-316.
- [9] J Hoschek. Smoothing curves and surfaces. *Computer-Aided Geometric Design*, 1985, 2(1-3): 97-105.
- [10] Jorg Peters. Local smooth surface interpolation: a classification. *Computer-Aided Geometric Design*, 1990(7): 191-195.